Culmann's Verfahren zur Bestimmung der "Trägheitsmomente zweier Flächen"

Villa der Gräfin Mirafiore in Rom.

Von Architect *Henri Kleffler* in Genf.

Perspectivische Ansicht der Hauptfaçade.

Diese Villa liegt ausserhalb der Porta Pia in Rom in einem Park, der ungefähr 80 Hectaren umfasst. Sie wurde von unserm Collegen H. Kleffler in Genf für den verstorbenen König Victor Emanuel erbaut, der dieselbe der Gräfin Mirafiore zum Geschenk machte. Die letzten Jahre seines Lebens brachte der verstorbene König beinahe ausschliesslich in dieser Villa zu, indem er diesen schönen Privatsitz einem Aufenthalte im Quirinal vorzog. Die Villa war ursprünglich für den damaligen schweizerischen Consul Hotz bestimmt, ging dann in den Besitz eines Herrn Malatesta über, der sie, noch bevor das Gebäude vollständig unter Dach war, an den König verkaufte, welcher schon längst ein Auge auf die schöne Besitzung geworfen hatte. Die Baukosten betrugen ungefähr 450,000 Fr. Ausser dem Hauptgebäude sind noch Stallungen für 40—50 Pferde und Gewächshäuser vorhanden.

Alles Weitere ergibt sich aus den in dieser Nummer enthaltenen Zeichnungen, denen wir in einer spätern Nummer noch eine perspectivische Ansicht einer zweiten Façade nachfolgen lassen werden.

Culmann's Verfahren zur Bestimmung der „Trägheitsmomente zweier Flächen"

v. *K. E. Hilgard*, gew. Assistent für Ingenieurwissenschaften am Eidg. Polytechnikum in Zürich.

Alle, denen es vergönnt war Culmann's Vorlesungen zu hören und ihm etwas näher zu treten, erinnern sich wohl lebhaft, wie dieser hervorragende Mann oft noch knapp vor seiner Vortragsstunde auf irgend einem kleinen Zettelchen schnell einen neuen Gedanken, sei es für eine ganz neue Construction, oder auch nur für die Vereinfachung einer solchen, in wenig Strichen oder Buchstaben niederschrieb und auch gleich zur weitern Ausführung in seinen, mit jedem Semester durch Neuigkeiten bereicherten Vorlesungen in der graphischen Statik benutzte. Zweck dieses Artikels ist denn auch, einen etwas weitern Kreis mit dem *letzten*, auf solche Art entstandenen Producte der regen Geistesthätigkeit unseres leider so früh verstorbenen sel. Meisters Culmann bekannt zu machen; es betrifft einen Gegenstand aus dem Capitel über Trägheitsmomente. — Da genanntes Capitel bereits schon im I. Band der zweiten Auflage von Culmann's graphischer Statik erledigt, demnach in dem hoffentlich in nicht mehr allzuferner Zeit nachfolgenden II. Band, zu dessen Bearbeitung und Herausgabe sich die zwei hervorragendsten ehemaligen Schüler Culmann's entschlossen und geeinigt haben, nicht mehr zur Behandlung kommen wird, glaubte ich um so mehr nachstehende kleine Abhandlung in dieser Weise veröffentlichen zu sollen.

Um nicht allzuweit ausholen zu müssen, stützen wir uns auf folgende bekannte Thatsachen, dass

1) das $\left\{\begin{array}{l}\text{Trägheits-}\\ \text{Centrifugal-}\end{array}\right\}$ moment mehrerer Flächen gleich der Summe der $\left\{\begin{array}{l}\text{Trägheits-}\\ \text{Centrifugal-}\end{array}\right\}$ momente der Einzelflächen in Bezug auf ein und dasselbe Coordinatensystem, dass

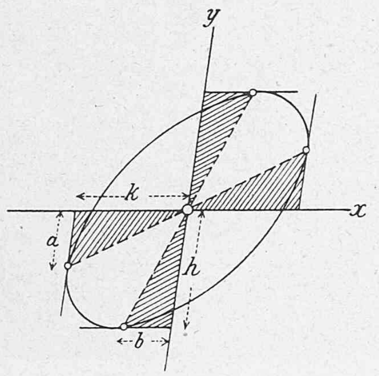
2) beim Uebergang von einem Coordinatensystem zu einem parallel verschobenen sich das

$\left\{\begin{matrix}\text{Trägheits}\\ \text{Centrifugal}\end{matrix}\right\}$ moment ändert um das Product aus Fläche mal $\left\{\begin{matrix}\text{Quadrat des Abstandes}\\ \text{Product der Abstände}\end{matrix}\right\}$ um $\left\{\begin{matrix}\text{welchen die bezügliche}\\ \text{welche die bezüglichen}\end{matrix}\right.$ $\left.\begin{matrix}\text{Axe}\\ \text{Axen}\end{matrix}\right\}$ verschoben, dass

3) das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ einer Fläche gleich dem Product aus Fläche mal Quadrat des Abstandes der zur bezüglichen Trägheitsaxe parallelen Tangente an die Trägheitsellipse von ihrem Mittelpunct ist.

Der unter 3 angeführte Satz ist nichts anderes als eine Specialisirung des allgemeinen Satzes, dass das Centrifugalmoment $\mathfrak{C}$ einer Fläche in Bezug auf ein Coordinatensystem gleich dem Product aus Fläche mal dem Product der Coordinaten des Endpunctes eines Trägheitsellipsendurchmessers ist, der zur einen oder andern Coordinatenrichtung conjugirt läuft, woraus folgt, dass das Centrifugalmoment für bezüglich der Trägheitsellipse conjugirte Durchmesser als Coordinatenaxen gleich 0 ist. (Graphische Statik, I. Bd., pag. 401). Dass diese Sätze direct auch auf die Centralellipse angewendet werden können, ist klar.

Fig. 1.



Also nach Fig. 1 ist $\mathfrak{J}_x = F h^2$; $\mathfrak{J}_y = F k^2$;
$\mathfrak{C} = F . h . b = F . k . a$

Sind S_1 und S_2 die Schwerpuncte zweier Einzelflächen F_1 und F_2, S, der gemeinschaftliche Schwerpunct beider d. h. der Gesammtfläche F, zugleich Ursprung eines Coordinatensystems mit der Verbindungslinie $S_1\ S_2$ als x Axe; — x_1 und $+ x_2$ die Abscissen der Puncte S_1 und S_2 (ihre Ordinaten y_1 und y_2 sind natürlich null), so ist nach dem bereits erwähnten (Fig. 2)

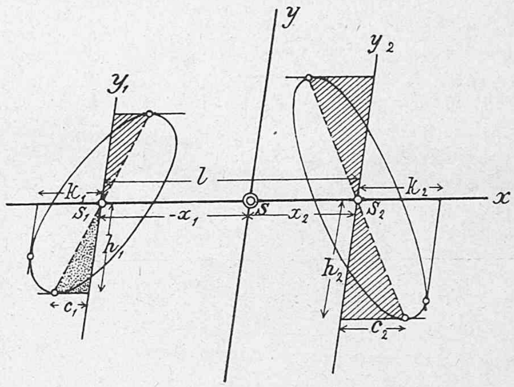
1) $\mathfrak{J}_x = \mathfrak{J}_{x^1} + \mathfrak{J}_{x^2} = h_1^2\ F_1 + h_2^2\ F_2$

2) $\mathfrak{J}_y = \mathfrak{J}_{y^1} + \mathfrak{J}_{y^2} + F_1\ x_1^2 + F_2\ x_2^2 = F_1\ (k_1^2 + x_1^2) + F_2\ (k_2^2 + x_2^2)$

3) $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 = F_1\ (h_1\ c_1) + F_2\ (h_2\ c_2)$,

worin $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ die Trägheitsmomente, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ die Centrifugalmomente der Einzelflächen in Bezug auf ihre eigenen Schwerpunctsaxen bezeichnen, während die in Fig. 2 eingezeichneten Ellipsen die Centralellipsen der beiden Einzelflächen bedeuten. Lassen wir einstweilen die Vorzeichen

Fig. 2.



der in der Figur vorkommenden Grössen unberücksichtigt und setzen die Strecken

$$x_1 + x_2 = l, \text{ so ist, wenn } F_1 + F_2 = F$$

selbstverständlich $\frac{F_1}{x_2} = \frac{F_2}{x_1} = \frac{F_1 + F_2}{x_2 + x_1} = \frac{F}{l}$

$$\text{oder: } F_1 = x_2\ \frac{F}{l} \text{ und } F_2 = x_1\ \frac{F}{l}.$$

Wir setzen nun $\mathfrak{J}_x = F h_s^2$ und $\mathfrak{J}_y = F k_s^2$, worin h_s und k_s sich auf die Centralellipse der Gesammtfläche beziehen, und auf deren Bestimmung wir eben hinzielen. Analog setzen wir $\mathfrak{C} = C_s\ .\ F$.

Die Gleichungen 1—3 erhalten hierdurch folgende Form:

4) $h_s^2\ F = h_1^2\ \frac{x_2}{l}\ .\ F + h_2^2\ \frac{x_1}{l}\ .\ F;$

$$h_s^2 = h_1^2\ \frac{x_2}{l} + h_2^2\ \frac{x_1}{l}$$

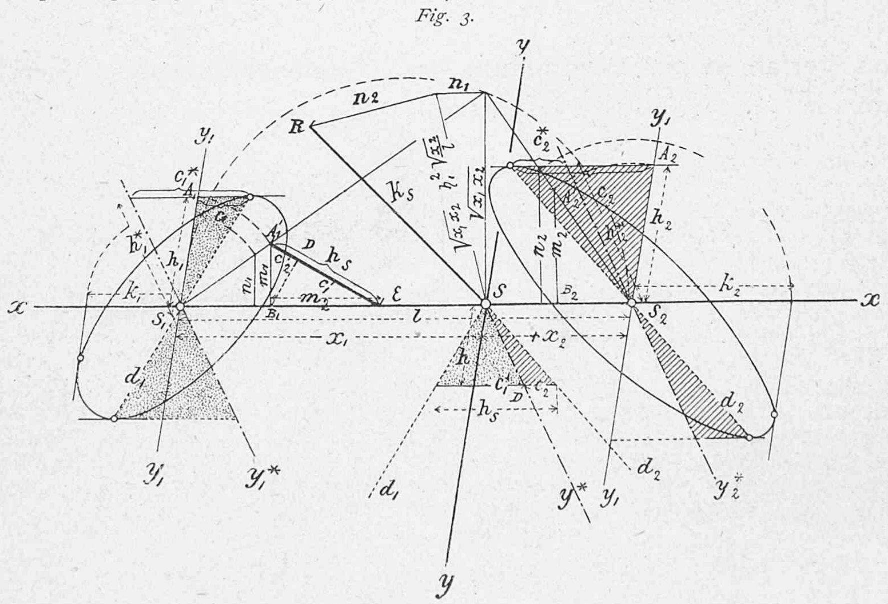
5) $k_s^2\ F = (x_1 + x_2)\ (x_1\ x_2)\ \frac{F}{l} + k_1^2\ \frac{x_2}{l}\ .\ F + k_2^2\ \frac{x_1}{l}\ .\ F;$

$$k_s^2 = (x_1\ x_2) + k_1^2\ \frac{x_2}{l} + k_2^2\ \frac{x_1}{l}$$

6) $C_s\ F = h_1\ c_1\ \frac{x_2}{l}\ .\ F + h_2\ c_2\ \frac{x_1}{l}\ .\ F;$

$$C_s = h_1\ c_1\ \frac{x_2}{l} + h_2\ c_2\ \frac{x_1}{l}$$

Fig. 3.



Nach den einleitenden Erklärungen bedeuten h_s und k_s die in gleicher Richtung wie die h_1, h_2, k_1, k_2 gemessenen Abstände von zu den Coordinatenaxen parallelen Tangenten an die Centralellipse der Gesammtfläche F. Es lässt sich h_s und k_s wie folgt leicht construiren.

Wir bilden (Fig. 3) über $S_1\,S_2$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Rechtwinkelecke senkrecht über S liegt, das also die Höhe $\sqrt{x_1\,x_2}$ besitzt. Auf die Catheten schlagen wir die Grössen h_1 und h_2 herum, so dass A_1 nach A_1', A_2 nach A_2' fällt; die Perpendikel auf die x Axe in den Puncten A' und B' liefern uns dann die Längen $m_1 = A_1'\,B_1$ und $m_2 = A_2'\,B_2$ und es ist

$$\frac{m_1}{h_1} = \frac{\sqrt{x_1\,x_2}}{\sqrt{x_1\,x_2 + x_1^2}} = \sqrt{\frac{x_2}{l}}$$

$$\frac{m_2}{h_2} = \frac{\sqrt{x_1\,x_2}}{\sqrt{x_1\,x_2 + x_2^2}} = \sqrt{\frac{x_1}{l}}$$

und demnach

$$7)\quad \sqrt{h_1^2\frac{x_2}{l} + h_2^2\frac{x_1}{l}} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = h_s = A_1'\,E.$$

Auf ganz analoge Weise finden wir

$$n_1 = k_1\sqrt{\frac{x_2}{l}} \qquad n_2 = k_2\sqrt{\frac{x_1}{l}}$$

und wie leicht aus Fig. 3 erhellt, durch rechtwinkliges Aneinanderfügen von n_1 und n_2 an $\sqrt{x_1\,x_2}$ die Grösse

$$8)\quad k_s = \sqrt{x_1\,x_2 + k_1^2\frac{x_2}{l} + k_2^2\frac{x_1}{l}} = R\,S$$

Durch die Endpuncte der in der Richtung der y Axe von S aus beidseitig aufgetragenen Abstände h_s und der auf der x Axe von S beidseitig aufgetragenen Längen k_s gehen die 2 zu der x Axe resp. y Axe parallelen Tangentenpaare der Centralellipse von F.

Durch eine einfache Betrachtung haben wir es aber in der Hand, sofort auch die Richtung des zur x Axe conjugirten Durchmessers und somit die Ellipse selbst unzweideutig zu bestimmen. Wir gehen dabei von dem Gedanken aus, die y Axe, über deren Richtung keine bestimmte Voraussetzung gemacht war, so zu wählen, dass sie in Bezug auf die Centralellipse der Gesammtfläche zur x Axe conjugirt ist.

Fällen wir nämlich von B_1 das Perpendikel auf $A_1'\,E$, so wird letztere Linie in die Strecken c_1' und c_2' getheilt und es ist also $c_1' + c_2' = h_s$.

Aus dem Dreieck $A_1'\,B_1\,E$ folgt ferner

$$(c_2')^2 + c_2'\,.\,c_1' = m_1^2 = c_2'\,.\,h_s$$

$$\text{und da } m_1 = h_1\sqrt{\frac{x_2}{l}}$$

$$9)\quad c_2' = \frac{h_1^2\,x_2}{l\,h_s} \text{ und analog } c_1' = \frac{h_2^2\,x_1}{l\,h_s}$$

Wir tragen nun in S die beiden Richtungen der in den Einzelellipsen zur x Axe conjugirten Durchmesser d_1 und d_2 auf und theilen den so erhaltenen Winkelraum im Verhältniss von $c_2' : c_1'$, indem wir mit der Grösse $c_1' + c_2'$ parallel zur x Axe hineinfahren und im Abstande h die nöthige Winkelöffnung finden. Die Richtung des so erhaltenen Theilstrahles $S\,D$ wollen wir nun als neue y Axe einführen und mit $y^\bullet$ bezeichnen. Uebertragen wir ihre Richtung in die Einzelellipsen, so erhalten wir an Stelle der frühern Coordinaten $h_1\,c_1$, $h_2\,c_2$ der Endpuncte der Durchmesser d_1 und d_2, bezüglich S_1 und S_2 als Ursprung, die neuen Coordinaten $c_1^\bullet\,h_1^\bullet$, $c_2^\bullet\,h_2^\bullet$ und es gehen die Einzelcentrifugalmomente über in

$$10)\quad \mathfrak{C}_1^\bullet = h_1^\bullet\,c_1^\bullet\,F_1 \text{ und } \mathfrak{C}_2^\bullet = h_2^\bullet\,c_2^\bullet\,F_2.$$

Das Richtungsverhältniss beider Axen y zu $y^\bullet$ sei durch die Grösse τ bestimmt so dass $h_1^\bullet = h_1\tau$, also auch $h_2^\bullet = h_2\tau$.

Aus der Figur folgt nun direct

$$\frac{c_1^\bullet}{h_1} = \frac{c_1'}{h} \text{ oder } c_1' = \frac{c_1^\bullet\,.\,h}{h_1} \text{ und}$$

$$\frac{c_2^\bullet}{h_2} = \frac{c_2'}{h} \text{ oder } c_2' = \frac{c_2^\bullet h}{h_2}; \text{ es war aber nach 9)}$$

$$c_1' = \frac{h_2^2 x_1}{l\,h_s} = \frac{c_1^\bullet h}{h_1} \text{ und}$$

$$c_2' = \frac{c_2^\bullet h}{h_2} = \frac{h_1^2 x_2}{l\,h_s}$$

Wenn wir die beiden letzteren Gleichheiten mit einander multipliciren so erhalten wir

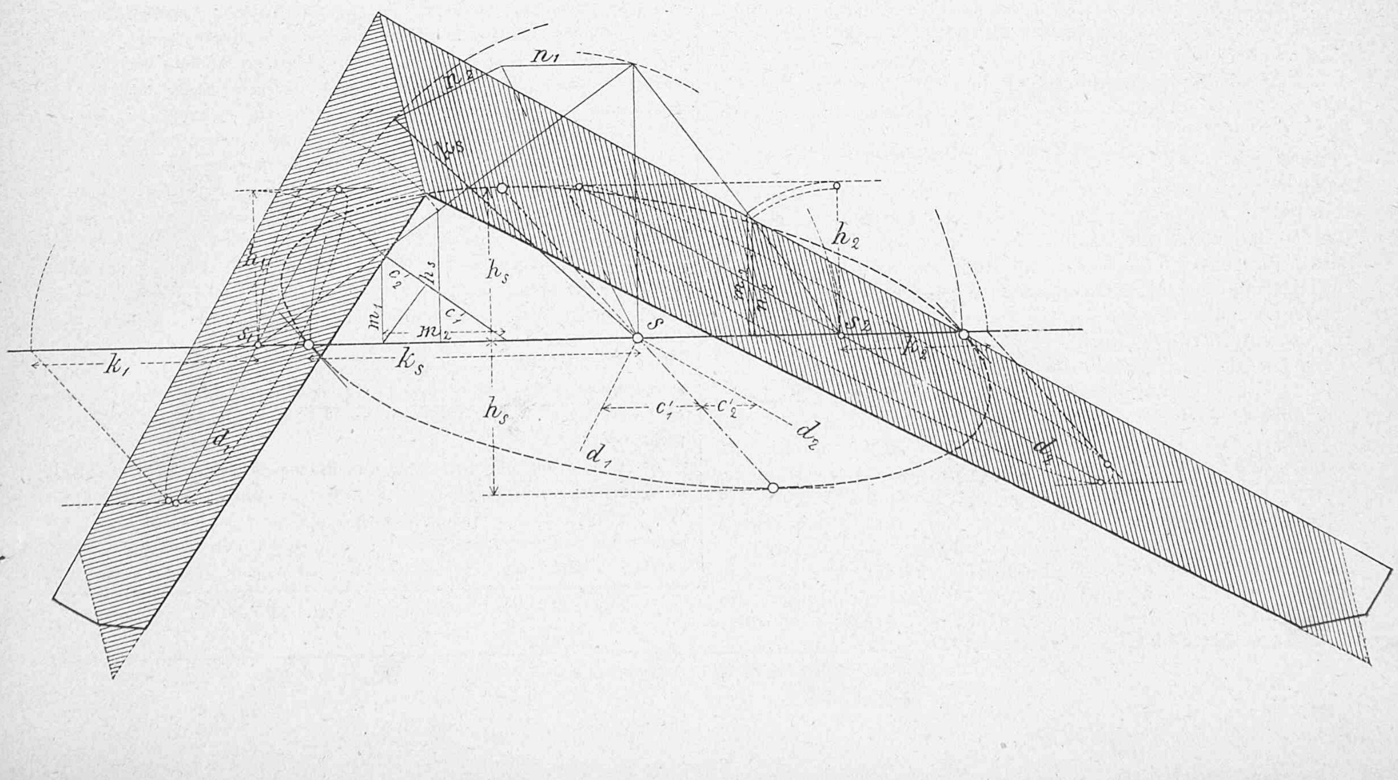
$$\frac{h_2^2 x_1}{l\,h_s}\,.\,\frac{c_2^\bullet h}{h_2} = \frac{c_1^\bullet h}{h_1}\,.\,\frac{h_1^2 x_2}{l\,h_s} \text{ oder}$$

$$11)\quad h_2\,x_1\,c_2^\bullet = c_1^\bullet\,x_2\,h_1$$

oder wenn wir nun die Gleichung 11) mit τ multipliciren

$$12)\quad h_2^\bullet\,x_1\,c_2^\bullet = h_1^\bullet\,x_2\,c_1^\bullet.$$

Fig. 4.



Wir haben bis jetzt nur die absoluten Werthe der Strecken x_1 und x_2 betrachtet. Mit Berücksichtigung des Zeichens schreibt sich Gleichung 6) bezüglich der neuen y^* Axe

$$\mathfrak{C} = C; F = l_1^* c_1^* \frac{x_2 . F}{l} - l_2^* c_2^* \frac{x_1 . F}{l}$$

Da aber nach Gleichung 12) die absoluten Werthe der beiden Glieder auf der rechten Seite einander gleich sind, so ist bezüglich dieser neuen y^* Axe

$$\mathfrak{C} = C F = 0$$

d. h. die x *Axe* und die y^* *sind conjugirt.* Damit ist an Hand der Figur 3 auch sogleich einleuchtend, dass die in der Gesammtcentralellipse zur x Axe conjugirte Richtung in Folge der ungleichen Vorzeichen der Coordinaten x_1 und x_2 immer zwischen den beiden in den Einzelcentralellipsen conjugirten Ellipsen liegen muss, und sind aus diesem Grunde zur Verdeutlichung auch die von der y^* Axe weg zu messenden Dreiecke $y_1^* d_1$ und $y_2^* d_2$ als negative und positive Flächen punctirt resp. schraffirt. Bezüglich des Theilens des Winkelraumes im Verhältniss $c_1' : c_2'$ kann kein Zweifel obwalten, da von y^* aus c_1' nach derselben Seite zu messen ist wie das zu seiner Construction als eine der Ausgangsgrössen dienende x_1, also ist analog c_2' nach der Seite von x_2 zu messen.

Durch die Schnittpuncte mit der y^* Axe sind nun die Berührungspuncte der beiden Tangenten an die Gesammtcentralellipse im Abstande h_s, und somit die Ellipse selbst mehr als eindeutig bestimmt. Um das Trägheitsmoment für irgend eine beliebige Axenrichtung zu haben, braucht man nur das Quadrat des Abstandes einer parallelen Tangente an die Centralellipse vom Schwerpunct mit $(F_1 + F_2)$ zu multipliciren.

Abgesehen davon, dass diese directe Construction der beiden conjugirten Durchmesser der Gesammtcentralellipse theoretisch recht einfach ist, mag sie auch manchmal von practischem Werth sein.

Wir haben bei dieser Behauptung hauptsächlich diejenigen unsymmetrischen Querschnitte im Auge, die sich, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, in 2 Flächen zusammenfassen lassen. Im Folgenden soll denn auch die Anwendung dieser mitgetheilten Construction auf ein ungleichschenkliges Winkeleisen noch kurz erläutert, und auf die dabei mögliche Vereinfachung hingewiesen werden. Nach Angabe der Schraffur wird der Querschnitt in die 2 Einzel-Flächen getheilt. Nachdem die Einzelcentralellipsen nach dem in Culmann's graph. Statik I. Bd., pag. 442—444 beschriebenen graphischen oder besser rechnerischen Verfahren eingetragen, — für den Fall der Praxis genügt wohl immer ein Einzeichnen nach Gefühl, in dem bei solchen Trapezen eine starke Abweichung von der wirklichen Ellipse gar nicht möglich — der Schwerpunct aus dem Verhältniss der Strecken $\frac{S S_1}{S S_2} = \frac{F_2}{F_1}$ bestimmt, vollführen wir genau die im vorigen erklärte Construction, nur wählen wir der grössern Einfachheit halber die erste y Axe normal zur Linie $S_1 S_2$, messen also h_1 und h_2, somit auch h_s als senkrechte Abstände der Parallеltangenten; nun bestimmen wir *sofort* die zu $S_1 S_2$ conjugirte Richtung und erhalten dann durch die zu ihr parallelen Tangenten an die Einzelellipsen diejenigen Strecken k_1 und k_2, die uns durch die weitere Verwendung in der angegebenen Weise sofort die Länge des Durchmessers in der x Axe geben. Wir erhalten dadurch auf einfacher Weise 2 *conjugirte* Tangentenpaare und sofort alle 4 Berührungspuncte, womit wir die ganze Ellipse genügend genau einzuzeichnen im Stande sind. Erlauben wir uns, die in *Fig. 4* mit allen erforderlichen Linien angegebene Construction nur angenähert genau zu vollführen, indem wir nur mit freier Hand skizzirend construiren, so kommen wir wohl auf ein Resultat von ungefähr gleicher Genauigkeit, wie wenn wir uns bei der rechnerischen Bestimmung des Trägheitsmomentes die übliche und practisch zulässige Annäherung gestatten. Handelt es sich um eine Trägheitsaxe, die parallel ist zu einem der beiden Winkelschenkel, so wird auch der Zeitaufwand ungefähr der gleiche sein. Ist jedoch die Richtung der Axe, auf die wir das Trägheitsmoment beziehen, eine beliebige, ein Fall der immerhin etwa vorkommen mag, so führt die im obigen erläuterte constructive Methode mit Hülfe der Centralellipse entschieden am raschesten zum Ziel.

Miscellanea.

Eisenbahnbau in Frankreich. Die grossartigen Eisenbahn- und Canalbauten, welche auf Betreiben des früheren Ministers Freycinet vor einigen Jahren begonnen worden sind, und für welche programmmässig 5 bis 6 Milliarden Franken verwendet werden sollten, werden unter dem Einfluss einer ungünstiger gewordenen Finanzlage vom Lande sehr drückend empfunden, so dass man nach Mitteln sucht, die Last entweder abzuwälzen oder doch erheblich zu verringern. Insbesondere wird dabei auf die Hülfe der bestehenden 6 grossen Eisenbahngesellschaften gerechnet; diese will man mit der Vollendung der theils begonnenen, theils noch projectirten 15 000 *km* neuer Eisenbahnen belasten, indem man ihnen vertragsmässig die Pflicht zuweist, ihre Ueberschüsse in den Bau dieser Bahnen zu stecken und zwar in der Form von Zinsen für neu aufzunehmende Baucapitalien. Ein Correspondent der „N. Fr. Pr." rechnet nun heraus, dass diese Ueberschüsse in den nächsten Jahren etwa 4 bis 5 Millionen Franken betragen werden — ausreichend zur Verzinsung von etwa 100 Millionen Baucapital. Hierfür würden pro Jahr höchstens 400 *km* neuer Eisenbahnen erbaut werden können, d. h. nur ein Bruchtheil von dem, was nach dem Plane von Freycinet geschaffen werden sollte.

Concurrenzen.

Concurrenz zur Erlangung von Plänen für den Bau einer Wahl- und Tonhalle in St. Gallen. Wir erhalten soeben von dem bezüglichen Initiativcomite die Concurrenzbedingungen und das Bauprogramm nebst einem Situationsplan des Bauplatzes im Masstab von 1:500 für die projectirte Wahl- und Tonhalle. Aus den Concurrenzbedingungen heben wir Folgendes hervor: Die Concurrenten haben sich streng an das Bauprogramm zu halten. Jedes Project soll enthalten: Einen Situationsplan im Masstab von 1:500, Grundrisse sämmtlicher Stockwerke, incl. Kellergeschoss im Masstab 1:200, zwei Façaden und mindestens zwei Schnitte im Masstab 1:100, ein Detailblatt und eine summarische Kostenberechnung. Die Beurtheilung der Projecte erfolgt durch eine Jury von sieben Mitgliedern, bestehend aus den Herren Director Baumann, Präsident des Initiativcomites, Cantonsbaumeister Gohl, Architect Pfeiffer, Ingenieur Dardier in St. Gallen, ferner aus den Herren Professor Bluntschli und Architect Albert Müller, Director des Gewerbemuseums in Zürich und Professor Durm in Karlsruhe. Für die Prämiirung der drei besten Projecte steht eine Summe von 3500 Fr. zur Verfügung mit der Bestimmung, dass für einen ersten Preis mindestens 2000 Fr. ausgeworfen werde. Der Termin für die Einlieferung der Projecte geht mit dem 2. September dieses Jahres zu Ende. Dieselbe hat an Herrn Ingenieur Dardier in St. Gallen zu erfolgen. Die eingelieferten Arbeiten werden während 14 Tagen öffentlich ausgestellt und das Urtheil des Preisgerichtes wird später ebenfalls öffentlich mitgetheilt werden. Die preisgekrönten Entwürfe gehen in das Eigenthum des Initiativcomite's über. Programme und Situationspläne können beim Präsidenten des Initiativcomite's, Herrn Dr. Baumann in St. Gallen bezogen werden. Wir stehen nicht an, diese Concurrenz, als mit den vom schweizerischen Ingenieur- und Architecten-Verein aufgestellten Normen im Grossen und Ganzen übereinstimmend, unsern Fachgenossen zu empfehlen.

Concurrenz zur Erlangung von Plänen für einen Conferenz-Saal in Neuenburg. Bei dieser Concurrenz, deren Programm uns bedauerlicher Weise nicht zukam, erhielten den ersten Preis Herr Eduard Colin, Architect der Société technique in Neuenburg, und den zweiten Preis „ex aequo" die HH. Architecten A. Rychner und William Major ebendaselbst.

Redaction: A. WALDNER.
Claridenstrasse 30, Zürich.

Druck von H. Zürcher in Hottingen.