

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	94 (1976)
<b>Heft:</b>	28/29
<b>Artikel:</b>	Versuche und Berechnungen zum dynamischen Verhalten einer Leichtbetonbrücke und einer analogen Betonbrücke
<b>Autor:</b>	Bachmann, Hugo / Dieterle, Rudolf
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-73129">https://doi.org/10.5169/seals-73129</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Versuche und Berechnungen zum dynamischen Verhalten einer Leichtbetonbrücke und einer analogen Betonbrücke

Von Hugo Bachmann und Rudolf Dieterle, Zürich

DK 624.27: 666.973

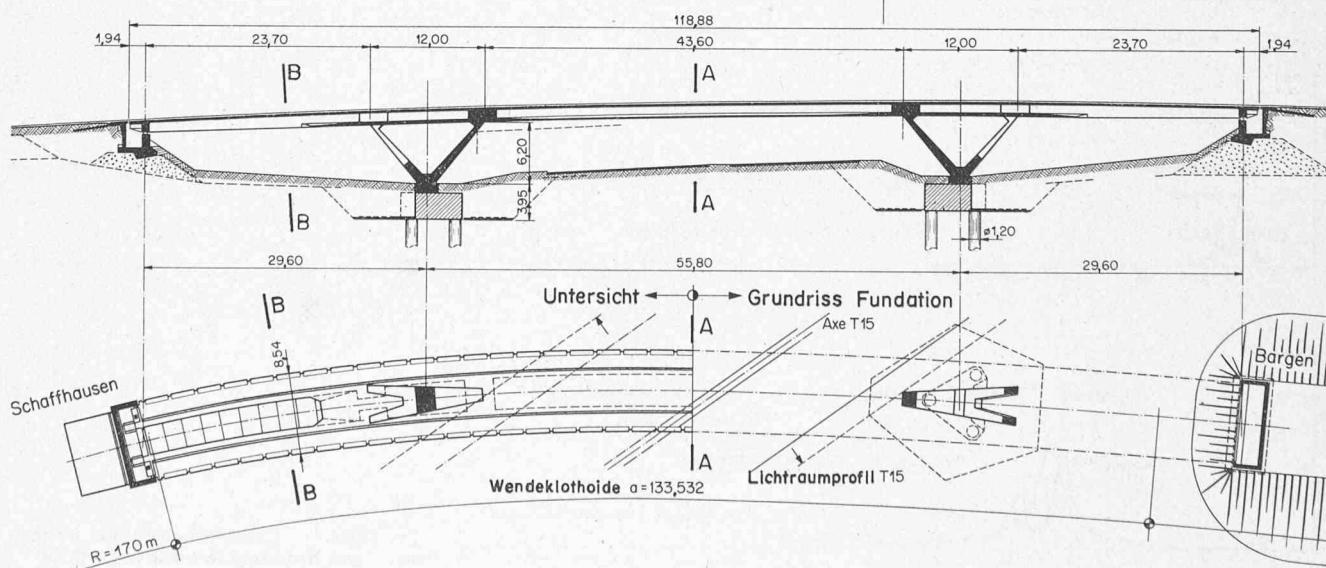
Im Jahre 1973 wurde bei Schaffhausen eine dreifeldrige Rahmenbrücke in teilweise vorgespanntem Leichtbeton<sup>1)</sup> erstellt. Vorgängig der Belastungsprobe regte der erstgenannte Verfasser als Experte an, nebst den üblichen Fahrversuchen auch eine Erregung der Brücke mittels einer Schwingungsmaschine vorzunehmen. Diese Belastungsart hat den Vorteil, dass auf das Bauwerk eine genau definierte Kraft/Zeit-Funktion einwirkt. Daher konnte anschliessend der Versuch unternommen werden, die entsprechende erzwungene Schwingung theoretisch nachzurechnen. Ausserdem wurden einige grundsätzliche Aspekte des dynamischen Verhaltens von Leichtbetonkonstruktionen im Vergleich zu demjenigen analoger Betonkonstruktionen näher abgeklärt. Über die Ergebnisse der Untersuchungen wird nachstehend berichtet.

## 1. Objekt und Belastung

Die Bilder 1 und 2 zeigen Form und Abmessungen der untersuchten Brücke. Es handelt sich um eine dreifeldrige Rahmenkonstruktion mit V-förmigen Zwischenstützen. Der Überbau besteht aus teilweise vorgespanntem Leichtbeton. Für die Zwischenstützen, Fundamente und Widerlager wurde normaler Beton verwendet. Der Überbau ist im Mittelfeld und im Bereich der Zwischenstützen als Hohlkasten- und in den Randfeldern als offener Plattenbalkenquerschnitt ausgebildet. Im Grundriss verläuft die Brücke teilweise leicht gekrümmmt. Die zu den Füßen der V-Stützen gemessenen Spannweiten betragen 29,6 m, 55,8 m und 29,6 m, die Trägerhöhe 1,50 m. Das Bauwerk weist somit eine erhebliche Schlankheit auf. Eine genauere Beschreibung der Brücke wird in [1] gegeben.

<sup>1)</sup> Leichtbeton mit Zuschlagstoff Leca hadé.

Bild 1. Grundriss und Längsschnitt



Die Belastung bei den durch die EMPA durchgeföhrten Versuchen wurde mittels einer Schwingungsmaschine mit zwei synchron und gegenläufig rotierenden Unwuchtmassen aufgebracht. Die Maschine wirkte nacheinander im Mittelfeld und in einem Randfeld (Schnitte A-A und B-B in Bild 1). Die resultierende periodische und vertikale Störkraft

$$(1) \quad P = m_s r \omega^2 \sin \omega t$$

ist von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  sowie vom Hebelarm  $r$  und den beiden rotierenden Massen  $m_s/2$  abhängig. Die

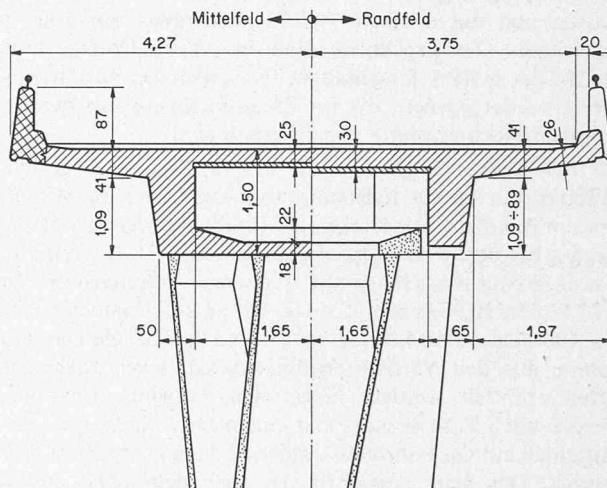
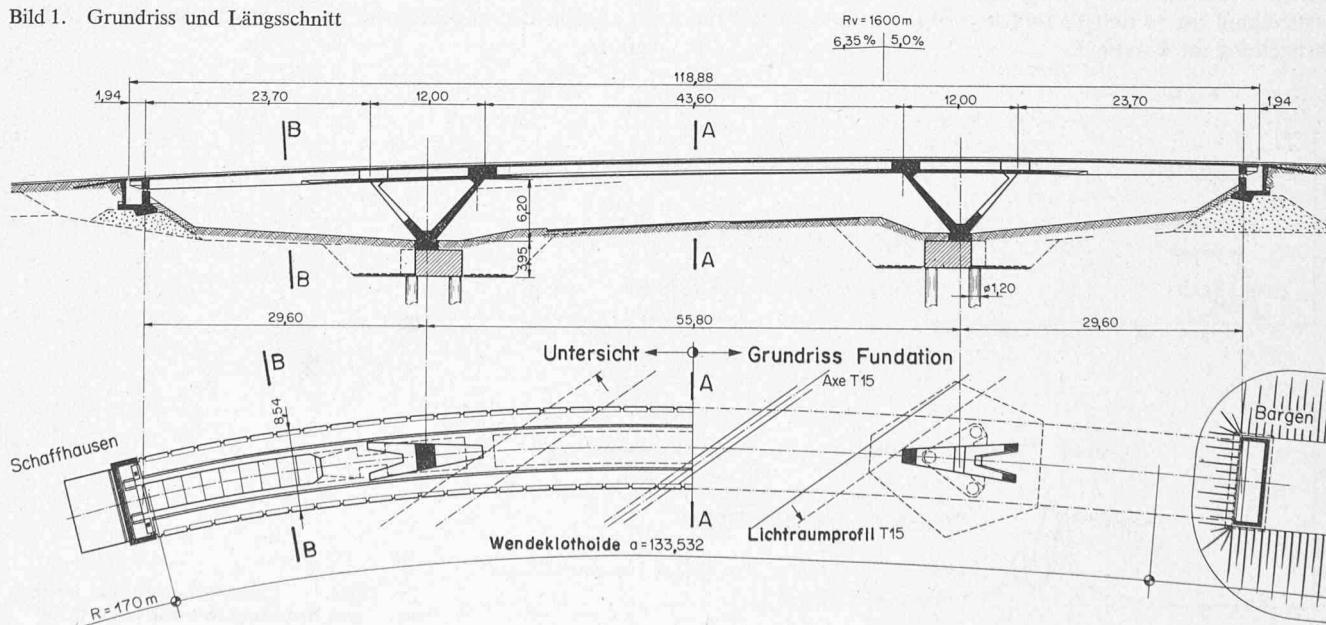


Bild 2. Querschnitt

Rv = 1600 m  
6,35% / 5,0%



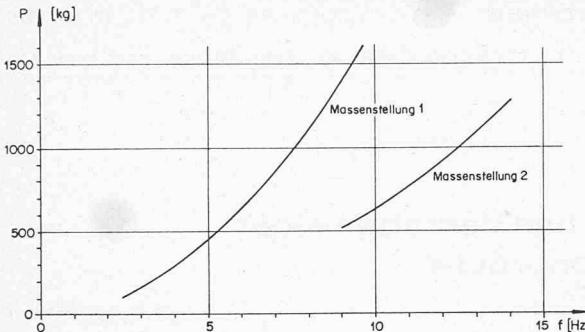


Bild 3. Charakteristik Kraft / Kreisfrequenz der eingesetzten Schwingungsmaschine

Charakteristik der Schwingungsmaschine ist in Bild 3 dargestellt.

## 2. Versuchsergebnisse

Die Durchbiegungen der Brücke wurden in fünf verschiedenen Messquerschnitten durch insgesamt 10 unter den beiden Längsträgern angeordnete induktive Weggeber gemessen und durch einen Mehrkanalschreiber simultan aufgezeichnet. Die Ergebnisse sind in einem Untersuchungsbericht der EMPA festgehalten. Es werden hier nur diejenigen Werte wiedergegeben, die im Zusammenhang mit der theoretischen Nachrechnung von Interesse sind.

Wichtigstes Ergebnis sind die in Bild 4 dargestellten Resonanzkurven für Belastung und Amplitude im Mittelfeld bzw. im Randfeld. Die Kurve des Mittelfeldes weist erwartungsgemäß bei der ersten Eigenfrequenz von 2,51 Hz verhältnismäßig grosse Ausschläge auf. Weitere Anregungen erfolgten bei 2,80 Hz, 10,9 Hz und 12,4 Hz. Die entsprechenden Größen des Randfeldes sind 5,35 Hz, 6,4 Hz und 8,5 Hz. Die Dämpfung konnte aus den Versuchsergebnissen auf zwei verschiedene Arten ermittelt werden. Nebst den Schwingungsversuchen wurden auch Fahrversuche mit einem Lastwagen über ein im Mittelfeld auf der Fahrbahn liegendes, 5 cm hohes Brett durchgeführt. Das beim Ausschwingen nach dem Stoß aus dem Verhältnis aufeinanderfolgender Amplituden ermittelte logarithmische Dekrement beträgt  $\delta = 0,10$ . Andererseits ergibt sich aus der Form der Resonanzkurve  $\delta = 0,125$  ( $f = 2,51$  Hz) für Laststellung im Mittelfeld und  $\delta = 0,175$  ( $f = 5,33$  Hz) für Laststellung im Randfeld.

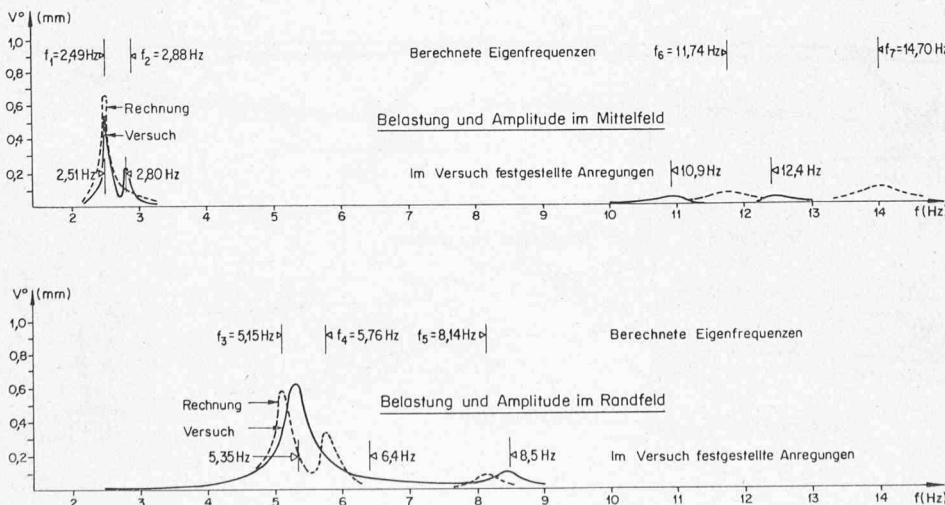


Bild 4. Resonanzkurven aus Versuch und Rechnung (Modell 4,  $\delta = 0,10$ )

## 3. Nachrechnung der erzwungenen Schwingung

### 3.1 Modelle

«Der Begriff Modell steht für die Vorstellung einer gegenüber der Wirklichkeit vereinfachten, idealisierten physikalischen Gegebenheit. Das Modell ist ein idealisiertes Abbild der Wirklichkeit. Es wird entscheidend präzisiert durch die grundlegenden Annahmen und Voraussetzungen für das nachfolgende methodische Rechenverfahren, den Algorithmus. Beim Bilden des Modells wird also das wirkliche Tragwerk gedanklich so vereinfacht, dass es einer Berechnung zugänglich wird» [2].

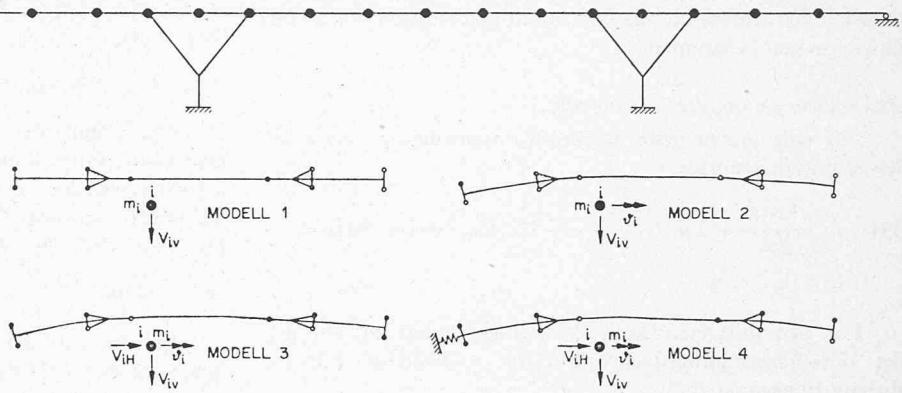
Auch für die vorliegende Untersuchung musste die komplexe Wirklichkeit in hohem Maße idealisiert werden. Bild 5 zeigt vier verschiedene, für die dynamische Nachrechnung verwendete Modelle. Die wirkliche Brücke mit kontinuierlicher Massenverteilung und  $\infty$  vielen Freiheitsgraden wurde gedanklich in ein massenloses Stabtragwerk mit 15 Punktmassen verwandelt. Die Modelle unterscheiden sich bezüglich der Grundrissform und der Anzahl der berücksichtigten Freiheitsgrade. Beim Modell 1 wurde die Grundrisskrümmung vernachlässigt und die vertikalen Durchbiegungen als 15 Verschiebungsfreiheitsgrade eingeführt. Beim gekrümmten Modell 2 wurden zusätzlich die Verdrehungen an denselben Stellen als 15 weitere Verschiebungsfreiheitsgrade berücksichtigt. Beim Modell 3 wurden auch noch die Longitudinalverschiebungen der Massenpunkte hinzugenommen, so dass nun 45 Freiheitsgrade vorhanden waren. Schliesslich weist das Modell 4 gegenüber dem Modell 3 beim linken Widerlager noch eine horizontale Feder auf.

Zur Definition des Berechnungsmodells gehören zudem die folgenden Annahmen und Voraussetzungen:

- Stabtragwerk
- Ideal elastisches Verhalten
- Homogener, rissefreier Zustand
- Die als nichttragend gedachten Teile wie Belag, Randsteine usw. wirken nur mit ihrer Masse
- Überall gleiche Dichte und gleicher E-Modul des Leichtbetons
- Vernachlässigung der Masse des Schwingungserregers gegenüber der entsprechenden Punktmasse (Verhältnis rd. 1:80)
- Viskose, d. h. geschwindigkeitsproportionale Dämpfung.

Vor allem die Annahme über die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung kann mit Vorbehalten versehen werden. Es handelt sich jedoch um einen für Baukonstruktionen häufig verwendeten Ansatz, der für kleine Amplituden im allgemeinen zweckmäßig ist. Er wurde deshalb auch hier benutzt.

Bild 5. Modelle für die dynamische Berechnung



### 3.2 Allgemeine Berechnungsmethode

Für die Berechnung der erzwungenen Schwingung ist die sogenannte modale Berechnungsmethode geeignet (siehe z. B. [3]). Hierbei werden sowohl die Belastungen wie auch die Verschiebungen nach den Eigenschwingungsformen entwickelt und die entsprechenden Lösungen superponiert. Zum besseren Verständnis der darauffolgenden Abschnitte wird der Rechengang kurz dargestellt. Dabei werden als Verschiebungen entsprechend den Freiheitsgraden von Modell 1 nur vertikale Durchbiegungen berücksichtigt.

#### Eigenschwingung

Für die ungedämpfte Eigenschwingung des  $i$ -ten Massenpunktes gilt die folgende Differentialgleichung:

$$(2) \quad m_i \frac{d^2 v_i(t)}{dt^2} + \sum_{k=1}^n C_{ik} v_k(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Zum Zeitpunkt  $t$  greifen am  $i$ -ten Massenpunkt die Trägheitskraft und die elastische Kraft des Stabsystems an. Es bedeuten  $v_i(t)$  die momentane vertikale Verschiebung des  $i$ -ten Massenpunktes,  $m_i$  die Masse dieses Massenpunktes ( $i$ -tes Diagonalelement der Massenmatrix) und  $C_{ik}$  die Stützkraft im Massenpunkt  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), wenn der Punkt  $i$  eine Verschiebung 1 erfährt ( $i$ -te Zeile der Steifigkeitsmatrix).  $v_k(t)$  sind die momentanen effektiven Verschiebungen der  $n$  Massenpunkte. Die Verschiebungsfunktion  $v_i(t)$  wird i. a. durch den Ansatz

$$(3) \quad v_i(t) = v_0^i \sin \omega_0 t$$

in eine nur vom Ort und eine nur von der Zeit abhängige Funktion aufgespalten. Dieser Ansatz setzt voraus, dass sich alle Massenpunkte phasengleich (in Phase) bewegen. Durch Einsetzen von (3) in (2) ergeben sich  $n$  Gleichungen der Art

$$(4) \quad -m_i \omega_0^2 v_0^i + \sum_{k=1}^n C_{ik} v_0^k = 0$$

Eine nichttriviale Lösung existiert nur, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems (4) erhält man  $n$  Lösungen (Eigenwerte) für  $\omega_0^2 = \omega_{(j)}^2$ , woraus sich  $n$  positive Wurzeln als Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \dots, \omega_{(j)}, \dots, \omega_{(n)}$  berechnen lassen.

Nach Einsetzen der  $\omega_{(j)}$  ergeben sich aus (4) zudem die  $n$  Eigenschwingungsformen (Eigenvektoren)  $v_{k(j)}$  mit  $k = 1, \dots, n$ , die bis auf einen frei wählbaren Faktor (Normierung) bestimmt sind.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (2), d. h. die Schwingung des  $i$ -ten Massenpunktes, setzt sich aus  $n$  Schwingungen mit den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{(j)}$  und den entsprechenden  $j$ -ten Eigenschwingungsformen zusammen:

$$(5) \quad v_i(t) = \sum_{j=1}^n \sin(\omega_{(j)} t + \Phi_{(j)})$$

$\Phi_{(j)}$  ist die Phasenverschiebung der  $j$ -ten Eigenschwingung.

Wird zusätzlich eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung berücksichtigt, so geht die Bewegungsgleichung (2) über in

$$(6) \quad m_i \frac{d^2 v_i(t)}{dt^2} + C_b \frac{dv_i(t)}{dt} + \sum_{k=1}^n C_{ik} v_k(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Darin ist  $C_b$  der Dämpfungskoeffizient, welcher die hemmende Kraft bei einer Einheitsgeschwindigkeit ausdrückt. Für  $C_b$  kann aus rein formalen Gründen der Ansatz

$$(7) \quad C_b = 2 m_i \omega_b$$

gemacht werden.  $\omega_b$  hat die Dimension der Kreisfrequenz und wird daher die Kreisfrequenz der Dämpfung genannt. Die Beziehung von  $C_b$  zu dem für die Erfassung der Dämpfung oft gebrauchten logarithmischen Dekrement  $\delta$  und dem Dämpfungsfaktor  $\xi$  lautet (Umrechnung nur gültig, wenn nur eine Eigenschwingung berücksichtigt wird):

$$(8) \quad \delta = \frac{\omega_b}{\omega'_{(j)}} 2 \Pi = \frac{C_b}{2 m_i} \cdot \frac{2 \Pi}{\omega'_{(j)}} = \xi 2 \Pi$$

Darin bedeutet  $\omega'_{(j)}$  die  $j$ -te Eigenkreisfrequenz der  $j$ -ten gedämpften Eigenschwingung (siehe Gl. (11)). Das logarithmische Dekrement ist

$$(9) \quad \delta = \text{nl} \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

worin  $A_n/A_{n+1}$  das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden darstellt. Der Dämpfungsfaktor  $\xi$  entspricht dem Verhältnis der effektiven Dämpfung zur kritischen Dämpfung.

Die partikuläre Lösung der Gleichung (6) ist

$$(10) \quad v_i(t) = v_0^i e^{-\omega_b t} \sin(\omega'_0 t + \Phi_0), \text{ wobei}$$

$$(11) \quad \omega'_0 = \omega'_{(j)} = \sqrt{\omega_{(j)}^2 - \omega_b^2}$$

Gleichung (11) besagt, dass die Eigenkreisfrequenz  $\omega_{(j)}$  der freien Schwingung durch die Dämpfung  $\omega_b$  verkleinert wird. Hingegen lässt sich zeigen, dass die Dämpfung die Eigenschwingungsformen nicht verändert. Das Ausmass der Verkleinerung von  $\omega_{(j)}$  durch  $\omega_b$  hängt vom Verhältnis dieser beiden Größen ab. Für die bei modernen Brücken vorhandene relativ kleine Dämpfung kann  $\omega'_{(j)} = \omega_{(j)}$  gesetzt werden.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (6) lautet in Analogie zu (5)

$$(12) \quad v_i(t) = e^{-\omega_b t} \sum_{j=1}^n v_0^j \sin(\omega'_{(j)} t + \Phi_{(j)})$$

Sie setzt sich wiederum aus den – nun gedämpften –  $n$  Eigen-schwingungen zusammen.

### Erzwungene gedämpfte Schwingung

Für eine erzwungene gedämpfte Schwingung gelten die Bewegungsgleichungen

$$(13) \quad m_i \frac{d^2 v_i(t)}{dt^2} + 2 m_i \omega_b \frac{dv_i(t)}{dt} + \sum_{k=1}^n C_{ik} v_k(t) = P_i(t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Für den durchgeführten Belastungsversuch gilt für den Ort der Schwingungsmaschine  $P_i(t) = P \sin \omega t$ . Für die übrigen Punkte ist  $P_i(t) = 0$ .

Die  $n$  über  $v_k$  gekoppelten Gleichungen (13) können durch Zerlegen nach den Eigenschwingungsformen entkoppelt und gelöst werden.

Die Belastung wird dargestellt durch die Reihe

$$(14) \quad P_i(t) = \sum_{j=1}^n p_{(j)}(t) m_i v_{i(j)}$$

$v_{i(j)}$  bedeutet die Verschiebung im Punkt  $i$  bei der  $j$ -ten Form der Eigenschwingung ( $i$ -te Komponente des  $j$ -ten Eigenvektors), wobei die Grösse der Verschiebung in einem Punkt der Eigenschwingungsform beliebig gewählt werden darf (Normierung).  $p_{(j)}(t)$  stellt den Anteil der Belastung  $P_i(t)$  an der  $j$ -ten Eigenschwingung dar und bestimmt somit das Ausmass der Mitwirkung der  $j$ -ten Eigenschwingung. Es gilt

$$(15) \quad p_{(j)}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i(t) v_{i(j)}}{\sum_{i=1}^n m_i v_{i(j)}^2}$$

Für eine harmonische Belastung  $P_i(t) = P_i \sin \omega t$  ist

$$(16) \quad p_{(j)}(t) = p_{(j)} \sin \omega t, \quad p_{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i(t) v_{i(j)}}{\sum_{i=1}^n m_i v_{i(j)}^2}$$

Die Durchbiegung  $v_i(t)$  wird entwickelt durch die Reihe

$$(17) \quad v_i(t) = \sum_{j=1}^n q_{(j)}(t) v_{i(j)}$$

$q_{(j)}(t)$  gibt den Anteil der  $j$ -ten Eigenschwingung an der Ver-schiebung des  $i$ -ten Massenpunktes.

Durch Einsetzen von (17) und (14) in (13) und anschlies-sendem Koeffizientenvergleich ergeben sich  $n$  entkoppelte Differentialgleichungen von der Form

$$(18) \quad \frac{d^2 q_{(j)}(t)}{dt^2} + 2 \omega_b \frac{dq_{(j)}(t)}{dt} + \omega_{(j)}^2 q_{(j)}(t) = p_{(j)} \sin \omega t$$

mit der Partikulärlösung

$$(19) \quad q_{(j)}(t) = q_{(j)} \sin (\omega t + \Phi_{(j)}), \text{ worin}$$

$$(20) \quad q_{(j)} = \frac{p_{(j)}}{\sqrt{(\omega_{(j)}^2 - \omega^2)^2 + 4 \omega^2 \omega_b^2}}, \text{ und}$$

$$(21) \quad \Phi_{(j)} = \arctan \frac{2 \omega \omega_b}{\omega^2 - \omega_{(j)}^2}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (13) erhält man wie üblich durch Superposition der Lösung der homogenen Gleichung (Gl. 12) und der Partikulärlösung (Gl. 19)

$$(22) \quad v_i(t) = \sum_{j=1}^n v_{i(j)} q_{(j)} \sin (\omega t + \Phi_{(j)}) + v_{i(j)}^0 e^{-\omega_b t} \sin (\omega'_{(j)} t + \Phi'_{(j)})$$

Darin stellt das erste Glied den stationären Anteil dar. Das zweite Glied entspricht der Eigenschwingung. Diese wird jedoch – wie der Term  $e^{-\omega_b t}$  angibt – mit der Zeit «heraus-gedämpft», so dass nur noch der stationäre Teil übrig bleibt. Die  $v_{i(j)}$  und  $\Phi_{(j)}$  können durch die Anfangsbedingungen  $v_i(t = 0)$  und  $\frac{dv_i(t = 0)}{dt}$  festgelegt werden.

Für den Fall der Resonanz  $\omega_{(j)} = \omega$ , ist aus (20) ersicht-lich, dass für  $v_i(t)$  die  $j$ -te Eigenschwingung praktisch allein massgebend ist.

### 3.3 Elektronische Berechnung

Zur praktischen Berechnung wurde das am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETHZ verfügbare SMIS-Programm verwendet. SMIS ist ein problemorientiertes Pro-gramm zur Durchführung von Matrizenoperationen. Für die Berechnung am 1. Modell kann das Gleichungssystem (4) wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1k} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{i1} & \dots & C_{ik} & \dots & C_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nk} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^0_1 \\ \vdots \\ v^0_k \\ \vdots \\ v^0_n \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ m_i & \vdots \\ \vdots & \ddots \\ 0 & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^0_1 \\ \vdots \\ v^0_k \\ \vdots \\ v^0_n \end{bmatrix}$$

oder abgekürzt:

$$(23) \quad [K] \{v^0_k\} = \omega^2 [M] \{v^0_k\}$$

[ $K$ ] bedeutet die Steifigkeitsmatrix, [ $M$ ] die Massenmatrix und  $\{v^0\}$  der Verschiebungsvektor. Die Auflösung dieses Eigen-wertproblems ergibt die Eigenwerte  $\omega^2 = \omega_{(j)}^2$  bzw. die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{(j)}$  und die zugehörigen Eigenschwin-gungsformen als Eigenvektoren. Die Matrix [ $\Phi$ ] der Eigenvektoren erfährt im SMIS-Programm eine besondere, für die Integration der Bewegungsdifferentialgleichungen zweck-mässige Normierung. Der Unterschied zwischen  $\omega_{(j)}$  und  $\omega'_{(j)}$  kann – wie unter 3.2 dargelegt – vernachlässigt werden.

Wird in (18) anstelle von  $\omega_b$  der Dämpfungsfaktor  $\xi = \delta/2\pi$  eingesetzt und für alle Eigenschwingungen als gleich angenommen, so ergibt sich

$$(24) \quad \{\ddot{q}_{(j)}\} + 2\xi[\omega_{(j)}]\{\dot{q}_{(j)}\} + \omega^2\{q_{(j)}\} = \{p_{(j)}\} \sin \omega t$$

Die Integration, d.h. die Berechnung von  $q_{(j)}(t)$  aus (24), erfolgt im SMIS-Programm in Zeitintervallen  $\Delta t$ . Die Ergeb-nisse werden für die Zeitpunkte  $Z\Delta t$  ( $Z = 1, 2, \dots, \infty$ ) ge-speichert und analog (17) durch

$$(25) \quad \{v(t)\} = [\Phi] \{q_{(j)}(t)\}$$

auf die ursprünglichen Koordinaten zurücktransformiert.

Für die Berechnung am Modell 2 kommen zu den 15 Freiheitsgraden der vertikalen Durchbiegung die 15 Ver-drehungsfreiheitsgrade hinzu.

Der Verschiebungsvektor muss entsprechend erweitert werden. [ $K$ ] vergrössert sich um die Verdrehungsstützkräfte, und die Diagonale von [ $M$ ] wird durch die Massenrotations-trägheitsmomente fortgesetzt. Gl. (23) entsprechend werden jetzt 30 Eigenkreisfrequenzen berechnet. Die  $30 \times 30$  Matrix [ $\Phi$ ] der Eigenvektoren ist voll besetzt, wobei jedoch häufig unterschieden werden kann zwischen Eigenvektoren, bei denen

die vertikalen Verschiebungen dominieren, und solchen, bei denen die Verdrehungen überwiegen. Die Bedeutung von  $q_{(f)}$  in (24) wird in analoger Weise erweitert.

Für die Berechnung an den Modellen 3 und 4 ist für die Berücksichtigung der 15 Longitudinalfreiheitsgrade eine zusätzliche Erweiterung sinngemäß vorzunehmen.

### 3.4 Numerische Ergebnisse und Vergleich mit Versuchsergebnissen

Bei einer ersten, unmittelbar vor dem Versuch erfolgten Berechnung des Eigenwertproblems am Modell 1 wurden die folgenden, dannzumal am Bauwerk ermittelten Materialkennwerte eingesetzt:

$$E_{LB} = 195000 \text{ kp/cm}^2,$$

$$\gamma_{LB} = 1,9 \text{ t/m}^3 \text{ (einschl. Armierungsgewicht).}$$

Hiermit gelang mit  $f_{(1)} = \omega_{(1)}/2\pi = 2,51 \text{ Hz}$  eine sehr gute Vorhersage der am Bauwerk festgestellten ersten Eigenfrequenz. Der annähernd gleiche Wert wurde auch bei den Berechnungen an den anderen Modellen erhalten. Die obigen Materialkennwerte wurden deshalb für sämtliche Berechnungen beibehalten.

#### a) Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen

Die Lösung des Eigenwertproblems, d.h. die Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen und der Eigenschwingungsformen wurde an den in Bild 5 dargestellten und einer Reihe weiterer Modelle durchgeführt. In Bild 6 sind jeweils die ersten 8 Eigenschwingungsformen mit den entsprechenden Eigenfrequenzen dargestellt.

Bei der Berechnung am Modell 2 zeigte sich, dass durch die zusätzliche Berücksichtigung der Grundrisskrümmung und der Verdrehungsfreiheitsgrade die Eigenfrequenzen und die Eigenschwingungsformen von Modell 1 bis zu verhältnismäßig hohen Frequenzen praktisch nicht verändert wurden. Erst bei etwa 15 Hz wurde ein neuer zusätzlicher Eigenwert mit der dazugehörigen Eigenschwingungsform festgestellt. Dies war auf Grund einer ebenfalls durchgeföhrten Berechnung der reinen Torsionsschwingung auch zu erwarten, da die erste reine Torsionseigenfrequenz bei 14,6 Hz liegt. Entsprechend zeigen auch die Eigenschwingungsformen erst ab der 7. Form wesentliche Unterschiede zu denjenigen von Modell 1. Beim Vergleich der berechneten Eigenfrequenzen mit den im Versuch festgestellten Anregungen fällt auf, dass die zweite Eigenfrequenz sowohl beim Modell 1 als auch beim

Bild 6a. Eigenschwingungsformen und Eigenfrequenzen der Modelle 1 und 2

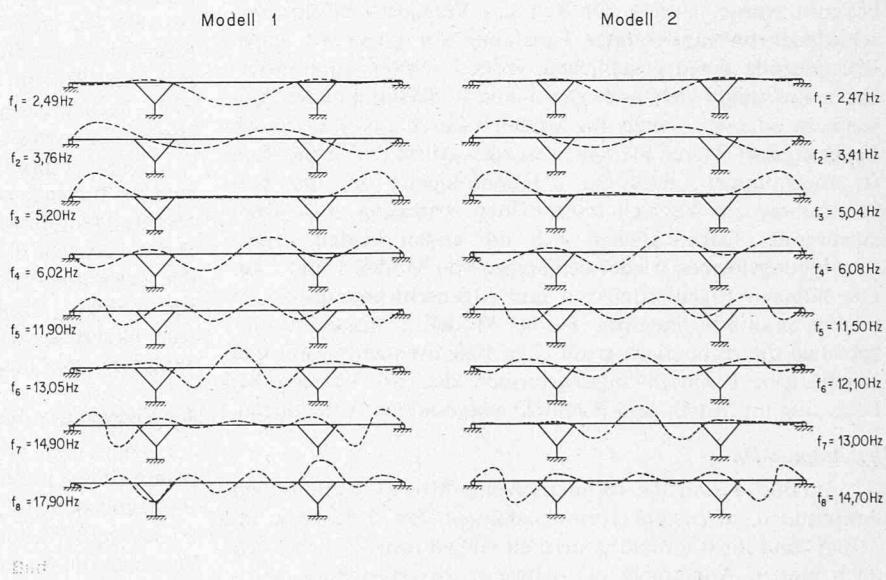
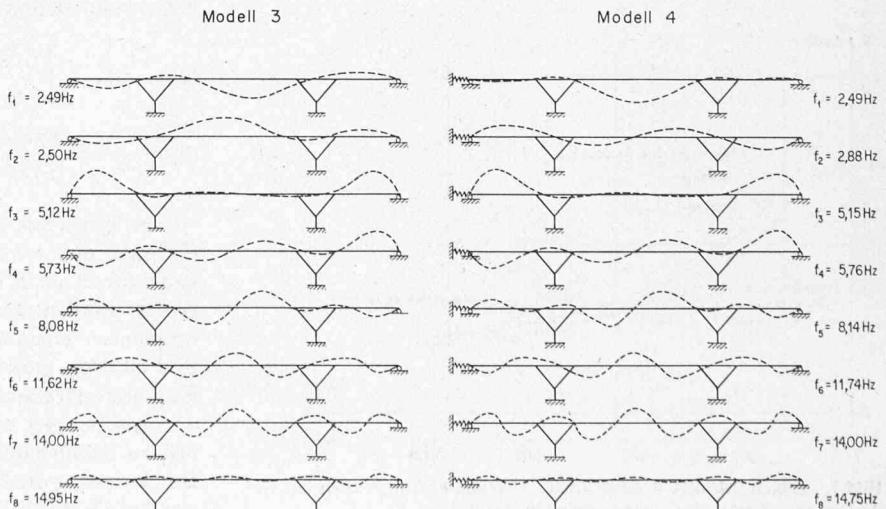


Bild 6b. Eigenschwingungsformen und Eigenfrequenzen der Modelle 3 und 4



Modell 2 erst bei 3,36 Hz folgt, wo hingegen bei der wirklichen Brücke die zweite Resonanzstelle unmittelbar oberhalb der ersten lag.

Weit grössere Unterschiede zum Modell 1 – und auch bessere Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen – brachte der Übergang von Modell 2 zu Modell 3 durch die zusätzliche Berücksichtigung der Longitudinalverschiebungen. Insbesondere die antimetrischen Eigenschwingungsformen weisen an den oberen Stützenenden erhebliche vertikale Knotenverschiebungen auf. Infolge der durch die V-Stützen mit dem Brückenträger gebildeten, recht starren Dreieckscheiben sind diese Formen nur möglich, wenn sich die Knoten gleichzeitig auch horizontal verschieben können. Daher ist offensichtlich, dass auch Longitudinalverschiebungen wesentlich sein können. Bei der Berechnung der reinen Longitudinalschwingung ergab sich ein 1. Eigenwert bei 3,4 Hz, also im Bereich der 1. reinen Biegeeigenfrequenz, während der zweite wesentlich höher lag, nämlich bei 14,3 Hz. Daher hatte der Einbezug der Longitudinalverschieblichkeit vor allem einen grossen Einfluss auf die ersten beiden Eigenschwingungsformen und auf die 2. Eigenfrequenz. Diese fiel nun fast mit der 1. Eigenfrequenz zusammen, was den Versuchsergebnissen bereits wesentlich besser entspricht.

Eine bezüglich der Lage der 2. Eigenfrequenz sehr gute Übereinstimmung von Versuch und Rechnung konnte mit dem Modell 4 erzielt werden. Wie erst während der Berechnungen bekannt wurde, leistete zur Zeit des Versuches infolge verschiedener unbeabsichtigter Umstände ein Lager am einen Brückenende einen erheblichen, jedoch schwer quantifizierbaren Reibungswiderstand. Um diesen Widerstand näherungsweise zu erfassen, wurde das Modell 3 durch eine horizontale Feder ergänzt. Deren Steifigkeit wurde variiert und schliesslich so angenommen, dass die 2. Eigenfrequenz mit der entsprechenden im Versuch festgestellten Anregung etwa übereinstimmte. Dabei glichen sich die ersten beiden Eigenschwingungsformen wieder denjenigen von Modell 1 und 2 an. Die höheren Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen blieben praktisch dieselben wie bei Modell 3. Insgesamt entsprechen die rechnerisch ermittelten Eigenfrequenzen mit den zugehörigen Eigenschwingungsformen den im Versuch bei Belastung im Mittel- und Randfeld festgestellten Anregungen.

#### b) Amplituden

In Bild 4 sind die rechnerisch am Modell 4 ermittelten Amplituden, d. h. die Resonanzkurven für Belastung im Mittel- und im Randfeld gestrichelt eingetragen. Es zeigt sich auch hier in Anbetracht der schwierig zu erfassenden wirklichen Verhältnisse eine befriedigende Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

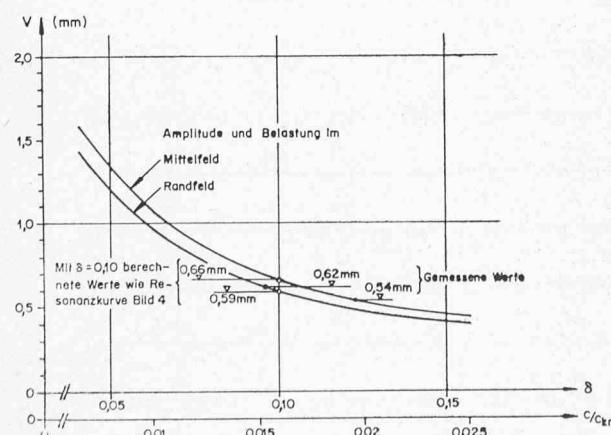


Bild 7. Nach Modell 4 berechnete, maximale Amplituden in Abhängigkeit von der angenommenen Dämpfung

Die Amplituden der dargestellten Resonanzkurven wurden mit der im Ausschwingversuch festgestellten Dämpfung  $\delta = 0,10$  berechnet. Bei Belastung im Mittelfeld wird mit der rechnerischen maximalen Amplitude von 0,66 mm der im Versuch gemessene Wert von 0,54 mm um 26% überschätzt. Im Randfeld hingegen wird der gerechnete Wert von 0,59 mm mit dem gemessenen Wert von 0,62 mm um rund 5% unterschätzt. In Bild 7 sind die nach Modell 4 berechneten maximalen Amplituden in Abhängigkeit von der angenommenen Dämpfung dargestellt. Die gemessenen Amplituden sind ebenfalls eingetragen. Es zeigt sich, dass sich mit  $\delta = 0,10$  eine befriedigende Übereinstimmung der gerechneten und gemessenen Amplituden ergibt.

#### 4. Vergleiche zwischen analogen Tragwerken aus Leichtbeton und Beton

Im folgenden werden dynamische Kenngrössen analoger Leichtbeton- und Betontragwerke miteinander verglichen. «Analog» bedeutet hier, dass sich die beiden Tragwerke nur in der Dichte der Eigenmasse und in der Grösse der Biegesteifigkeit unterscheiden können. Hingegen sollen insbesondere das statische System, die Spannweiten und die Verteilung von Eigenmasse und Biegesteifigkeit gleich sein. Der Vergleich dynamischer Kenngrössen zweier derart korrelierter Konstruktionen ist zwar nicht unproblematisch. Denn ein optimal projektiertes Leichtbetontragwerk kann sich sehr wohl auch bei den als unveränderlich angenommenen Parametern von einem dem gleichen Zweck dienenden Betontragwerk unterscheiden. Zudem wird die Masse irgendwelcher Nutzlasten nicht berücksichtigt. Trotz dieser Einschränkungen ergeben sich einige interessante Hinweise.

Die Dämpfungseigenschaften von Leichtbetontragwerken sind noch wenig erforscht. Immerhin weiss man, dass bei der Materialdämpfung keine grundlegenden Unterschiede zum Beton bestehen. Und weil der Anteil der Systemdämpfung an der Gesamtdämpfung wesentlich ist und die Systemdämpfung bei analogen Konstruktionen praktisch dieselbe sein dürfte, wird näherungsweise angenommen, dass der Wert  $\delta$  für beide Tragwerkarten der gleiche sei.

##### 4.1 Eigenfrequenzen

Geht man von einem gegebenen Tragwerk aus, so bedeutet eine in jedem Schnitt proportional gleiche Änderung der Biegesteifigkeit  $EI$  die Multiplikation der Steifigkeitsmatrix in Gleichung (23) mit einem konstanten Faktor  $c_1$ . Wird zudem in jedem Massenpunkt die Dichte  $\gamma$  der Punktmasse auf gleiche Weise verändert, so muss auch die Massenmatrix mit einem Faktor  $c_2$  multipliziert werden. Die Werte  $\omega^{20}$  ändern sich daher um den Faktor  $c_1/c_2$ . Somit gilt für analoge Leichtbeton- und Betontragwerke

$$(26) \quad \omega_{LB} = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \omega_B = c_3 \cdot \omega_B, \text{ mit}$$

$$(27) \quad c_1 = \frac{(EI)_{LB}}{(EI)_B} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{m_{LB}}{m_B}$$

Sofern keine ständigen Nutzlasten wie Belag, Gehwege, Geländer usw. vorhanden sind, bzw. vernachlässigt werden, so kann für  $c_2$  auch das Verhältnis der Baustoffdichten  $\gamma_{LB}/\gamma_B$  gesetzt werden. Die Beziehung (26) gilt für alle Eigenkreisfrequenzen eines Systems mit  $n$  Freiheitsgraden. Sie ist in Bild 8 für die praktisch vorkommenden Bereiche von  $c_1$  und  $c_2$  graphisch dargestellt.

Als Beispiel sollen die Eigenfrequenzen der Leichtbetonbrücke Schaffhausen mit derjenigen einer fiktiven analogen Brücke aus normalem Beton mit gleichen Abmessungen und gleicher Druckfestigkeit verglichen werden. Gemäss den in der

Norm SIA 162 bzw. in den zugehörigen Leichtbetonrichtlinien Nr. 33 angegebenen Beziehungen zwischen  $E$ -Modul und Würfeldruckfestigkeit sowie mit den Dichten (einschliesslich Armierungen) von  $\gamma_{LB} = 1,9 \text{ t/m}^3$  und  $\gamma_B = 2,5 \text{ t/m}^3$  und unter Berücksichtigung der Masse der ständigen Nutzlasten ergeben sich:

$$c_1 = \frac{10000}{19000} = 0,53; \quad c_2 = 0,785$$

Damit wird

$$\omega_{LB} = \sqrt{\frac{0,53}{0,785}} \omega_B = \sqrt{0,68} \cdot \omega_B = 0,82 \omega_B$$

Demnach wäre z.B. die erste Eigenfrequenz einer analogen Betonbrücke mit gleichen Abmessungen  $f_{(1)B} = 3,07 \text{ Hz}$  entsprechend  $f_{(1)LB} = 2,51 \text{ Hz}$ . Das Beispiel ist in Bild 8 eingetragen.

#### 4.2 Amplituden bei Resonanz

Es sollen die Amplituden analoger Leichtbeton- und Betontragwerke für den Fall der Resonanz bei den durch Gleichung (26) einander zugeordneten Eigenfrequenzen verglichen werden. Dieser Vergleich hat somit nur Aussagekraft für Tragwerke, die durch eine Erregerkraft mit variabler Frequenz gemäss (1) beansprucht werden. Für eine Störkraft mit einer ganz bestimmten, stets gleich bleibenden Frequenz ist hingegen der Abstand dieser Frequenz von der «nächstliegenden» Eigenfrequenz von Bedeutung. Für diesen Fall lassen sich keine allgemein gültigen Vergleichsergebnisse formulieren.

Bei Resonanz kann man sich auf diejenige Eigenfrequenz und Eigenschwingungsform beschränken, für die gilt

$$(28) \quad \omega = \omega_{(j)}$$

Da zudem die der Lösung der homogenen Differentialgleichung entsprechende Schwingung infolge der Dämpfung nach einiger Zeit verschwunden ist, bleibt von Gleichung (22) noch

$$(29) \quad v_i(t) = v_{i(j)} \cdot q_{(j)} \sin(\omega t + \Phi_{(j)})$$

Die Amplitude bei Resonanz wird damit

$$v_{i \max} (\omega = \omega_{(j)}) = v_{i(j)} \cdot \frac{P_{(j)}}{2 \omega^2_{(j)} \left( \frac{\omega_b}{\omega_{(j)}} \right)}$$

Aus (1) folgt

$$(30) \quad P_{iLB} = \left( \frac{\omega_{LB}}{\omega_B} \right)^2 P_{iB} = c^2_3 P_{iB}$$

Mit (14) und wegen  $\left( \frac{\omega_b}{\omega_{(j)}} \right)^2 \Pi = \delta_{LB} = \delta_B$  wird die Beziehung der Amplituden zu

$$(31) \quad v_{i \max LB} = \frac{1}{c_2} v_{i \max B}$$

Für eine in beiden Fällen gleich grosse, d.h. frequenzunabhängige Erregerkraft ist  $P_{iLB} = P_{iB}$ . Damit wird

$$(32) \quad v_{i \max LB} = \frac{1}{c_1} v_{i \max B}$$

Die Gleichungen (31) und (32) sind in Bild 9 dargestellt.

Als Beispiel sollen die Amplituden der im vorigen Abschnitt definierten beiden Brücken miteinander verglichen werden. Nach Gleichung (31) ergibt sich  $v_{i \max LB} = 1,27$

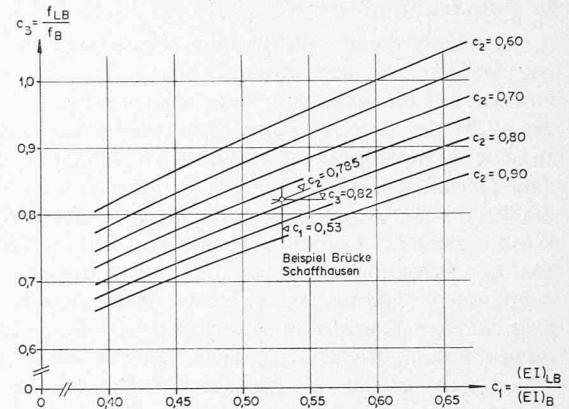


Bild 8. Verhältnis der Eigenfrequenzen analoger Leichtbeton- und Betontragwerke

$v_{i \max B}$ . Könnte man also an der analogen Betonbrücke mit der gleichen Schwingungsmaschine einen Versuch durchführen, so würde man – immer unter den getroffenen Voraussetzungen – entsprechend der an der Leichtbetonbrücke bei  $f_{(1)LB} = 2,51 \text{ Hz}$  festgestellten maximalen Amplitude von 0,54 mm an der Betonbrücke bei  $f_{(1)B} = 3,07 \text{ Hz}$  eine maximale Amplitude von 0,42 mm messen. Für die im Versuch bei  $f_{(1)LB} = 2,51 \text{ Hz}$  aufgebrachte Erregerkraft ergäbe sich nach Gleichung (32) hingegen bei  $f_{(1)B} = 3,07 \text{ Hz}$  eine Amplitude von nur 0,29 mm. Beide Beispiele sind in Bild 9 eingetragen.

Schliesslich sei noch der Einfluss einer Rissbildung kurz diskutiert, obwohl die hergeleiteten Beziehungen streng genommen nur für einen ideal elastischen und damit auch rissefreien Zustand gelten. Durch die Rissbildung nimmt die Biegesteifigkeit bekanntlich ab, bei Leichtbetonquerschnitten allerdings in geringerem Massen als bei analogen Betonquerschnitten. Im vollständig gerissenen Zustand ist die Biegesteifigkeit nahezu gleich. Dies bedeutet, dass  $c_1$  gegen 1 geht und  $c_3$  sogar grösser als 1 werden kann. Daraus ist zu schliessen, dass mit fortschreitender Rissbildung die Eigenfrequenzen analoger Leichtbeton- und Betonkonstruktionen sich nicht nur ändern, sondern auch mehr und mehr angleichen. Daselbe dürfte – bei gleicher Dämpfung – für die Amplituden zutreffen.

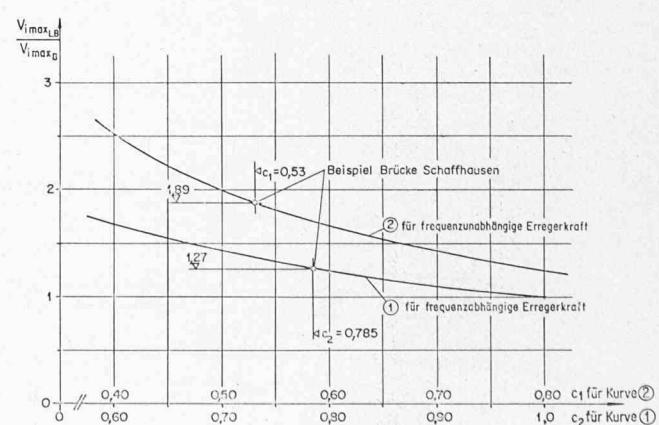


Bild 9. Verhältnis der maximalen Amplituden bei frequenzabhängiger und frequenzunabhängiger Erregerkraft bei analogen Leichtbeton- und Betontragwerken im Falle der Resonanz

## 5. Folgerungen

Im Falle dieser Leichtbetonbrücke gelang es recht gut, verschiedene bei den dynamischen Versuchen gemessene Größen auf theoretischem Wege nachzurechnen. Dabei kam der Wahl des Berechnungsmodells entscheidende Bedeutung zu. Die zum Vergleich durchgeföhrten Abklärungen zeigen, dass *Leichtbetonkonstruktionen kein wesentlich anderes dynamisches Verhalten aufweisen als analoge Betonkonstruktionen*. Wohl besteht bei Leichtbetonkonstruktionen im Vergleich zu analogen Betonkonstruktionen die Tendenz zu etwas grösseren Amplituden. Indessen ist bei beiden Bauwerkarten der Einfluss anderer Konstruktionsmerkmale wie Schrankheit, statisches System, Rissebildung usw., auf das dynamische Verhalten meist grösser als die Baustoffwahl. Bei Leichtbetonkonstruktionen ist daher, wie bei Betonkonstruktionen, stets eine Beurteilung aufgrund der konkreten Gegebenheiten erforderlich.

Beim Leichtbeton, aber auch beim Beton, bestehen wesentliche Wissenslücken über wichtige Größen, wie z. B.

Dämpfung, Einfluss von Rissebildung und Vorspanngrad sowie Verhalten bei dynamischer Beanspruchung im plastischen Bereich. Zur besseren Klärung dieser Fragen werden deshalb im Rahmen eines Forschungsprogrammes am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETHZ vergleichende Versuche und entsprechende theoretische Studien durchgeführt.

## Literaturverzeichnis

- [1] K. Wehrli: Die Leichtbetonbrücke Schaffhausen. «Schweizerische Bauzeitung» 94 (1976). Erscheint demnächst.
- [2] H. Bachmann: Die Arbeit des Ingenieurs zwischen Wirklichkeit und Algorithmus. «Schweizerische Bauzeitung» 88 (1970), H. 49, S. 1133 bis 1139.
- [3] V. Koloušek: «Dynamik der Baukonstruktion». VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1962.

Adresse der Verfasser: Prof. Dr. Hugo Bachmann und Rudolf Dieterle, dipl. Ing., Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Hönggerberg, 8093 Zürich.

# Die Leichtbetonbrücke Schaffhausen

## Belastungs- und Schwingungsversuche

Von S. Balás, Dübendorf

DK 624.27.4 : 666.973

In den letzten 18 Jahren führte die EMPA an ungefähr 250 neuen Brücken Belastungsversuche durch. Die Versuche erbrachten Informationen sowohl für das Tragverhalten der Brücke, als auch für deren Qualität. Gleichzeitig wurde in den meisten Fällen auch das dynamische Verhalten der Brücke untersucht und festgestellt, wie die Brücke auf Erschütterungen, Stöße und Schwingungen, welche durch den Verkehr entstehen, reagiert. Die Versuche gewinnen dadurch an Bedeutung, wenn die ermittelten Ergebnisse direkt mit theoretischen Werten verglichen werden können. Hierbei erhält der Projektverfasser wertvolle Angaben darüber, wie gut seine Annahmen dem tatsächlichen Verhalten der Brücke entsprachen.

Es ist immer interessant, das Verhalten einer Brücke von nicht alltäglicher Konstruktion – wie die vorliegende – unter statischer und dynamischer Beanspruchung zu prüfen. Die dreifeldrige Rahmenbrücke in Schaffhausen hat eine maximale Spannweite von 55,80 m und stellt ein sogenanntes

Sprengwerk dar. Sie ist symmetrisch bezüglich der Brückemitte, räumlich leicht gekrümmmt und hat einen teilweise vorgespannten Leichtbetonüberbau. Die genaue Beschreibung der Brücke ist in [1] gegeben.

Die Versuche wurden im Auftrag des Tiefbauamtes des Kantons Schaffhausen von der EMPA in Zusammenarbeit mit dem Ingenieurbüro Wehrli & Weimer, dem Projektverfasser, durchgeführt. Die statischen- und die Fahrversuche wurden auf Anregung von Prof. Dr. H. Bachmann mit weiteren Schwingversuchen ergänzt. So konnten die berechneten theoretischen Werte überprüft werden [2].

## Statische Versuche

Bei den statischen Versuchen handelte es sich um einen zentralen und einen exzentrischen Lastfall, wobei der Einfluss von zwei wandernden Lasten mittels 10 induktiven Weggebern an 5 verschiedenen Messquerschnitten ermittelt wurde

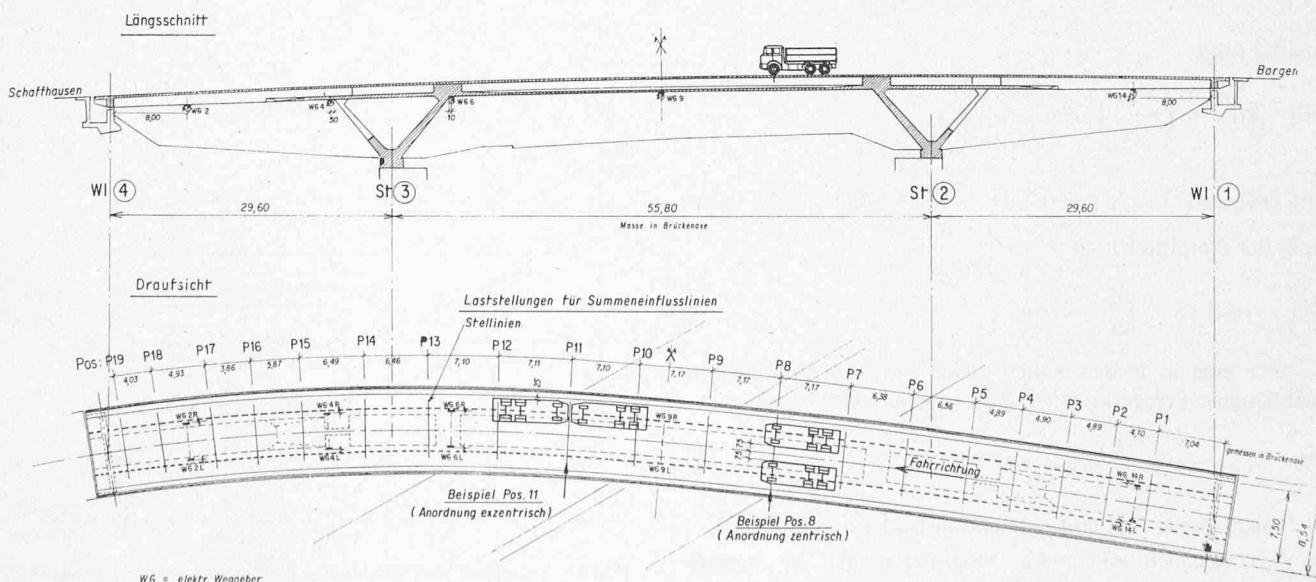


Bild 1. Abmessungen, Instrumentenanordnung und Laststellungen