Einsenkung parabolischer Bogen mit festem Auflager bei constantem $\mathfrak{J}\frac{dx}{ds}$

von *H. Girtanner*, Privatdocent und Assistent am Eidg. Polytechnikum in Zürich.

Wenn sich der Unterzeichnete erlaubt, mit dieser kleinen Arbeit an die Oeffentlichkeit zu treten, so geschieht es mit dem Wunsche, dem einen oder andern Fachgenossen für die Berechnung der Einsenkung bei Belastungsproben einen kleinen Dienst erweisen zu können. Es soll dabei die Einsenkung erst ganz allgemein berechnet und dann sollen hieraus einige practisch wichtige Specialfälle abgeleitet werden. Diese kleine Arbeit schliesst sich innigst an die Abhandlung des Herrn Prof. W. Ritter: „Der Bogen mit festem Auflager" (Zeitschrift für Bauwesen 1876) an. Es beziehen sich die zu gewinnenden Resultate in erster Linie auf Bogen mit parabolischer Axe und constantem $\mathfrak{J}\frac{dx}{ds}$; doch lassen sich dieselben nach ganz kleinen Umrechnungen auch auf andere Bogen mit flacher Krümmung anwenden. Zuerst untersuchen wir die Einwirkung des Momentes M, hierauf diejenige der Axialkraft und zum Schlusse die Einwirkung der Temperaturänderung.

I. Zufällige Belastung.

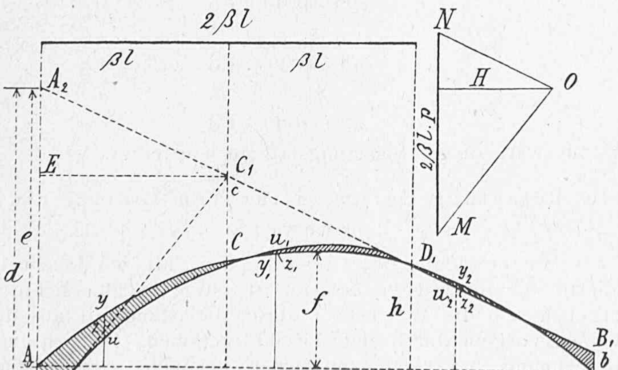
1) Einsenkung in Folge der Wirkung des Momentes M.

Es bezeichne: l die Spannweite des Bogens, f die Pfeilhöhe, $2\beta l$ die belastete Strecke von einem Auflager ausgehend, F den Bogenquerschnitt, $\mathfrak{J}$ das Scheitelträgheitsmoment, p die gleichmässig vertheilte Belastung p. l. m., ε den Elasticitätscoefficienten.

Wir nehmen an, es sei die Strecke $2\beta l$ vom linken Auflager A an gerechnet mit p gleichförmig belastet, wobei β eine Zahl zwischen 0 und $^1/_2$ bedeutet. Nach der oben citirten Arbeit können wir jetzt ohne weiteres die betreffende Drucklinie einzeichnen, da die Richtungen $A_1 C_1$ und $B_1 C_1$ bekannt sind und die Drucklinie der belasteten Strecke eine Parabel sein muss, in A_1 und D_1 an jene Geraden tangirend.

Die Einsenkung wird nun bekanntlich bestimmt durch doppelte Integration der Differentialgleichung der elastischen Linie, welche lautet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{\varepsilon\mathfrak{J}}$$



Bezeichnen wir die Ordinaten der Bogenaxe mit y, diejenigen der Drucklinie mit u und die Abschnitte zwischen beiden mit z, so ist $z = y - u$; ferner nennen wir den vorläufig noch unbekannten Horizontalschub H, so ist nach der Theorie der Drucklinie $M = Hz$. Es lautet somit die Gleichung der elastischen Linie (vgl. Culmann, Graph. Statik II. Aufl. p. 593)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{H}{\varepsilon\mathfrak{J}}\, z \qquad (1)$$

wobei H für einen bestimmten Belastungsfall constant ist.

Um nun z näher zu bestimmen, müssen wir unterscheiden zwischen dem parabelförmigen und dem geradlinigen Theile der Drucklinie und z für jeden besonders ausrechnen. Bezeichnen wir mit x und y die Coordinaten der Axparabel, so lautet ihre Gleichung

$$y = -\frac{4f}{l^2}x^2 + \frac{4f}{l}x$$

wobei man den Coord.-Anfang in A und AB als die positive x Richtung oder aber den Ursprung der Coordinaten in B und BA als positive x Richtung annehmen kann.

Zur Bestimmung der Gleichung des parabelförmigen Theiles der Drucklinie nehmen wir den Coord.-Anfang in A, dann lautet, wenn die Coord. x und u_1 sind, die Gleichung der Parabel

$$u_1 = -a + \frac{a+c}{\beta l}x - \frac{a+e}{4\beta^2 l^2}x^2$$

und es wird daher

$$z_1 = y_1 - u_1 = \frac{a+e-16\beta^2 f}{4\beta^2 l^2}x^2 + \frac{4\beta f - a - c}{\beta l}x + a \qquad (2)$$

Für die Gleichung der Drucklinie des unbelasteten Theiles verlegen wir den Coord.-Anfang nach B, was gestattet ist, da wir beide Gleichungen nie mit einander verbinden werden, sondern jede für sich integriren und die Grenzen dem entsprechend bestimmen. Es lautet daher die Gleichung der Geraden

$$u_2 = \frac{e-b}{l}x + b$$

und daher wird

$$z_2 = y_2 - u_2 = -\frac{4f}{l^2}x^2 + (4f - e + b)\frac{x}{l} - b \qquad (3)$$

Es ist nun nach der oben citirten Arbeit

$$\left.\begin{aligned}
a &= d - e = \frac{(1-2\beta)^3}{\beta(5-15\beta+12\beta^2)}f \\
b &= \frac{2(1-2\beta)^2}{5-15\beta+12\beta^2}f \\
c &= \frac{2(3-8\beta+6\beta^2)}{5-15\beta+12\beta^2}f \\
d &= \frac{1}{\beta(5-15\beta+12\beta^2)}f \\
e &= \frac{2(3-6\beta+4\beta^2)}{5-15\beta+12\beta^2}f
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Bezüglich der Bestimmung dieser Werthe, auf welche wir nicht weiter eingehen können, sei nur angedeutet, dass dieselbe geschieht durch Gleichsetzung der Inhalte, der statischen Momente und endlich der Trägheitsmomente (in Bezug auf die Auflagerverticale A), der Flächen, welche einerseits durch die x Axe und die Bogenaxe, andererseits durch die x Axe und die Drucklinie begrenzt werden.*) Die Werthe (2) und (3) setzen wir in die Differentialgleichung der elastischen Linie ein und integriren sie alsdann, wobei wir für Bogenpuncte, die auf der belasteten Strecke liegen,

*) Vgl. Z. f. B. 1876, pag. 288.