

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	94 (1976)
Heft:	35
Artikel:	Beitrag zur praktischen Berechnung von Durchbiegungen am Eisenbetonträger mit Rechteckquerschnitt
Autor:	Aschwanden, A. / Snozzi, E.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-73155

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Deutung der Ergebnisse

Kleine Emme

Im Beobachtungszeitraum von 18 bis 37 Jahren sind keine trendmässigen Änderungen nachzuweisen. Die relativ mässigen baulichen Veränderungen, beschränkt auf Hochbau und Verkehrswege, hielten in diesem vergleichsweise kleinen Einzugsgebiet (rund 500 km²) das hydrologische Gleichgewicht stationär.

Glatt

In diesem Gebiet (rund 300 km²) mit reger Bautätigkeit zeigt sich für alle Werte in den letzten 18 bzw. 23 Jahren eine Abflusszunahme von durchschnittlich 1 bis 2%/Jahr.

Die Zunahme der Niederwasser ist unerwartet, da sich mit zunehmender Überbauung die Grundwasserträger weniger stark auffüllen und somit in Trockenperioden auch weniger an das Gewässer abgeben. Als mögliche Erklärung für den Anstieg der Wassermengen kommt die «Einfuhr» von Trinkwasser aus anderen Einzugsgebieten in Betracht (Zürichseewasser, Grundwasser von der Hard).

Rhone

In allen Fällen werden in diesem 5220 km² grossen Gebiet leichte Trends festgestellt, während die Mittelwasser fallen, steigen die NNQ, NQ⁹⁰ und NQ⁹⁵.

Der Anstieg der Niederwassermengen lässt sich durch den Bau der Stauräume im Wallis erklären. Speicher gleichen Abflussganglinien aus. Getrennte Trendanalysen für die Jahre

1913 bis 1943 und 1944 bis 1974 bestätigen diese Ansicht. Die NNQ vor 1943 steigen kaum ($r = 0,05$). Nach 1943 hingegen nehmen sie im Durchschnitt jährlich um 1% zu ($r = 0,5$, $\alpha = 1\%$). Auch die Mittelwerte für die Perioden vor und nach 1943 sind signifikant voneinander verschieden. Seit 1955 sind NQ⁹⁰ und NQ⁹⁵ durchschnittlich um 2 bis 3% gestiegen ($r = 0,6$). Die Darstellung der Trendgeraden mit den Beobachtungswerten und Vertrauensgrenzen findet man in den Bildern 2 und 3. Das Fallen der Mittelwasser könnte mit abnehmender Ablation der Gletscher in Zusammenhang gebracht werden.

Rhein

Keine Anzeichen von Trend zeigen MQ, NQ⁹⁰ und NQ⁹⁵. Die Niedrigstwasserwerte deuten auf eine leichte Abnahme, welche statistisch aber nicht gesichert ist. Die Abflussverhältnisse erscheinen somit für die letzten 18 bis 37 Jahre als stationär.

Die baulichen Auswirkungen in dem rund 36000 km² grossen Einzugsgebiet (Kraftwerke, Verkehrsnetz, Hochbauten, Skipisten, Bachregulierungen) werden vermutlich durch den Bodensee so stark gedämpft, dass sie nicht mehr nachweisbar sind.

Adresse des Verfassers: PD Dr. P. Widmoser, Institut für Kultutechnik der ETH Zürich, derzeit Assoc. Prof. am Civil Engineering Dept., Universität Dar es Salam, P. O. Box 35 131, Tanzania.

Beitrag zur praktischen Berechnung von Durchbiegungen am Eisenbetonträger mit Rechteckquerschnitt

Von A. Aschwanden und E. Snozzi, Zürich

DK 624.072.2

1. Einleitung

Im Gegensatz zur alten Norm weist die heute gültige Norm SIA 162 (1968) auf die Bedeutung der Verformungen auch an Eisenbetonquerschnitten hin. So fordert sie u.a., dass die auftretenden Verformungen, unter Berücksichtigung der Kriech- und Schwindeinflüsse, sowie der Verminderung der Biegesteifigkeit im Stadium II, keine nachteiligen Einflüsse auf die Konstruktion haben dürfen. Bedenkt man zudem, dass mit der gültigen Norm höhere Stahl- und Betonspannungen zugelassen sind als früher und damit auch schlankere Konstruktionen zur Anwendung gelangen, erkennt man ohne weiteres die erhöhte Bedeutung der Verformungen.

Für die Berechnung dieser Verformungen steht uns eine Fülle von Literatur zur Verfügung. Allerdings setzt deren Studium oft eine zeitraubende Auseinandersetzung mit diesem Thema voraus. Ziel dieses Beitrages ist es, bestehende Theorien so zusammenzufassen und zu vereinfachen, dass es ohne grossen Zeitaufwand möglich sein sollte, einigermassen verbindliche Angaben über die Durchbiegungen einer Eisenbetonkonstruktion zu erhalten. Die Grundlagen für diesen Beitrag stammen aus [1] und [2].

2. Grundlegende Ansätze

Die anfänglichen bzw. nachträglichen Durchbiegungen eines Eisenbetonträgers werden in allgemeiner Form mit folgendem Ansatz erfasst:

$$(1) \quad f_t = f_t^I + \alpha (f_t^{II} - f_t^I)$$

Der Index t zeigt den Zeitpunkt an. Also z.B.:

f_0 Durchbiegungen im Zeitpunkt $t = 0$, also ohne Einflüsse von Kriechen und Schwinden.

f_∞ Durchbiegungen im Zeitpunkt $t = \infty$, also nach erfolgtem Kriechen und Schwinden.

Die Grössen f_t , f_t^I und f_t^{II} bedeuten:

f_t totale Durchbiegungen im Zeitpunkt t

f_t^I totale Durchbiegungen des Trägers im ungerissenen Stadium im Zeitpunkt t

f_t^{II} totale Durchbiegungen des Trägers im gerissenen Stadium im Zeitpunkt t .

Der Faktor α berücksichtigt die Ausdehnung der Risszonen in der Längsachse des Trägers. α nimmt somit einen Wert zwischen 0 (der Träger wäre dann in keinem einzigen Querschnitt gerissen) und 1 (der Träger wäre in sämtlichen Querschnitten gerissen) an.

Damit wird also für:

$$\alpha = 0 \text{ (ungerissener Träger): } f_t = f_t^I$$

$$\alpha = 1 \text{ (voll gerissener Träger): } f_t = f_t^{II}$$

$$f_t = f_t^I + \alpha (f_t^{II} - f_t^I) = f_t^{II}$$

Zwecks späterer Vereinfachung der Formeln wird mit dem Ansatz:

$$(2) \quad s_t = f_t^{II}/f_t^I$$

Gleichung (1) auf die Form

$$(3) \quad f_t = [1 + \alpha (s_t - 1)] f_t^I \text{ gebracht.}$$

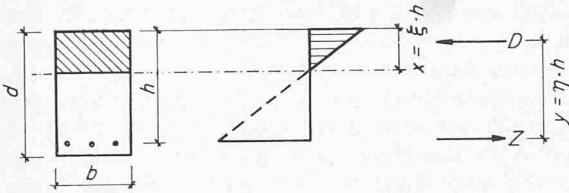


Bild 1

3. Berechnung der Durchbiegungen im Stadium I und II

3.1 Durchbiegungen im Stadium I

Setzt man die Kenntnis der Durchbiegungen eines homogenen Betonträgers mit Rechteckquerschnitt als bekannt voraus, lassen sich diese für den entsprechenden Eisenbetonträger in erster Näherung wie folgt darstellen:

$$(4) \quad f_{el}^I \cong f^H \quad \text{rein elastische Durchbiegungen}$$

$$(5) \quad f_K^I \cong \varphi f^H \quad \text{Durchbiegungen infolge Kriechen}$$

$$(6) \quad f_S^I \cong 0 \quad \text{Durchbiegungen infolge Schwinden.}$$

(f^H bedeutet hier die Durchbiegung am homogenen Betonträger, φ steht für die Kriechzahl.)

Die in den Ansätzen (4), (5), (6) vorhandenen Ungenauigkeiten röhren lediglich von der Inhomogenität des Eisenbetonquerschnitts (F_e) und der damit verbundenen Exzentrizität des Schwerpunktes im Eisenbetonquerschnitt her. In diesen praxisbezogenen Betrachtungen spielen diese Ungenauigkeiten jedoch nur eine untergeordnete Rolle.

Mit den Gleichungen (4), (5), (6) ergibt sich:

$$(7) \quad t = 0 \quad f_0^I = f^H$$

$$(8) \quad t = \infty \quad f^{\infty I} = (1 + \varphi) f^H$$

3.2 Durchbiegungen im Stadium II

3.2.1 Biegesteifigkeit im Stadium II nach Leonhardt (Bild 3)

F. Leonhardt führt für die Biegesteifigkeit des gerissenen Eisenbetonquerschnitts folgenden Ausdruck ein:

$$(9) \quad (EJ)_t^{II} = 1/2 E_{bt} \cdot b \cdot x_t^2 \cdot y_t$$

Hier bedeuten:

$(EJ)_t^{II}$ Biegesteifigkeit des Querschnitts im gerissenen Stadium im Zeitpunkt t ; b Balkenbreite des Querschnitts; x Höhe des Druckkeils; y innerer Hebelarm des Querschnitts.

Mit: E_{bt} E-Modul des Betons im Zeitpunkt $t = 0$; E_b E-Modul des Betons im Zeitpunkt $t = \infty = E_{bt}/(1 + \varphi)$ wird somit:

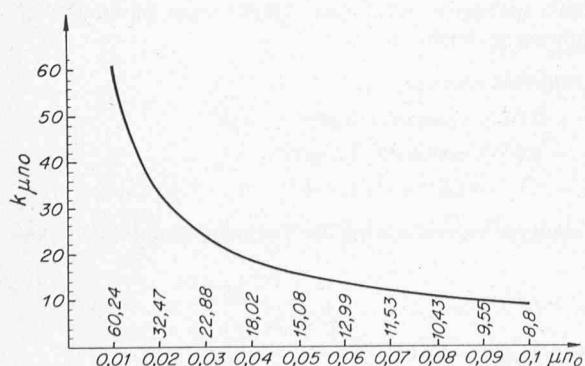


Bild 2

$$(10) \quad (EJ)_0^{II} = \frac{1}{2} E_{bo} b x_0^2 y_0$$

$$(11) \quad (EJ)^{\infty II} = \frac{1}{2} \frac{E_{bo}}{(1 + \varphi)} b x^{\infty 2} y^{\infty}$$

3.2.2 Durchbiegungen im Stadium II

3.2.2.1 Elastische Durchbiegungen f_{el}^{II}

Setzt man über die gesamte Balkenlänge einen konstanten Armierungsgehalt voraus (vergl. Kap. 3.2.2.5) und nimmt weiter an, dass sämtliche Querschnitte des Balkens gerissen seien, findet man aus der Arbeitsgleichung

$$(12) \quad f_{el}^{II} = \int_1^L \frac{MM}{(EJ)_0^{II}} dx = \frac{(EJ)^H}{(EJ)_0^{II}} \cdot f^H$$

Unter Verwendung von Gleichung (10) und mit der Abkürzung

$$k\mu_{no} = 1/\xi_0^2 \eta_0$$

wird dann:

$$(13) \quad f_{el}^{II} = \frac{1}{6} k\mu_{no} \left(\frac{d}{h} \right)^3 \cdot f^H$$

Als einziger relevanter Parameter tritt in Gl. (13) der Faktor $k\mu_{no} = 1/\xi_0^2 \eta_0$. Nimmt man vereinfachend an, dass der Armierungsgehalt der Biegedruckzone $\mu' = 0$ sei, so ist dieser Faktor einzig abhängig vom Produkt $\mu \cdot n_0$, wo μ den Armierungsgehalt und n_0 das Verhältnis der E-Moduli von Stahl und Beton angibt (vgl. Gleichung aus der Festigkeitslehre für die Lage der neutralen Achse: $\xi^2 + 2n\mu\xi - 2n\mu = 0$ und $\eta = 1 - \xi/3$).

Um einen Aufschluss über die Größenordnung der elastischen Durchbiegungen im Stadium II zu erhalten (Voraussetzung: Der Träger ist auf seiner ganzen Länge gerissen), setze man:

$$n_0 = E_e/E_{bo} \cong 5$$

$$\mu = 0,80\%$$

$$(\text{d.h. } \sigma_b \cong 120 \text{ kg/cm}^2 \text{ und } \sigma_e \cong 2400 \text{ kg/cm}^2)$$

$$d/h = 1,10$$

Damit wird

$$\mu \cdot n_0 = 0,80 \cdot 10^{-2} \cdot 5 = 4,00 \cdot 10^{-2} \text{ und}$$

$$f_{el}^{II} = \frac{1}{6} \frac{1}{0,246^2 \cdot 0,918} \cdot (1,10)^3 f^H = 4,00 f^H$$

Der Faktor $k\mu_{no}$ lässt sich wie folgt in Funktion von $\mu \cdot n_0$ darstellen (Bild 2).

Diese Funktion lässt sich durch den hyperbolischen Ansatz:

$$k\mu_{no} = 0,627/\mu n_0 + 2,34$$

sehr gut annähern. Die Abweichungen betragen:

$$\mu n_0 = 0,01 \quad \Delta = + 8,0\%$$

$$\mu n_0 = 0,04 \quad \Delta = \pm 0,0\%$$

$$\mu n_0 = 0,10 \quad \Delta = - 2,8\%$$

Mit dieser numerischen Näherung wird Gleichung (13) zu:

$$(14) \quad f_{el}^{II} = \frac{1}{6} \left(\frac{0,627}{\mu n_0} + 2,34 \right) \left(\frac{d}{h} \right)^3 f^H$$

3.2.2.2 Durchbiegungen infolge Kriechen f_K^{II}

Mit der Gleichung

$$(15) \quad f_K^{II} = f_{el}^{II+K} - f_{el}^{II} = \left[\frac{(EJ)^H}{(EJ)^{\infty II}} - \frac{(EJ)^H}{(EJ)_0^{II}} \right] f^H$$

findet man unter denselben Voraussetzungen wie in Kap. 3.2.2.1

$$(16) \quad f_{K^{II}} = 1/6 [(1 + \varphi) k_{\mu n \varphi} - k_{\mu n_0}] (d/h)^3 \cdot f^H$$

Hier bedeutet $k_{\mu n \varphi} = 1/\xi \infty^2 \cdot \eta \infty$, ist also eine Funktion von $\mu n \varphi$ oder, was gleichbedeutend ist, von $\mu \cdot n_0 (1 + \varphi)$.

Für die Funktion $k_{\mu n \varphi} = 1/\xi \infty^2 \cdot \eta \infty$ kann dieselbe numerische Ansatz wie für $k_{\mu n_0}$ verwendet werden, wobei deren Bereich etwas ausgedehnt wird. Die Abweichung wird bei $\mu n \varphi = \mu n_0 (1 + \varphi) = 0,30$ wieder zu $\pm 0,0\%$. Man erhält so:

$$(17) \quad f_{K^{II}} = 1/6 \cdot 2,34 \cdot \varphi (d/h)^3 \cdot f^H$$

Um wiederum die Größenordnung dieses Ausdrucks abzuschätzen (Voraussetzung immer noch: Der Träger ist auf seiner gesamten Länge gerissen) setze man:

$$\varphi = 2,5$$

$$d/h = 1,10$$

Damit wird:

$$f_{K^{II}} = 1/6 \cdot 2,34 \cdot 2,5 \cdot (1,10)^3 \cdot f^H = 1,30 \cdot f^H$$

Man sieht also, dass der Teileinfluss des Kriechens im Stadium II geringer ist als im Stadium I.

3.2.2.3 Durchbiegungen infolge Schwinden f_s^{II}

Unter der von Leonhardt getroffenen Annahme, dass die Schwinddurchbiegungen proportional denjenigen unter äusserer Belastung sind, findet man mit dem Grundansatz

$$(18) \quad \frac{1}{\varrho_s} = \frac{\varepsilon_s}{h}$$

die Formel:

$$(19) \quad f_s = \frac{\varepsilon_s}{h} \frac{(EJ)^H}{M_{\max}} \cdot f^H$$

und daraus durch weitere Umformungen:

$$(20) \quad f_s = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\mu n_0} \cdot \varepsilon_s \cdot \frac{E_e}{\sigma_e \cdot \eta} \left(\frac{d}{h} \right)^3 \cdot f^H$$

Für die Praxis können, ohne grosse Fehler auf die Gesamtdurchbiegungen, folgende numerischen Ansätze getroffen werden:

$$\varepsilon_s = 0,2$$

$$E_e = 2100000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = 2400 \text{ kg/cm}^2$$

$$\eta = 0,9$$

Damit wird

$$(21) \quad f_s^{II} = \frac{1}{6} \cdot \frac{0,097}{\mu n_0} \left(\frac{d}{h} \right)^3 \cdot f^H$$

Um wiederum die Größenordnung abzuschätzen, setze man:

$$\mu n_0 = 4,00 \cdot 10^{-2}; d/h = 1,10$$

und es wird:

$$f_s^{II} = \frac{1}{6} \cdot \frac{0,097}{0,04} \left(1,10 \right)^3 \cdot f^H = 0,54 \cdot f^H$$

Man sieht, dass dieser Wert, gegenüber den in Kap. 3.2.2.1 und 3.2.2.2 berechneten, deutlich zurücksteht, und dass somit allfällige Fehler in den numerischen Ansätzen nur einen unbedeutenden Einfluss auf die Gesamtdurchbiegungen ausüben.

3.2.2.4 Gesamtdurchbiegungen

Die oben berechneten Teileinflüsse lassen sich nun, immer unter der Voraussetzung, dass sämtliche Querschnitte des Balkens gerissen seien, wie folgt zu den Gesamtdurchbiegungen zusammensetzen.

$$(22) \quad f_0^{II} = f_{el^{II}} = \frac{1}{6} \left(\frac{0,627}{\mu n_0} + 2,34 \right) \left(\frac{d}{h} \right)^3 \cdot f^H$$

$$(23) \quad f_{\infty^{II}} = f_{el^{II}} + f_{K^{II}} + f_s^{II} = \frac{1}{6} \left[\frac{0,724}{\mu n_0} + 2,34 (1 + \varphi) \right] \left(\frac{d}{h} \right)^3 \cdot f^H$$

Mit $\mu n_0 = 4,00 \cdot 10^{-2}$ ($\mu = 0,80\%$; $n_0 = 5$); $d/h = 1,10$; $\varphi = 2,50$

wird damit:

$$f_0^{II} = 4,00 \cdot f^H \text{ und } f_{\infty^{II}} = 5,84 \cdot f^H$$

3.2.2.5 Ergänzende Bemerkung zum Armierungsgehalt

Gleichungen (22) und (23) geben in einfacher Form die Durchbiegungen eines Eisenbetonträgers mit gerissenem Querschnitt über die gesamte Trägerlänge an. Hierbei tritt als wesentlicher Parameter einzig der Armierungsgehalt auf. Da nun im allgemeinen der Armierungsgehalt über die Trägerlänge nicht konstant ist, bleibt die Frage zu klären, mit welchem Gehalt nun zu rechnen ist.

Leonhardt sagt zu diesem Thema, dass ohne grosse Fehler mit dem maximal vorhandenen Armierungsgehalt über einen Momentenast zu rechnen sei. Er verweist dabei auf Versuchswerte von K. Jäger [3].

4. Schlussformeln für den einfachen Balken

Um die Durchbiegungen auf die Form aus Gleichung (3) zu bringen, müssen hier noch die Faktoren α und β_t berechnet werden.

4.1 Der Faktor $\beta_t = f_t^H/f_t^I$

β_t ergibt sich aus (7) und (8) bzw. aus (22) und (23) zu:

$$(24) \quad \beta_0 = \frac{1}{6} \left(\frac{0,627}{\mu n_0} + 2,34 \right) \left(\frac{d}{h} \right)^3$$

$$(25) \quad \beta_0 = \frac{1}{6} \left(\frac{0,724}{\mu n_0 (1 + \varphi)} + 2,34 \right) \left(\frac{d}{h} \right)^3$$

Diese Ausdrücke lassen sich mit

$$\varphi = 2,50 \text{ und } d/h = 1,10 \text{ graphisch darstellen (Bild 3).}$$

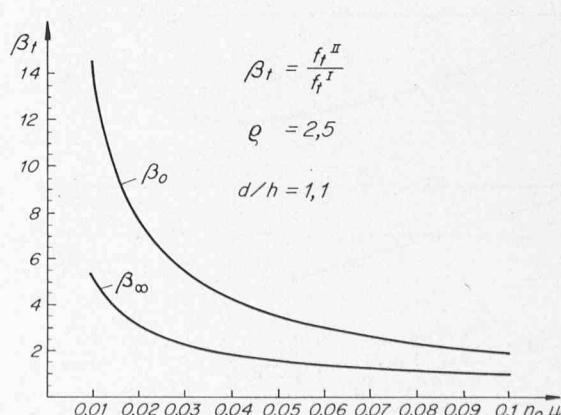


Bild 3

4.2 Der Faktor α

Bis jetzt wurde für sämtliche Berechnungen der Durchbiegungen angenommen, dass sämtliche Querschnitte längs der Balkenachse gerissen bzw. ungerissen seien. In Wirklichkeit wird dies nur selten der Fall sein, da das Rissmoment des Querschnitts nur in einem bestimmten Bereich überschritten wird, so dass also gerissene und ungerissene Querschnitte nebeneinander vorkommen. Diese Tatsache wird durch den Faktor α in Gleichung (3) berücksichtigt. Der Faktor α kann theoretisch berechnet werden nach Bild 4.

Man sieht, dass der Wert von α theoretisch belastungsabhängig ist.

Für die in der Praxis üblichen Lastfälle (gleichförmige Belastung, Einzellast in Feldmitte, Einzellasten in den Drittelpunkten) kann α mit genügender Genauigkeit Bild 5 dargestellt werden. (die hier abgebildeten Werte ergeben sich direkt aus einer numerischen Auswertung der obenstehenden Formel für α).

In dieser Graphik kann die Rissezone eingezzeichnet werden und der α -Wert aus den beiden Randwerten aufaddiert werden (Bild 6).

Als Ergänzung sei hier noch die Formel für das Rissmoment angeführt, mit dessen Hilfe die gerissene Zone festgelegt und damit der Faktor α bestimmt werden kann.

$$M_R = W \cdot \beta_{bz} = \frac{1}{6} b \cdot d^2 \cdot \beta_{bz}$$

β_{bz} bedeutet die Biegezugfestigkeit des Betons, sie kann im allgemeinen zu 40 bis 60 kg/cm² angenommen werden.

4.3 Schlussformeln und Berechnungsgang

Gleichung (3) wird, unter Verwendung der oben berechneten Werte, zu:

$$(28) \quad f_0 = \left[1 + \alpha \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{0,627}{\mu n_0} + 2,34 \right) \left(\frac{d}{h} \right)^3 - 1 \right\} \right] \cdot f^H$$

$$(29) \quad f^\infty = \left[1 + \alpha \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{0,724}{\mu n_0 (1 + \varphi)} + 2,34 \right) \left(\frac{d}{h} \right)^3 - 1 \right\} \right] (1 + \varphi) f^H$$

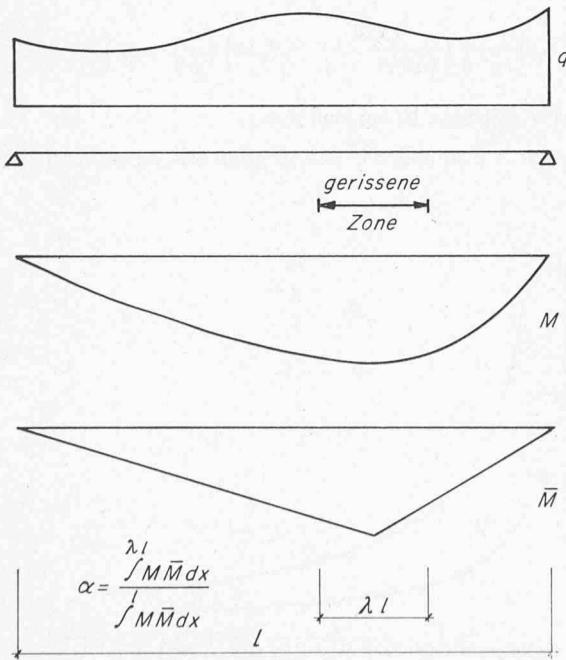


Bild 4

Der Berechnungsgang ist verhältnismäig einfach (vergl. Beispiel in Kap. 4.4):

1. Berechnung von f^H nach den in der Baustatik üblichen Methoden.
2. Bestimmung von α mit Hilfe des Rissmoments und dem Diagramm Kap. 4.2.
3. Festlegung der Parameter:

$\mu \cdot n_0$; $\mu = \mu_{max}$; $n_0 = E_e/E_b$ (i. A. $\cong 5$)	$\varphi = \text{Endkriechzahl}$ (i. A. $\cong 2,0-3,0$)
d/h	(i. A. $\cong 1,10$)
4. Berechnung der Durchbiegungen f_0 und f^∞

4.4 Berechnungsbeispiel (Bild 7)

Gegebene Größen:

$l = 4,00 \text{ m}$; $b = 10 \text{ cm}$; $d = 16 \text{ cm}$; $h = 13,3 \text{ cm}$; $g + p = 0,137 \text{ t}/\text{m}$; $\mu = 0,72\%$; $E_{bo} = 280000 \text{ kg}/\text{cm}^2$; $E_e = 2100000 \text{ kg}/\text{cm}^2$; $\varphi = 2,3$; $\beta_{bz} = 40 \text{ kg}/\text{cm}^2$

1. $f^H = \frac{5}{384} \frac{9 l^4}{EJ} = \frac{5}{384} \cdot \frac{1,37 \cdot 4,00^4 \cdot 10^8 \cdot 12}{280000 \cdot 10 \cdot 16^3} = 0,478 \text{ cm}$
2. $M_R = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 16^2 \cdot 40 \cdot 10^{-5} = 0,171 \text{ mt} \rightarrow \frac{\lambda}{2} \cong 0,40$
 $\alpha = 2 \cdot 0,47 = 0,94$
3. $\mu n_0 = 0,72 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2100}{280} = 0,054$
 $\varphi = 2,3$
 $\frac{d}{h} = 1,20$
4. $f_0 = \left[1 + 0,94 \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{0,627}{0,054} + 2,34 \right) \left(1,20 \right)^3 - 1 \right\} \right] \cdot 0,478 = 1,83 \text{ cm}$
 $f^\infty = \left[1 + 0,94 \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{0,724}{0,054 (1 + 2,3)} + 2,34 \right) \left(1,20 \right)^3 - 1 \right\} \right] (1 + 2,3) \cdot 0,478 = 2,83 \text{ cm}$

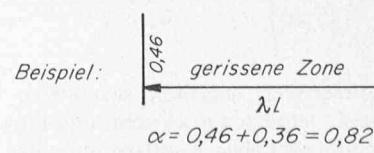
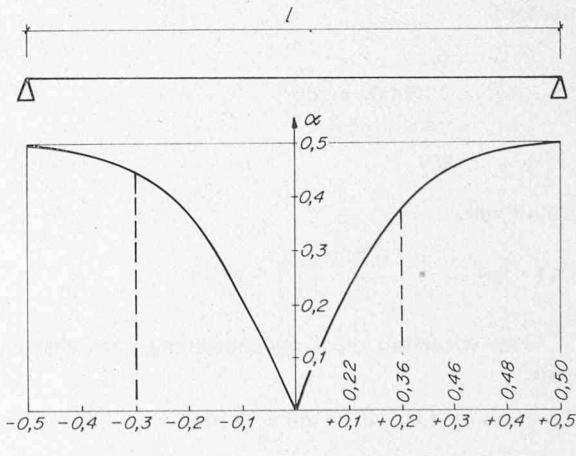


Bild 5 (oben) und Bild 6 (unten)

Die für dieses Beispiel an einem Versuch gemessenen Werte betragen:

$$f_0^{\text{gem}} = 1,6 \text{ cm} \text{ und } f_{\infty}^{\text{gem}} = 3,2 \text{ cm}$$

Die Unterschiede zu den berechneten Werten betragen somit:

$$\Delta f_0 = +0,23 \text{ cm} = +14\%; \\ \Delta f_{\infty} = -0,37 \text{ cm} = -12\%$$

4.5 Weitere Vereinfachungen

Oft genügt für die Praxis eine recht grobe überschlägige Rechnung. Aus diesem Grunde werden hier die bis jetzt erhaltenen Ergebnisse durch Einsetzen von üblichen Durchschnittswerten weiter vereinfacht.

4.5.1 Faktor α

Geht man von der Voraussetzung aus, dass der Balken voll ausdimensioniert sei ($\sigma_{b,\max} = 120 \text{ kg/cm}^2$; $\sigma_e = 2400 \text{ kg/cm}^2$; $\mu = 0,80\%$), kann folgender Ansatz getroffen werden:

$$M_R = W \cdot \beta_{bz} = \frac{1}{6} bd^2 \beta_{bz}$$

$$M_{\max} = F_e \sigma_e \cdot \eta \cdot h = \mu \cdot \sigma_e \cdot b \cdot \eta \cdot h^2$$

$$\frac{M_R}{M_{\max}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\mu \eta} \cdot \frac{\beta_{bz}}{\sigma_e} \cdot \left(\frac{d}{h}\right)^2$$

Setzt man:

$$\beta_{bz} = 50 \text{ kg/cm}^2; \sigma_e = 2400 \text{ kg/cm}^2; \mu = 0,80 \cdot 10^{-2}; \eta = 0,9; d/h = 1,10$$

$$\text{wird: } M_R/M_{\max} = 0,58.$$

Für eine gleichmäßig verteilte Belastung wird damit:

$$\frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,58 M_{\max}}{8 M_{\max}}} = 0,38$$

und

$$\alpha = 2 \cdot 0,47 = 0,94$$

4.5.2 Faktor β

Setzt man $n_0 = E_e/E_b = 5$; $\mu = 0,80\%$; und damit $\mu n_0 = 0,04$; sowie $\varphi = 2,5$; und weiter $d/h = 1,10$ so wird:

$$\beta_0 = \left(\frac{1}{6} \frac{0,627}{0,04} + 2,34 \right) \left(1,10 \right)^3 = 4,00$$

$$\beta_{\infty} = \frac{1}{6} \left(\frac{0,724}{0,04(1+2,5)} + 2,34 \right) \left(1,10 \right)^3 = 1,66$$

4.5.3 Durchbiegungen

Mit $\alpha = 0,94$ und $\beta_0 = 4,00$ bzw. $\beta_{\infty} = 1,66$ werden die Durchbiegungen zu:

$$(30) \quad f_0 = [1 + 0,94(4,00 - 1,00)] \cdot f^H = 3,82 \cdot f^H$$

$$(31) \quad f_{\infty} = [1 + 0,94(1,66 - 1,00)] (1 + 2,5) \cdot f^H = 5,70 \cdot f^H$$

Die auf diese Art gerechneten Durchbiegungen aus dem Kap. 4.4 ergäben sich dann zu:

$$f_0 = 3,82 \cdot 0,478 = 1,83 \text{ cm} \text{ (gemessen 1,6 cm)} \\ f_{\infty} = 5,70 \cdot 0,478 = 2,72 \text{ cm} \text{ (gemessen 3,2 cm)}$$

Man sieht, dass diese Ergebnisse im Rahmen einer groben Abschätzung durchaus genügen können.

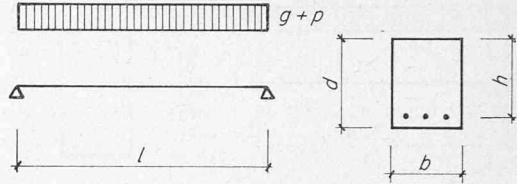


Bild 7

5. Durchbiegungen am Durchlaufträger

Leider ist es nicht möglich, die Durchbiegungen an einem Durchlaufträger in ähnlich einfacher Form allgemein darzustellen. Trotzdem soll hier eine Möglichkeit aufgezeigt werden, die es erlaubt, wenn auch mit etwas vergrößertem Aufwand, Anfangs- und Enddurchbiegungen (ohne Schwindeneinfluss) an einem solchen System zu berechnen.

5.1 Grundlagen

Als Grundlage dient der allgemeine Ansatz zur Berechnung von Durchbiegungen aus der Bieglehre,

$$(32) \quad f = \int_1^l \frac{MM}{EJ} dx$$

wobei in der Arbeitsgleichung nur der Anteil aus den Biegemomenten berücksichtigt wird.

Mit

$(EJ)^H$ = Biegesteifigkeit des homogenen Querschnitts

$(EJ)_t$ = Biegesteifigkeit des Trägers im Zeitpunkt t (gerissen oder ungerissen)

wird aus (32)

$$(33) \quad f = \frac{1}{(EJ)^H} \int_1^l MM \frac{(EJ)^H}{(EJ)_t} dx$$

Der Ausdruck $(EJ)^H/(EJ)_t$ lässt sich mit Hilfe der bereits gefundenen Beziehungen für verschiedene Fälle relativ einfach ausdrücken:

a) Querschnitt ungerissen (Stadium I):

$$(34) \quad t = 0: \frac{(EJ)^H}{(EJ)_0^{II}} = 1,0$$

$$(35) \quad t = \infty: \frac{(EJ)^H}{(EJ)_{\infty}^{II}} = (1 + \varphi)$$

b) Querschnitt gerissen (Stadium II):

$$(36) \quad t = 0: \frac{(EJ)^H}{(EJ)_0^{II}} = \frac{E_{b0} \cdot 1/12 b d^3}{E_{b0} 1/2 \xi_0^2 \gamma_0 b h^3} \cong$$

$$\cong \frac{1}{6} \left(\frac{0,627}{\mu n_0} + 2,34 \right) \left(\frac{d}{h} \right)^3$$

$$(37) \quad t = \infty: \frac{(EJ)^H}{(EJ)_{\infty}^{II}} = \frac{E_{b0}}{E_{b0}} (1 + \varphi) \frac{1/12 b d^3}{1/2 \xi_{\infty}^2 \gamma_{\infty} b h^3} \cong$$

$$\cong \frac{1}{6} \left[\frac{0,627}{\mu n_0 (1 + \varphi)} + 2,34 \right] (1 + \varphi) \left(\frac{d}{h} \right)^3$$

Nun können mit Hilfe des Rissmoments die gerissenen Zonen im Träger abgesteckt werden und die entsprechenden Biegesteifigkeiten eingesetzt werden. Durch numerische Integration werden dann die Werte f_0 und f_{∞} erhalten.

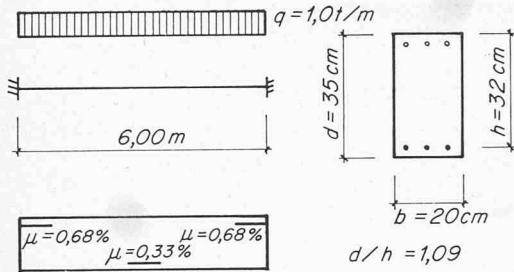


Bild 8

5.2 Beispiel: Zweifach eingespannter Balken

Gegebene Größen nach Bild 8; es sei im weiteren:

$$\begin{aligned} E_{b0} &= 420000 \text{ kg/cm}^2 \\ E_e &= 2100000 \text{ kg/cm}^2 \\ \varphi &= 2,5 \\ \beta_{bz} &= 35 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} n_0 &= 5,0 \\ \mu &= 0,68\% \\ \mu &= 0,33\% \end{aligned} \right.$$

Damit lassen sich die Durchbiegungen wie folgt berechnen:

$$1. \text{ Rissmoment: } M_R = \frac{1}{6} \cdot 0,20 \cdot 0,35^2 \cdot 350 = 1,40 \text{ mt}$$

2. Risszonen nach Bild 9, oben

3. Verhältnisse der Biegesteifigkeiten nach Bild 9, unten

$$t = 0:$$

- Stützbereich gerissen

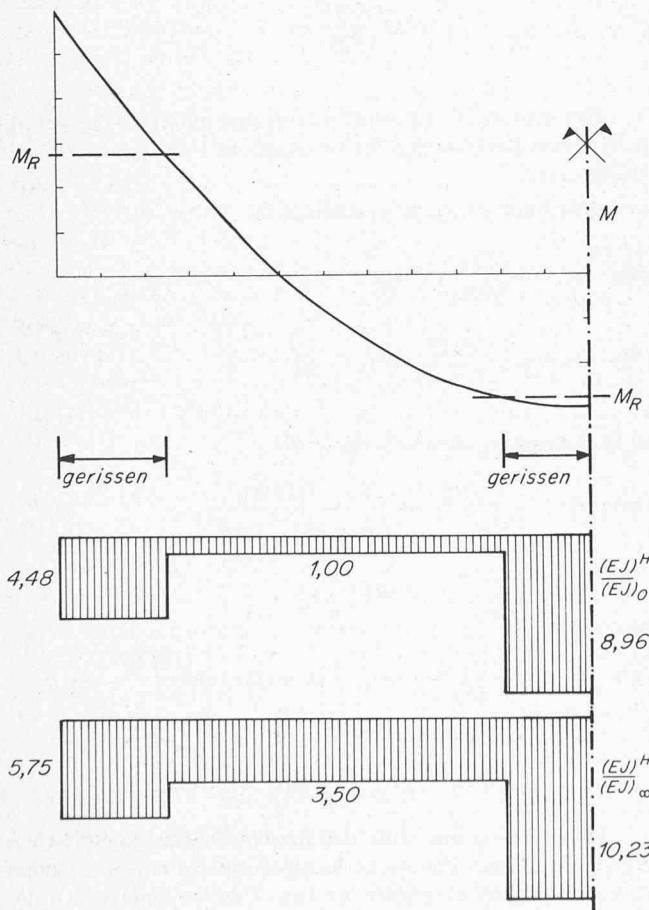


Bild 9

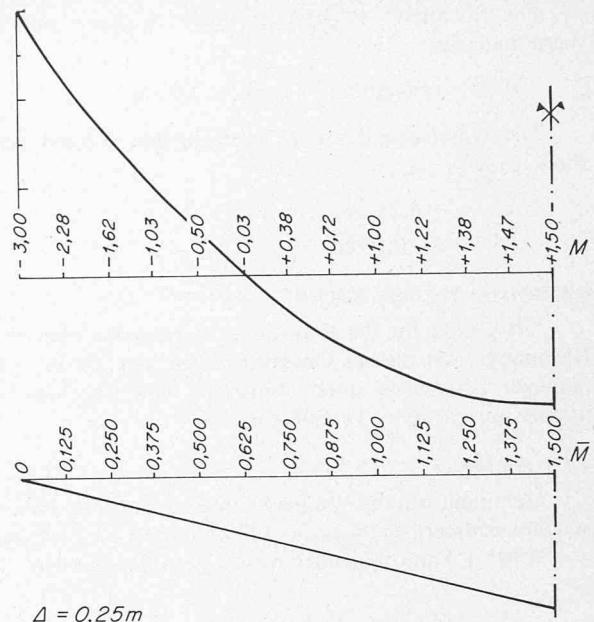


Bild 10

$$\frac{(EJ)^H}{(EJ)_0^{II}} = \frac{1}{6} \left(\frac{0,627}{0,034} + 2,34 \right) (1,09)^3 = 4,48$$

- Bereich ungerissen

$$\frac{(EJ)^H}{(EJ)_0^I} 1,00$$

- Feldbereich gerissen

$$\frac{(EJ)^H}{(EJ)_0^{II}} = \frac{1}{6} \left(\frac{0,627}{0,016} + 2,34 \right) (1,09)^3 = 8,96$$

$t = \infty$:

- Stützbereich gerissen

$$\frac{(EJ)^H}{(EJ)_{\infty}^{II}} = \frac{1}{6} \left[\frac{0,627}{0,034(1+2,5)} + 2,34 \right] (1+2,5)(1,09)^3 = 5,75$$

- Bereich ungerissen

$$\frac{(EJ)^H}{(EJ)_{\infty}^I} = 1 + 2,5 = 3,5$$

- Feldbereich gerissen

$$\frac{(EJ)^H}{(EJ)_{\infty}^{II}} \frac{1}{6} \left[\frac{0,627}{0,016(1+2,5)} + 2,34 \right] (1+2,5)(1,09)^3 = 10,23$$

4. Numerische Integration (nach Simpson), s. Bild 10

$$f_0 = \frac{1}{(EJ)^H} \cdot 2 \cdot \frac{0,25}{3} [4,48(0,00 - 4 \cdot 0,28 - 0,40)$$

$$+ 1,00(-0,40 - 4 \cdot 0,39 - 2 \cdot 0,25 - 4 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,28 + 4 \cdot 0,63 + 2 \cdot 1,00 + 4 \cdot 1,37 + 1,72) + 8,96(1,72 + 4 \cdot 2,02 + 2,25)]$$

$$= \frac{1}{420000 \cdot 1/12 \cdot 20 \cdot 35^3} \cdot 2 \cdot \frac{0,25}{3} (-6,81 + 9,74 + 107,97) \cdot 10^9 = 0,62 \text{ cm}$$

$$f_{\infty} = \frac{1}{(EJ)^H} \cdot 2 \cdot \frac{0,25}{3} (-8,84 + 34,09 + 123,27) = \\ = 0,83 \text{ cm}$$

Zu Vergleichszwecken seien hier die Durchbiegungen am homogenen Querschnitt beigefügt.

$$f^H = \frac{1}{384} \frac{9^{14}}{(EJ)^H} = 0,11 \text{ cm}$$

Damit wird also

$$f_0 = 5,64 \cdot f^H; f_{\infty} = 7,55 \cdot f^H$$

6. Zusammenfassung

Dieser Beitrag möchte dem praktisch tätigen Ingenieur ein Werkzeug in die Hand geben, mit dessen Hilfe er Durchbiegungen an Eisenbetonbalken mit Rechteckquerschnitt ohne grossen Aufwand berechnen kann.

EG-Empfehlungen für Wärmedämmung und rationelle Heizung

Von D. Goldstein, Brüssel

DK 662.614

Der Ministerrat der Europäischen Gemeinschaft hat zwei Empfehlungen gebilligt, nach denen die Mitgliedstaaten für rationelle Energienutzung «durch verbesserte Wärmedämmung in Gebäuden» und «bei Heizungssystemen in bestehenden Gebäuden» sorgen sollen. Diese Empfehlungen bilden – zusammen mit solchen über elektrische Haushaltgeräte sowie den öffentlichen und privaten Verkehr – den ersten Schritt zur Verwirklichung des Ende 1974 aufgestellten EG-Aktionsprogramms für rationelle Energienutzung. Dieses sieht vor, die Steigerung des Energiebedarfs so zu verlangsamen, dass 1985 der tatsächliche Verbrauch um 15% hinter einer 1972 gemachten Schätzung zurückbleibt. War damals mit einem jährlichen Zuwachs des Energieverbrauchs wie des Bruttosozialprodukts um 4,8% gerechnet worden, so geht man jetzt von einem BSP-Anstieg um 4,0%/Jahr aus. Beim Energieverbrauch soll die Zuwachsrate durch Sparmassnahmen auf 3,5% gesenkt werden. Nach den neuesten Schätzungen der EG-Mitgliedstaaten für 1985 dürfte dieses Ziel sogar noch unterboten werden, aber weniger wegen der Sparmassnahmen als wegen der Verlangsamung des Wirtschaftswachstums.

Das EG-Aktionsprogramm zielt darauf ab, die Verluste zu verringern, die gegenwärtig im Sektor Haushalte auf 55% veranschlagt werden, beim Verkehr auf 83% und in der Industrie auf 45%. Die grössten Sparmöglichkeiten sieht die EG-Kommission bei den Haushalten, die 1985 volle 18% weniger Energie verbrauchen sollen, als ohne Sparmassnahmen vorgesehen. Bei der Heizung würde sich ein Minderverbrauch von nahezu 25% ergeben, da sie bei einem Anteil von 75% am Energiekonsum der Haushalte fast die einzigen wesentlichen Sparmöglichkeiten bietet. Bei der – offenbar heute schon rationelleren – Heizung von gewerblichen Gebäuden ist eine Einsparung von 16% geplant. Von den sechs Aktionen des Sparprogramms im Sektor Haushalte betreffen fünf Heizung und Warmwasser, die letzte andere Geräte und Anlagen. Die Kosten der vorgeschlagenen Massnahmen können in der Regel innert fünf Jahren durch Einsparungen gedeckt werden.

Fünf Aktionen und ihre Sparziele

Verbesserte Wärmedämmung

Die technischen Möglichkeiten sind enorm: eine Dämm schicht von 7 cm verringert den Wärmeverlust einer 24-cm-Backsteinmauer um 50%, 10 cm Isolation bei einem her

Für den einfachen Balken konnten einfache Ansätze hergeleitet werden. Diese Ansätze wurden für bestimmte, in der Praxis oft vorhandene Randbedingungen auf eine sehr einfache Form gebracht (Gleichung 30 und 31). Für Durchlaufräger, bei denen solch einfache Ansätze nicht gefunden werden konnten, wurde ein Berechnungsschema skizziert, welches erlaubt, auch dort die Durchbiegungen ohne zu grosse Zeit investition zu errechnen.

Literatur

- [1] Horst Mayer: Die Berechnung von Durchbiegungen von Stahlbetonbauteilen (Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H. 1974, 1967).
- [2] Prof. Dr. Ing. Fritz Leonhardt: Anfängliche und nachträgliche Durchbiegungen von Stahlbetonbalken im Zustand II. «Beton- und Stahlbetonbau», H. 10, 1959.
- [3] K. Jäger: Die Beanspruchung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken in Abhängigkeit von der Verteilung der Stahleinlagen. «Österr. Ingenieur- und Architekten-Verein» 1952, H. 1/2 und 3/4.

Adressen der Verfasser: A. Aschwanden, dipl. Ing., Ingenieurbüro Aschwanden und Speck, Sophienstrasse 16, 8030 Zürich, und E. Snazzi, Schmelzbergstrasse 51, 8044 Zürich.

kömmlichen Dach bewirken eine Dämmung von 70%, ein Doppelfenster lässt fast 50% weniger Wärme durchtreten als ein einfaches, mit Beschichtung ist nochmals eine Verminderung von 35% zu erreichen. Mit wirtschaftlich «vernünftig dimensionierten» Vorschriften soll der Verbrauch an Heizungsenergie gegenüber herkömmlichen Gebäuden um 30% reduziert werden. Bei einer jährlichen Neubau-Rate von 2% des Gebäudebestandes ergäbe sich bis 1985 eine Einsparung von 6% der gesamten in der EG für Wohnraum-Heizung verwendeten Energie (immer gemessen an den ursprünglichen Schätzungen). Weitere 7% könnten bei Altbauten eingespart werden, wenn die Dächer gut zur Hälfte und die Wände und Fenster «in bescheidenem Umfang» verbessert würden.

Geregelte Luftzufuhr

Gut abgedichtete Türen und Fenster sowie eine kontrollierte Fensterlüftung (Erneuerung der gesamten Luft nicht häufiger als alle zwei Stunden, statt halbstündlich durch reine Fugenverluste in vielen Altbauten) würden in bestehenden Gebäuden die Wärmeverluste um 10 bis 20% herabsetzen und den gesamten Heizenergieverbrauch um 3%. Für Neubauten wird die Hälfte dieser Werte veranschlagt. Dabei ist vorausgesetzt, dass für Neubauten die Abdichtung vorgeschrieben wird und dass die Hälfte der Altbau-Bewohner die Empfehlungen befolgt.

Verbesserte Regelung der Heizung und Einbau von Wärmezählern

Kann die Heizung durch Heizkörper-Thermostaten geregelt werden und wird sie nach dem Verbrauch laut Wärmezählern verrechnet, so sollen die Verluste um 10% zurückgehen. Beim Einbau von Thermostaten in jede vierte bestehende Mehrraumheizung ergibt sich eine Einsparung von 1,0% der gesamten Heizenergie, weitere 1,7% würden beim Einbau von Thermostaten in 80% der neuen Anlagen gespart.

Verbesserte Brenner und Wartung der Heizung

Der Nutzungsgrad von vorhandenen Brennern kann durch optimale Einstellung und regelmässige Wartung um 5%, jener von neuen Brennern durch Leistungsnormen um 10% gesteigert werden. Einsparung: 2,0 plus 1,7%.