Ueber die Regulierung von Turbinen

Ueber die Regulierung von Turbinen.

Von *Aurel Stodola*, Professor am eidg. Polytechnikum in Zürich.

III.

II. Regulierung mit langsam wirkendem Hilfsmotor.

Das Wesen dieser Regulierungsart ergibt sich aus folgender Betrachtung. Bezeichnen wir mit S jenen Punkt des Regulators, auf den sich der Hub s desselben bezieht. Mit dem Hilfsmotor, der den Regulierschieber bethätigt, denken wir uns einen ideellen, widerstandslosen Mechanismus von solcher Beschaffenheit verbunden, dass ein Punkt S' desselben in unmittelbarer Nachbarschaft des Punktes S eine mit diesem kongruente Bahn beschreibt und im Beharrungszustande mit S zusammenfällt. Der Hub von S' werde mit s' bezeichnet, und von demselben Anfangspunkte aus gerechnet, wie s, so dass für den Beharrungszustand stets $s' = s$, und insbesondere für den Anfangszustand $s' = s_0$ ist. Sowohl s wie s' sollen nach jener Richtung als positiv zählen, für welche einem Wachsen der Geschwindigkeit eine Zunahme der beiden entspricht. Bewirkt der Regulator infolge einer Belastungsänderung eine Verschiebung des Punktes S nach irgend einer Richtung, so nimmt der Punkt S' sofort eine Bewegung in gleichem Sinne an, allein mit einer durch den Hilfsmotor bedingten Geschwindigkeit, die verschieden ist von derjenigen von S. Die Bewegung und damit die Regulierung dauern so lange an, bis S' wieder mit S zusammenfällt. Bewegt sich S zurück, muss auch S' ihm folgen.

Das Charakteristische der Anordnung besteht also darin, dass so lange als $s' = s$, der Hilfsmotor in Ruhe verharrt; dass hingegen eine Bewegung im Sinne von S eintritt, wenn $s' \gtrless s$ ist. Dieses Verhältnis kann für die Rechnung am bequemsten dargestellt werden durch die Annahme

$$\frac{ds'}{dt} = \sigma_0 \frac{s - s'}{s_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

d. h. durch die Voraussetzung, die Geschwindigkeit des Punktes S' sei proportional dem Abstande der Punkte S und S' von einander. Da $(s - s')$, wenn $s' > s$ ist, negativ wird, ist durch den Ausdruck (30) auch der Bewegungssinn richtig dargestellt.

Der Hub des statischen und als massenlos vorausgesetzten Regulators ist eine Funktion der Turbinengeschwindigkeit und kann für kleine Aenderungen der letzteren einfach proportional gesetzt werden, d. h. wir können annehmen

$$\frac{s - s_0}{s_0} = \alpha \frac{v - v_0}{v_0} = \alpha\, x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Wir führen jetzt eine neue Variable ein, definiert durch die Gleichung

$$\frac{s' - s_0}{s_0} = \alpha\, w. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Es ist somit w eine reine Zahl, proportional der „prozentischen" Aenderung des Hubes s'. Wir schreiben die Gleichung (30) nun in der Form:

$$\frac{ds'}{dt} = \sigma_0 \left[\frac{s - s_0}{s_0} + \frac{s_0 - s'}{s_0}\right];$$

ferner setzen wir:

$$T_0 = \frac{s_0}{v_0},$$

und führen diese Grösse, sowie x und w in den Ausdruck für $\frac{ds'}{dt}$ ein. Dies ergiebt

$$T_0 \frac{dw}{dt} = x - w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Die mechanische Bedeutung der Grösse T_0 erhellt aus folgendem: Die Geschwindigkeit $\frac{ds'}{dt}$ ist am grössten, wenn die Differenz $s - s'$ ein Maximum geworden ist. Dies findet statt, wenn sich der Punkt S in der oberen, und S' in der unteren Grenzlage befindet, oder umgekehrt. Dann ist aber $s - s'$ gleich dem ganzen Hube des Regulators, den wir vorübergehend mit s_r bezeichnen wollen, und wir haben

$$\left(\frac{ds'}{dt}\right)_{max} = \sigma_0 \frac{s_r}{s_0}; \text{ hieraus } T_0 = \frac{s_r}{\left(\frac{ds'}{dt}\right)_{max}} \quad (34\,a)$$

d. h. T_0 *ist jene Zeit, welche der Hilfsmotor benötigen würde, um alle Leitkanäle zu schliessen (oder zu öffnen), wenn die ganze Bewegung mit der maximalen Geschwindigkeit vor sich ginge.* Wir wollen T_0 der Kürze halber die **„Regulierungsdauer"** nennen. $\frac{1}{T_0}$ bildet dann einen Masstab für die **„Regulierungsgeschwindigkeit"**. Man findet für die wirkliche Zeitdauer, während welcher der Weg $s_2' - s_1'$ bei konstantem s beschrieben wird, durch Integration den Wert

$$t_0 = T_0 \log n \frac{s_1' - s}{s_2' - s}.$$

Beträgt die Differenz $s_2' - s$ in der Endlage z. B. $1/100$ der anfänglichen Differenz $s_1' - s$, so wird $t_0 = 4{,}6\ T_0$; hingegen für $s_2' - s = 0$ wird $t_0 = \infty$, d. h. das letzte Wegelement, welches den Punkt S' zum Zusammenfallen mit S bringt, wird erst in unendlich langer Zeit zurückgelegt. Diese Eigentümlichkeit der obigen Formel stellt in ziemlich richtiger Weise den bei jedem Hilfsmotor vorhandenen „toten Gang" dar, welcher (unterstützt durch die Ueberdeckung der Steuerorgane) bewirkt, dass der Motor nie genau in die dem Regulatorhube entsprechende Lage gelangen kann, sondern stets etwas über oder unter derselben stehen bleiben muss.

Für jene Motoren, welche, wie die Klinkenmechanismen, mit konstanter Geschwindigkeit regulieren, werden die zu entwickelnden Formeln nur beschränkte Gültigkeit besitzen. Man kann etwa das oben berechnete t_0, welches die Zeit zum Schliessen von 99 % aller Leitkanäle darstellt der faktischen Schliessungsdauer dieser Motoren gleich setzen, oder auch den Wert von T_0 lediglich durch Schätzung bestimmen.

Die anderen Hauptgleichungen lassen sich aus den im ersten Abschnitt entwickelten leicht herleiten.

Für die Bewegung der Schwungmasse gilt, wie dort:

$$\frac{M v_0}{P_0} \frac{dx}{dt} = \frac{P - Q}{P_0} = \Pi + \frac{f - f_0}{f_0} - \frac{v - v_0}{v_0} + 3\, \frac{u - u_0}{u_0}$$

Wegen der relativen Unabhängigkeit der Punkte S und S' von einander, ist der Querschnitt f unmittelbar nur eine Funktion von s', welche wir für kleine Aenderungen wieder linear voraussetzen können. Es wird demnach

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\beta\, \frac{s' - s_0}{s_0} = -\alpha \beta\, w.$$

Hierin ist $\alpha\beta$ = dem Koefficienten α_0 des vorigen Abschnittes, denn im Beharrungszustande ist $w = x$, also

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\alpha \beta\, x = -\alpha_0\, x.$$

Mit obigem Wert für die Querschnittsänderung und mit den Bezeichungen des ersten Abschnittes ergiebt sich dann

$$T_1 \frac{dx}{dt} = \Pi - \alpha_0 w - x + \frac{3}{2} z.$$

Die Gleichung für die Beschleunigung der Druckwassersäule bleibt ungeändert, und in der Gleichung für die Schwankung des Windkessel-Wasserspiegels ist bloss x durch w zu ersetzen. Wir erhalten demnach das folgende System von Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} T_o \frac{dw}{dt} + w - x &= 0 \\ T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_o w + x - \tfrac{3}{2} z &= \Pi \\ T_2 \frac{dy}{dt} + \varepsilon y + z &= 0 \\ T_3 \frac{dz}{dt} - \alpha_o w - y + \tfrac{1}{2} z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (35)$$

Die Integrierung obiger Gleichungen ist nach dem im ersten Abschnitt benützten Schema durchzuführen. Da indessen die charakteristische Gleichung vom vierten Grade ist, lassen sich aus derselben nicht so leicht allgemeine Folgerungen ziehen. Wir beschränken deshalb die Untersuchung auf den Fall, dass kein Windkessel vorhanden ist, d. h. dass $T_3 = 0$ wird. Ebenso werde $\varepsilon = 0$ gesetzt, da wir gesehen haben, dass, soferne kein Windkessel vorhanden ist, diese Grösse nur einen untergeordneten Einfluss auf die Resultate ausübt.

Man kann dann aus der letzten der Gleichungen (35) z berechnen und in die drei ersten substituieren. Dies ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} T_o \frac{dw}{dt} + w - x &= 0 \\ T_1 \frac{dx}{dt} - 2\,\alpha_o w + x - 3\,y &= \Pi \\ T_2 \frac{dy}{dt} + 2\,\alpha_o w + 2\,y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Die Lösung dieses Systemes führt auf die folgende charakteristische Gleichung:

$$T_o T_1 T_2 \varphi^3 + [2\,T_o T_1 + T_1 T_2 + T_2 T_o]\,\varphi^2 + \\ + [2\,T_o - (2\,\alpha_o - 1)\,T_2 + 2\,T_1]\,\varphi + 2\,(\alpha_o + 1) = 0 \quad (37)$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung reell und von einander verschieden, so ist die vollständige Lösung:

$$\left.\begin{aligned} w &= \Theta + \lambda\, m_1 e^{\varphi_1 t} + \mu\, m_2 e^{\varphi_2 t} + \nu\, m_3 e^{\varphi_3 t} \\ x &= \Theta + \lambda\, a_1 e^{\varphi_1 t} + \mu\, a_2 e^{\varphi_2 t} + \nu\, a_3 e^{\varphi_3 t} \\ y &= -\alpha_o \Theta + \lambda\, b_1 e^{\varphi_1 t} + \mu\, b_2 e^{\varphi_2 t} + \nu\, b_3 e^{\varphi_3 t}. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Hierin bedeuten:

$$\Theta = \frac{\Pi}{\alpha_o + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$m_k = (T_2 \varphi_k + 2);\; a_k = (T_o \varphi_k + 1)(T_2 \varphi_k + 2);\; b_k = -2\,\alpha_o; \\ k = 1, 2, 3.$$

Die Grössen $\lambda\ \mu\ \nu$ sind zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Theta + m_1 \lambda + m_2 \mu + m_3 \nu \\ 0 &= \Theta + a_1 \lambda + a_2 \mu + a_3 \nu \\ 0 &= -\Theta \alpha_o + b_1 \lambda + b_2 \mu + b_3 \nu. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (40)$$

Sind hingegen zwei der Wurzeln der charakteristischen Gleichung komplex und zwar $\varphi_2 = r + si$, $\varphi_3 = r - si$, so ist die Lösung

$$\left.\begin{aligned} w &= \Theta + \lambda_1 m_1 e^{\varphi_1 t} + 2\,[(\mu\,\varrho_2 - \nu\,\varrho_3) \cos st - \\ &\qquad - (\mu\,\varrho_3 + \nu\,\varrho_2) \sin st]\, e^{rt} \\ x &= \Theta + \lambda\, a_1 e^{\varphi_1 t} + 2\,[(\mu\,\alpha_2 - \nu\,\alpha_3) \cos st - \\ &\qquad - (\mu\,\alpha_3 + \nu\,\alpha_2) \sin st]\, e^{rt} \\ y &= -\alpha_o \Theta + \lambda\, b_1 e^{\varphi_1 t} + 2\,[(\mu\,\beta_2 - \nu\,\beta_3) \cos st - \\ &\qquad - (\mu\,\beta_3 + \nu\,\beta_2) \sin st]\, e^{rt}. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Hier bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} & m_1 = (T_2 \varphi_1 + 2);\; a_1 = (T_o \varphi_1 + 1)(T_2 \varphi_1 + 2);\; b_1 = -2\,\alpha_o \\ & \varrho_2 = (T_2 r + 2);\; \alpha_2 = (T_o r + 1)(T_2 s + 2) - T_o T_2 s^2; \\ & \qquad \beta_2 = -2\,\alpha_o \\ & \varrho_3 = T_2 s;\; \alpha_3 = (T_o r + 1)\,T_2 s + (T_2 s + 2)\,T_o s;\; \beta_3 = 0. \end{aligned}\right\} (41\text{a})$$

Zur Bestimmung der Konstanten $\lambda\ \mu\ \nu$ dienen in diesem Falle die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Theta + m_1 \lambda + 2\,\varrho_2 \mu - 2\,\varrho_3 \nu &= 0 \\ \Theta + a_1 \lambda + 2\,\alpha_2 \mu - 2\,\alpha_3 \nu &= 0 \\ -\alpha_o \Theta + b_1 \lambda + 2\,\beta_2 \mu - 2\,\beta_3 \nu &= 0 \end{aligned}\right\} (41\text{b})$$

Diskussion der Resultate.

Da die Form der Lösung mit jener, die im ersten Abschnitt gefunden wurde, identisch ist, gelten die dort aufgestellten Relationen für die Koefficienten der charakteristischen Gleichung, mit entsprechender Uebertragung, auch hier. Der Koefficient d ist hier immer positiv, also wird stets eine negative reelle Wurzel vorhanden sein. Wir erhalten demnach folgende Hauptbedingungen:

1. Wenn alle Wurzeln reell sind, muss
$$2\,(T_o + T_1) - (2\,\alpha_o - 1)\,T_2 > 0 \text{ sein} \quad . \quad . \quad (42)$$
2. Wenn zwei Wurzeln komplex sind, muss
$$[T_1 T_2 + T_2 T_o + 2\,T_o T_1][2\,T_o + 2\,T_1 - (2\,\alpha_o - 1)\,T_2] - \\ - 2\,(\alpha_o + 1)\,T_o T_1 T_2 > 0 \text{ sein} \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Das Kriterium, ob die Wurzeln reell oder imaginär sind, liefert Ausdruck (19).

Die Hauptfrage, welche hier gestellt werden kann, lautet:

Welche Grösse muss die Reguliergeschwindigkeit erhalten, damit die Regulierung mit abnehmenden Schwankungen stattfinde?

Um diese Frage beantworten zu können, ordnen wir den Ausdruck (43) nach Potenzen von T_o und schreiben

$$F(T_o) = 2\,[2\,T_1 + T_2]\,T_o^2 + [(2\,T_1 + T_o)^2 - 2\,\alpha_o T_2 (3\,T_1 + T_2)]\,T_o + \\ + [(2\,T_1 + T_2) - 2\,\alpha_o T_2]\,T_1 T_2 > 0 \quad . \quad . \quad (44)$$

Denken wir T_1 und T_2 gewählt oder gegeben, so stellt die Relation (44) eine Bedingung dar, welcher T_o genügen muss. Setzen wir

$$F(T_o) = A\,T_o^2 + 2\,B\,T_o + C = 0 \quad . \quad . \quad (45)$$

somit

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\,[2\,T_1 + T_2] \\ 2\,B &= [(2\,T_1 + T_2)^2 - 2\,\alpha_o (3\,T_1 + T_2)] \\ C &= [(2\,T_1 + T_2) - 2\,\alpha_o T_2]\,T_1 T_2 \end{aligned}\right\} \quad (45\text{a})$$

und bezeichnen wir mit T_o' die kleinere, mit T_o'' die grössere der Wurzeln der Gleichung (45), d. h. es sei

$$\left.\begin{aligned} T_o' &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \\ T_o'' &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Die Wurzeln sind reell:

1. $C < 0$; es wird T_o' negativ; T_o'' positiv. Die Funktion $F(T_o)$ ist positiv, wenn T_o entweder kleiner als T_o' oder grösser als T_o'' gewählt wird. Da indessen negative Werte von T_o keinen Sinn haben, bleibt als Bedingung, damit $F(T_o) > 0$ sei, nur
$$T_o > T_o''$$
2. $C > 0$ und $B < 0$. Es werden sowohl T_o' als auch T_o'' positiv, und zwar ersteres, wie man leicht einsieht, im allgemeinen klein. Demnach muss entweder $T_o < T_o'$ oder $T_o > T_o''$ stattfinden.
3. $C > 0$ und $B > 0$. Beide Wurzeln sind negativ, es genügt, wenn $T_o > 0$ ist.

II. Die Wurzeln sind imaginär. Die Funktion $F(T_o)$ wechselt das Zeichen nicht, und da sie für $T_o = \infty$ positiv ist, bleibt sie es für jedes beliebige T_o. Es genügt demnach wieder $T_o > 0$.

Das Vorzeichen der Koefficienten hängt von T_1 und T_2 ab. Wir zerlegen zuerst B in zwei Faktoren und schreiben

$$2\,B = \left[2\,T_1 - \frac{1}{2}\left(3\,\alpha_o + \sqrt{(9\,\alpha_o + 8)\,\alpha_o}\right) T_2\right] \\ \left[2\,T_1 - \frac{1}{2}\left(3\,\alpha_o - \sqrt{(9\,\alpha_o + 8)\,\alpha_o}\right) T_2\right].$$

Der zweite Faktor ist stets positiv, also hängt das Vorzeichen nur vom ersten ab. Dieser selbst nimmt bei Vernachlässigung von 1 neben α_o den Wert

$$2\,T_1 - 3\,\alpha_o T_2$$

an; somit ist ersichtlich, dass

$$B \gtreqless 0 \text{ wird, je nachdem } T_1 \gtreqless 1.5\,\alpha_o T_2 \text{ ist.}$$

Im Ausdrucke für C streichen wir auch 1 neben α_o, dann ergiebt sich $C \gtreqless 0$, je nachdem $T_1 \gtreqless \alpha_o T_2$ ist. A ist stets positiv.

Man überzeugt sich leicht, dass für die zumeist vorkommenden Werte von α_o (etwa 25—100) die Determinante $B^2 - AC$ negativ ist, wenn T_1 zwischen 1.3 bis $1.4\,x\,\alpha_o T_2$ und $1.6 \div 1.75\,\alpha_o T_2$ liegt. Man sieht demnach, dass das Verhältnis von T_1 zu $\alpha_o T_2$ die Natur der Wurzeln bestimmt, und zwar ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

(α) Eine Wurzel ist posit., eine negat., wenn $o < T_1 < \alpha_o T_2$

(β) Beide Wurzeln sind posit., wenn $\alpha_o T_2 < T_1 <$ etwa $1.3\, \alpha_o T_2$

(γ) Beide Wurzeln sind imaginär, wenn $1.3\, \alpha_o T_2 < T_1 <$ etwa $1.7\, \alpha_o T_2$

(δ) Beide Wurzeln sind posit., wenn $1.7\, \alpha_o T_2 < T_1 < \infty$.

Beachten wir nun, dass $T_1 = \alpha_o T_2$ zugleich die minimale Schwungmasse bestimmt, welche bei einer Turbine ohne Windkessel nach Abschnitt I notwendig ist, und bezeichnen wir diese Schwungmasse, wie schon früher, als „normale", so können wir schliesslich die Bedingungen, unter denen $F(T_o) > o$ wird, in folgender Form aussprechen:

1. So lange die Schwungmasse kleiner ist als die „normale" [$T_1 < \alpha_o T_2$] muss die Regulierungsdauer, um zunehmende Schwankungen zu vermeiden, gross gewählt werden [$T_o > T_o''$].

2. Für etwas über der „normalen" liegende Schwungmassengrössen [$\alpha_o T_2 < T_1 < 1.3\, \alpha_o T_2$ bis $1.5\, \alpha_o T_2$] muss die Regulierungsdauer entweder sehr gross [$T_o > T_o''$], oder sehr klein [$T_o < T_o'$] werden. Das zwischen T_o' und T_o'' liegende Intervall entspricht Druck- und Geschwindigkeits-Schwankungen mit zunehmender Amplitude.

3. Bei grossen Schwungmassen [$T_1 > 1.3\, \alpha_o T_o$ bis $1.5\, \alpha_o T_o$] findet trotz noch so kleiner Reguliergeschwindigkeit ein Uebergang mit abnehmenden Schwingungen statt.

Es ist indessen wichtig, zu bemerken, dass **jede Verkleinerung der Reguliergeschwindigkeit mit einer Vergrösserung der grössten vorkommenden Geschwindigkeitsänderung verbunden ist, und zwar auch dann (von einer gewissen Grenze an), wenn der Uebergang ohne periodische Schwingungen vor sich geht.**

Denn denken wir uns die Reguliergeschwindigkeit ungemein klein gewählt, so wird z. B. im Falle einer Entlastung der Leitkanalquerschnitt sehr langsam verengt werden, das Laufrad wird eine beschleunigte Bewegung annehmen, die so lange andauert, bis der, mit wachsender Geschwindigkeit von selbst abnehmende Umfangsdruck, trotz wenig veränderter Wassermenge, dem Widerstande gleich geworden ist. Dieses Gleichgewicht entspricht aber einer prozentischen Steigerung der Umfangsgeschwindigkeit um einen Betrag, der ungefähr gleich ist der prozentischen Aenderung der Belastung. Nun erst wird, dem langsam sich verengenden Kanalquerschnitt entsprechend, die Geschwindigkeit successive abnehmen und der Beharrungszustand sich nach und nach einstellen. Die vorhin angeführten Fälle 1, ferner $T_o > T_o''$ in 2 und Fall 3 bei sehr grossem T_o entsprechen einer derartigen Regulierung; dieselbe wird wegen des grossen Geschwindigkeitssprunges in den meisten Fällen unbrauchbar sein, wenn schon die Schwankungen dabei abnehmen.

Zum Schlusse werde ein praktisch wichtiger Specialfall behandelt, nämlich:

Die offene Turbine.

Bei dieser kann $c_o = o$ gesetzt werden, und es ergiebt sich die charakteristische Gleichung in der Form:

$$T_o T_1 \varphi^2 + (T_o + T_1)\varphi + (\alpha_o + 1) = o \quad . \quad (47)$$

Interesse besitzt bloss die Bestimmung der Geschwindigkeitsschwankung. Sind die Wurzeln von (47) reell, gleich φ_1 und φ_2, so findet man:

$$x = \frac{H}{\alpha_o + 1}\left[1 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} e^{\varphi_1 t} - \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2} e^{\varphi_2 t}\right] . \quad (48)$$

sind hingegen φ_1 und φ_2 komplex, und zwar:

$$\varphi_1 = r + si \qquad \varphi_2 = r - si,$$

so wird

$$x = \frac{H}{\alpha_o + 1}\left[1 + \left\{-\cos(st) + \frac{T_o(r^2 + s^2) + r}{s} \sin(st)\right\} e^{rt}\right] (49)$$

Da die Koefficienten der Gleichung (47) sämtlich positiv sind, werden sowohl die reellen Wurzeln, als auch der reelle Teil der imaginären stets negativ. Der explicite Ausdruck für die Wurzeln lautet:

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{matrix}\right\} = \frac{-(T_o + T_1) \pm \sqrt{D}}{2\, T_o T_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Hierin ist

$$D = (T_o + T_1)^2 - 4(\alpha_o + 1)\, T_o T_1 =$$
$$= [T_o - \{(2\alpha_o - 1) + 2\sqrt{\alpha_o(\alpha_o - 1)}\}\, T_1]$$
$$[T_o - \{(2\alpha_o - 1) - 2\sqrt{\alpha_o(\alpha_o - 1)}\}\, T_1]$$

oder angenähert (da 1 klein ist gegen α_o)

$$D = [T_o - 4\,\alpha_o T_1]\left[T_o - \frac{1}{4\,\alpha_o} T_1\right].$$

Man sieht demnach, dass $D > o$, d. h. dass die Wurzeln reell werden, wenn beide Faktoren positiv, oder beide negativ sind, d. h. wenn

$$\text{entweder } T_o < \frac{1}{4\,\alpha_o} T_1 \text{ oder } T_o > 4\,\alpha_o T_1 \quad . \quad (51)$$

In diesem Falle findet ein Uebergang ohne Schwingung statt; allein es unterscheidet sich, wie schon oben bemerkt, die Regulierung für die Annahme $T_o < \frac{1}{4\,\alpha_o} T_1$ wesentlich von jener, für welche $T_o > 4\,\alpha_o T_1$ ist. Bei ersterer nähert sich x unter allen Umständen ohne Schwankung der Grenze $\frac{H}{\alpha_o + 1}$; bei letzterer wächst x zunächst über $\frac{H}{\alpha_o + 1}$ hinaus, um dann stetig auf diesen Grenzwert abzunehmen. Man kann dies allgemein nachweisen, wie folgt. Berechnen wir aus der Gleichung $\frac{dx}{dt} = o$ jenen Zeitwert t_m, für welchen x in Gleichung (48) zu einem Maximum wird, so erhalten wir

$$t_m = \frac{\log e}{\varphi_1 - \varphi_2} \log \frac{T_o \varphi_2 + 1}{T_o \varphi_1 + 1} \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Hier ist, entsprechend den Gleichungen (50), $\varphi_1 - \varphi_2$ stets positiv; man kann ferner leicht nachweisen, dass

$$\frac{T_o \varphi_2 + 1}{T_o \varphi_1 + 1} \gtrless 1$$

ist, je nachdem $T_o > 4\,\alpha_o T_1$ oder $T_o < \frac{1}{4\,\alpha_o} T_1$ ist; es wird demnach der Logarithmus und damit die Zeit t_o unter denselben Bedingungen positiv oder negativ. Dies bedeutet, dass im Falle $T_o < \frac{1}{4\,\alpha_o} T_1$ das Maximum der Geschwindigkeit für einen negativen Zeitwert stattfindet, also in Wirklichkeit nicht mehr vorkommen wird, während umgekehrt der Fall $T_o > 4\,\alpha_o T_1$ ein Maximum aufweist, aber nur ein einziges. Da dieses Maximum im allgemeinen sehr gross wird, darf die Regulierungsdauer nicht den Wert $4\,\alpha_o T_1$ erreichen. Durch Nachrechnung numerischer Beispiele (unter Benutzung von Gleichung (49)) kann man sich überzeugen, dass die grösste vorkommende Geschwindigkeitsänderung vom Werte $T_o = \frac{1}{4\,\alpha_o} T_1$ an rapid zunimmt, so dass nicht bloss der Wert $T_o = 4\,\alpha_o T_1$ ausgeschlossen erscheint, sondern die Regulierungsdauer noch bedeutend mehr herabgesetzt werden muss. Man hat somit folgendes Schlussresultat:

Bei einer offenen Turbine treten nie Geschwindigkeitsschwankungen mit wachsender Amplitude auf. Bei sehr grosser oder sehr kleiner Regulierungsdauer vollzieht sich der Uebergang überhaupt ohne Schwingungen; allein mit zunehmendem T_o wächst auch der Betrag der grössten vorkommenden Geschwindigkeitsänderung, und es ist deshalb der für diese als zulässig erachtete Grösstwert, welcher das zulässige Maximum der Regulierungsdauer bestimmt. (Schluss folgt.)

Aus der Baugeschichte der Stadt Luzern.

(Mit einer Tafel.)

IV. (Schluss.)

*Das XIX. Jahrhundert.**) Im Laufe der ersten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts hat sich die Stadt Luzern in ihrer

*) Mit dem XVIII. Jahrhundert schliesst der Artikel des Herrn Staatsarchivar *v. Liebenau*. Die folgenden Angaben sind dem Abschnitt der Festschrift: Die Stadt Luzern in der neueren Zeit entnommen.