

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 93 (1975)  
**Heft:** 21

**Artikel:** Berechnung der Traglast von Stahlbetonplatten mittels finiter Elemente  
**Autor:** Anderheggen, E. / Knöpfel, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-72752>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Berechnung der Traglast von Stahlbetonplatten mittels finiter Elemente

Von Dr. E. Anderheggen, und Dr. H. Knöpfel, Zürich

DK 624.04

### 1. Einleitung

Die numerische Berechnung der statischen Tragfähigkeit von beliebig geformten, beliebig armierten und beliebig belasteten Stahlbetonplatten kann heute mit Hilfe der beiden am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich entwickelten Computerprogramme IRIS-L und IRIS-C erfolgen. Das Ziel dieses Aufsatzes ist, die Bauingenieure aus der Praxis über Möglichkeiten und Grenzen dieser Programme sowie über die für die Aufstellung des mathematischen Modells zugrunde gelegten Annahmen zu orientieren. Auf theoretische Herleitungen wird so weit wie möglich verzichtet, weil diese in früheren Publikationen ([4], [6]) zu finden sind. Wer die Computerprogramme für praktische Berechnungen verwenden will, erhält die dazu notwendigen Angaben vom Institut für Baustatik und Konstruktion der Eidg. Technischen Hochschule Zürich.

Das verwendete numerische Verfahren stützt sich auf die Annahmen der Plastizitätstheorie für die Biegung und Drillung von Platten (starr-plastische Beziehungen zwischen Momenten und Krümmungen). Die Schubbruchsicherheit wird nicht untersucht. Für die Approximation des Momenten- und Verschiebungsverlaufs werden dreieckige finite Elemente verwendet.

Die Geometrie und die Armierung der Platte ist bei der Traglastberechnung gegeben. Die senkrecht zur Plattenebene wirkende Last  $\lambda p(x,y)$  ist bis auf den Traglastfaktor  $\lambda$  bekannt. Es wird derjenige Wert von  $\lambda$  berechnet, für welchen unbeschränktes Fließen auftritt. Im gleichen Rechengang wird auch die Form des Bruchmechanismus bestimmt. Man erhält jedoch keine Informationen über den Gebrauchszustand.

Der Traglastfaktor  $\lambda$  kann sowohl aufgrund des statischen (oder «unteren») wie auch aufgrund des kinematischen (oder «oberen») Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie ermittelt werden. Für eine auf Biegung und Drillung beanspruchte Platte lautet die mathematische Problemstellung wie folgt:

#### *Nach dem statischen Grenzwertsatz:*

Es ist ein möglichst grosser Wert des Traglastfaktors  $\lambda$  zu suchen. Die entsprechende Belastung  $\lambda p(x,y)$  muss mit den Momenten  $m_x(x,y)$ ,  $m_y(x,y)$  und  $m_{xy}(x,y)$  im Gleichgewicht sein. Zudem dürfen diese Momente die Plastizitätsbedingung nirgends verletzen.

#### *Nach dem kinematischen Grenzwertsatz*

Es ist ein möglichst kleiner Wert des Traglastfaktors  $\lambda$  zu suchen. Die äussere Leistung  $L$  der entsprechenden Belastung  $\lambda p(x,y)$  ist gleich der inneren Dissipationsleistung  $D$ . Das zur Bestimmung von  $L$  verwendete Verschiebungsgeschwindigkeitsfeld und das zur Bestimmung von  $D$  verwendete Dehnungsgeschwindigkeitsfeld müssen miteinander kinematisch verträglich sein.

Die Verwendung von parametrischen Näherungsfunktionen (Methode der finiten Elemente) führt im allgemeinen dazu, dass sowohl das Gleichgewicht wie die kinematische Kompatibilität lokal verletzt sind. Es kann daher in der Regel nicht ein oberer bzw. unterer Grenzwert für  $\lambda$  resultieren, wohl aber ein guter und bei Verfeinerung der Einteilung in Elemente zum richtigen Wert konvergierender Näherungswert.

### 2. Einfaches Demonstrationsmodell

Die Methode, die für die Traglastberechnung von Stahlbetonplatten verwendet wurde, soll zuerst an Hand des bekannten einfachen, symmetrischen Fachwerkmodells ([1], S. 1) erläutert werden.

Der statische Grenzwertsatz verlangt, dass die Normalkräfte  $S_1$  und  $S_2$  nicht grösser sind als die Fließ-Normalkraft  $S_f$ , und dass  $S_1$  und  $S_2$  im Gleichgewicht mit der Traglast  $\lambda p$  stehen. Die Gleichgewichtsbedingung kann mittels der virtuellen Verschiebung  $W^*$  formuliert werden (siehe Bild 1). Man erhält damit das in Bild 2a angegebene lineare Programm.

Der kinematische Grenzwertsatz verlangt, dass die äussere Leistung infolge der Verschiebungsgeschwindigkeit  $\dot{W}$  gleich ist wie die innere Dissipationsleistung. Diese berechnet sich mit Hilfe der verallgemeinerten Dehnungsgeschwindigkeitsparameter  $\dot{\beta}_1$  und  $\dot{\beta}_2$ , welche das Integral der Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{\epsilon}_1$  und  $\dot{\epsilon}_2$  über die entsprechenden Stablängen darstellen. Zudem muss  $\dot{W}$  mit  $\dot{\beta}_1$  und  $\dot{\beta}_2$  kinematisch verträglich sein. Normalisiert man den Kollapsmechanismus so, dass  $P \dot{W} = 1$  ist, erhält man das in Bild 4a angegebene lineare Programm. Die in den Bildern 2a und 4a dargestellten linearen Programme sind zueinander «dual» und somit völlig äquivalent. Sie liefern für  $\lambda$  den gleichen Optimalwert. Dasselbe gilt für die allgemeinen, in Matrixschreibweise angegebenen linearen Programme der Bilder 2b und 4b. Diese werden in Abschnitt 4 näher erörtert.

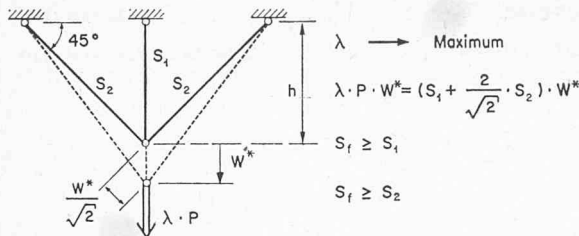


Bild 1. Bedingungen aus dem statischen Grenzwertsatz

1	$\lambda$	$S_1$	$S_2$
$\lambda =$	1		
$0 =$	-P	1	$\sqrt{2}$
$0 \leq$	$S_f$		-1
$0 \leq$	$S_f$		-1

a)  $\rightarrow \text{Max}$

1	$\lambda$	$\{M\}$
$\lambda =$	1	
$\{0\} =$	-{P}	[G]
$\{0\} \leq$	{c}	-[u]

b)  $\rightarrow \text{Max}$

Bild 2. Lineares Programm aus dem statischen Grenzwertsatz

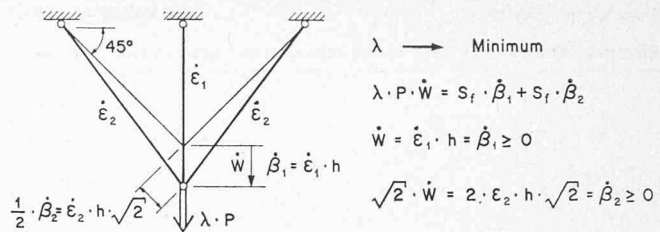


Bild 3. Bedingungen aus dem kinematischen Grenzwertsatz

1	$\dot{W}$	$\dot{\beta}_1$	$\dot{\beta}_2$
$\lambda =$		$S_f$	$S_f$
$0 =$	1	-P	
$0 =$		1	-1
$0 =$	$\sqrt{2}$		-1

a)  $\rightarrow \text{Min}$

1	$\{\dot{W}\}$	$\{\dot{\beta}\} \geq \{0\}$
$\lambda =$		{c}
$\{0\} =$	1	-{P}
$\{0\} =$		[G] <sup>T</sup>
$\{0\} =$		-[u] <sup>T</sup>

b)  $\rightarrow \text{Min}$

Bild 4. Lineares Programm aus dem kinematischen Grenzwertsatz

### 3. Plastizitätsbedingungen für Stahlbetonplatten

Die Fließbedingung von Johansen hat sich in verschiedenen Versuchen bestätigt [5]. Sie verlangt, dass das Biegemoment  $m_n$  für jede beliebige Richtung  $n$  der Plattenebene im geschlossenen Intervall zwischen den zugehörigen Fließmomenten der unteren und oberen Bewehrung ( $P_n$  und  $N_n$ ) liegt:

$$-N_n \leq m_n \leq P_n$$

Daraus ergeben sich nichtlineare Fließbedingungen, die, um die lineare Programmierung verwenden zu können, linearisiert werden müssen. Es werden die folgenden linearisierten Fließbedingungen verwendet ([2], S. 67):

$$\{C_q\} - [U_q] \{m(\text{in } q)\} = \begin{Bmatrix} P_x + P_{xy} \\ P_x - P_{xy} \\ P_y + P_{xy} \\ P_y - P_{xy} \\ N_x + N_{xy} \\ N_x - N_{xy} \\ N_y + N_{xy} \\ N_y - N_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Der Kontrollpunktindex  $q$  bezeichnet einen Punkt der Platte, für den die Plastizitätsbedingungen kontrolliert werden.  $[U_q]$  wird als Ungleichungsmatrix,  $\{C_q\}$  als Vektor der plastischen Widerstände im Kontrollpunkt  $q$  bezeichnet.  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $N_x$  und  $N_y$  stellen die plastischen Widerstände (d.h. die Fließmomente) für positive und negative Momente in  $x$ - und  $y$ -Richtung dar. Die Widerstände  $P_{xy}$  und  $N_{xy}$  treten nur auf, wenn  $x$  und  $y$  nicht die Richtungen einer orthogonalen Armierung sind. Für eine nichtorthogonale Armierung kann eine äquivalente orthogonale Armierung bestimmt werden ([2], S. 58). Ein Beispiel für die Fließfigur, die sich aus den angegebenen linearisierten Fließbedingungen ergibt, ist in Bild 6 dargestellt.

Der zulässige Bereich der linearisierten Fließfigur wird von der nichtlinearen Fließfigur umschrieben und liegt folglich «auf der sicheren Seite». Als Bemessungsregel formuliert bedeutet es, dass z.B. die untere bzw. die obere Armierung in  $x$ -Richtung auf den maximalen bzw. minimalen Wert von  $m_x \pm m_{xy}$  (Armierungsmoment) bemessen werden soll.

### 4. Herleitung des linearen Programmes

Um den Verschiebungs- und den Momentenverlauf als Funktionen diskreter Parameter darstellen zu können, wird die Platte in dreieckige finite Elemente unterteilt. Als Verschiebungsparameter werden die Durchbiegungen  $W_k$  in jedem Knoten  $k$  gewählt. In den angrenzenden Elementen verlaufen die Durchbiegungen  $w(x,y)$  linear (siehe Bild 5). Der Momentenverlauf wird auf zwei Arten angenähert. Beim Programm IRIS-L (wobei L für «linear» steht) wird für die Momente  $m_x(x,y)$ ,  $m_y(x,y)$  und  $m_{xy}(x,y)$  der gleiche lineare Verlauf wie für die Durchbiegungen  $w(x,y)$  angenommen. Als Momentenparameter treten somit drei diskrete Momentenwerte  $M_{xk}$ ,  $M_{yk}$  und  $M_{xyk}$  in jedem Knoten  $k$  auf. Beim Programm IRIS-C (wobei C für «constant» steht) werden als Momentenparameter die entlang jeder Seite  $i$  der Elementmasche konstant verlaufenden Seitennormalmomente  $M_{ni}$  gewählt. Die Momente  $m_x(x,y)$ ,  $m_y(x,y)$  und  $m_{xy}(x,y)$  sind innerhalb jedes Elementes konstant und können mittels einfacher Gleichgewichtsbeziehungen aus den drei entsprechenden Seitennormalmomenten bestimmt werden.

Der statische Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie verlangt, dass die inneren Plattenmomente mit den äusseren Lasten im Gleichgewicht stehen. Entsprechende lineare Gleichungen erhält man durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen:

$$\sum_i G_{ki} M_i - \lambda P_k = 0$$

$$(k \text{ über alle vertikal verschieblichen Knoten})$$

$$\text{In Matrixschreibweise: } [G] \{M\} - \lambda \{P\} = 0$$

Dabei stellt ein Koeffizient  $G_{ki}$  der Gleichgewichtsmatrix  $[G]$  die Arbeit der Momente infolge des  $i$ -ten Momentenparameters  $M_i = 1$  für die inneren Krümmungen infolge des virtuellen Verschiebungsparameters  $W_k^* = 1$  dar. Weil die Elemente eben bleiben, wird nur entlang der Seiten der Elementmasche (wo  $\omega$ -Knickwinkel entstehen) Arbeit geleistet. Es gilt folglich für  $G_{ki}$ :

$$\text{Bei IRIS-L: } G_{ki} = \sum_j \omega_j (\inf. W_k^* = 1) m_{nj} (\inf. M_i = 1) L_j,$$

wobei der Seitenindex  $j$  alle Seiten der Elemente um den Knoten  $k$  umfasst, wo infolge  $W_k^* = 1$   $\omega$ -Winkel entstehen. Das

Moment  $m_{nj}$  stellt den Wert des linear verlaufenden Normalmomentes in der Mitte der  $j$ -ten Seite dar.  $L_j$  ist die Seitenlänge.

Bei IRIS-C:  $G_{ki} = \omega_i$  (infolge  $W_k^* = 1$ )  $L_j$

Diese Formel ist besonders einfach, weil die entlang jeder Seite  $i$  konstanten Normalmomente  $M_{ni}$  selber als Momentenparameter auftreten.

Ein Koeffizient  $P_k$  des Lastvektors  $\{P\}$  stellt die Arbeit der äusseren Lasten infolge der virtuellen Verschiebungen für  $W_k^* = 1$  dar. In der bei den IRIS-Programmen getroffenen Annahme, dass die Platte nur durch konzentrierte Knotenlasten  $\lambda Q_k$  und durch gleichmässig verteilte Elementlasten  $\lambda p_e$  belastet ist, gilt für  $P_k$ :

$$P_k = Q_k + \frac{1}{3} \sum_e p_e F_e$$

wobei der Elementindex  $e$  alle Elemente um den Knoten  $k$  umfasst.  $F_e$  ist die Elementfläche.

Kinematische Auflagerbedingungen für die Durchbiegungen  $w$  sowie statische Randbedingungen für die Normalmomente  $m_n$  werden berücksichtigt, indem die Gleichgewichtsgleichungen, welche unverschieblichen Knoten entsprechen, bzw. die Momentenparameter, welche Normalmomenten entlang frei drehbaren Rändern entsprechen, weggelassen werden.

Der statische Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie verlangt ausserdem, dass die Plastizitätsbedingungen nirgends verletzt werden. Diese sind beim IRIS-L-Modell in allen Knoten, beim IRIS-C-Modell in allen Elementen zu kontrollieren. Man erhält somit folgendes allgemeine lineare Programm für die Unbekannten  $\lambda$  und  $\{M\}$  (siehe Bild 2b):

$\lambda \rightarrow \text{Maximum}$

$$0 = -\{P\} \lambda + [G] \{M\}$$

$$0 \leq \{C\} - [U] \{M\}$$

Dabei setzt sich der Widerstandsvektor  $\{C\}$  aus den  $\{C_q\}$ -Vektoren aller Kontrollpunkte zusammen (vgl. Abschnitt 3). Der Kontrollpunktindex  $q$  läuft beim IRIS-L-Modell über alle Knoten und beim IRIS-C-Modell über alle Elemente. Die Ungleichungsmatrix  $[U]$  ist beim IRIS-L-Modell eine aus gleichen  $[U_q]$ -Untermatrizen zusammengesetzte diagonale Hypermatrix. Eine etwas komplizierte Struktur weist die  $[U]$ -Matrix beim IRIS-C-Modell auf, weil die zu kontrollierenden Elementmomente  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_{xy}$  aus den Seitennormalmomenten  $M_{ni}$  hergeleitet werden müssen.

Aus einem gegebenen Momentenverlauf können «Gleichgewichtlasten», d.h. äussere Lasten, welche mit den inneren Momenten exakt im Gleichgewicht sind, hergeleitet werden. Diese sind beim IRIS-L-Modell konstante Linienlasten entlang der Elementseiten sowie – aufgrund der klassischen

Kirchhoffschen Plattentheorie – konzentrierte Einzellasten in den Randeckknoten. Beim IRIS-C-Modell sind die Gleichgewichtlasten konzentrierte Einzellasten in den Knoten. Ist die Platte nur durch konzentrierte Knotenlasten belastet, wird das Gleichgewicht exakt erfüllt. Weil damit alle Bedingungen des «unteren» Grenzwertsatzes erfüllt sind, erhält man für  $\lambda$  aus dem IRIS-C-Programm einen unteren Grenzwert der wirklichen Traglast.

Jedes lineare Programm hat sein duales Programm. Wie in Abschnitt 2 für das einfache Fachwerkmodell, könnte das duale Programm aufgrund des kinematischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie auch für Platten hergeleitet werden. Hier soll nur das Endresultat angegeben werden (siehe Bild 4b):

$$\lambda = \{C\}^T \{\dot{\beta}\} \rightarrow \text{Minimum}$$

$$0 = 1 - \{P\}^T \{\dot{W}\}$$

$$0 = [G]^T \{\dot{W}\} - [U]^T \{\dot{\beta}\}$$

Die zwei linearen Programme der Bilder 2b und 4b sind völlig äquivalent und liefern für den Traglastfaktor  $\lambda$  den gleichen Optimalwert. Wird eines gelöst, erhält man gleichzeitig die Lösung des anderen Programmes. Es ergeben sich somit nicht nur die Werte der Momentenparameter  $\{M\}$  (diese beschreiben eine mögliche, sonst aber kaum sinnvolle Momentenverteilung), sondern auch die Werte der Verschiebungs- und Krümmungsgeschwindigkeitsparameter  $\{\dot{W}\}$ , welche die Form des Kollapsmechanismus angeben, sowie die Werte von verallgemeinerten Krümmungsgeschwindigkeitsparametern  $\{\dot{\beta}\}$ . Ist  $\beta_{iq}$  ungleich null, weiss man, dass die  $i$ -te linearisierte Fliessbedingung am Kontrollpunkt  $q$  für die Traglast massgebend ist.

## 5. Computerprogramme

Die Ausgangsdaten für die Computerberechnung sind: die Geometrie der Platte mit der Einteilung in finite Elemente, die Lastverteilung in Form von Einzellasten in den Knoten und verteilten Lasten über die Elemente, die plastischen Momente in den Kontrollpunkten, d.h. in den Knoten bei IRIS-L bzw. in den Elementen bei IRIS-C, sowie statische und kinematische Randbedingungen. Die Berechnung des benötigten Speicherplatzes und die Schätzung der voraussichtlichen Kosten sind in den Benützungsanleitungen zu den Programmen angegeben. Die Einteilung in finite Elemente sollte im allgemeinen nicht mehr als etwa 80 Knoten umfassen.

Aufgrund der Eingabedaten stellen die Computerprogramme die oben dargestellten linearen Programme auf. Die Berechnung des Optimums der linearen Programme erfolgt mittels eines vom revidierten Simplex-Verfahren ausgehenden Verfahrens, bei dem die Koeffizienten der Ungleichungsmatrix nicht gespeichert werden müssen.

Als Ergebnisse der Computerberechnung erhält man den Traglastfaktor  $\lambda$ , einen zulässigen Momentenzustand und den

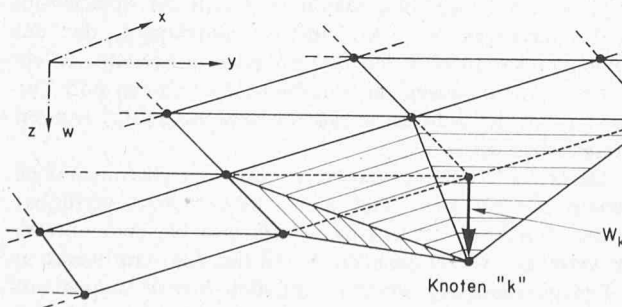


Bild 5. Durchbiegung infolge  $W_k$

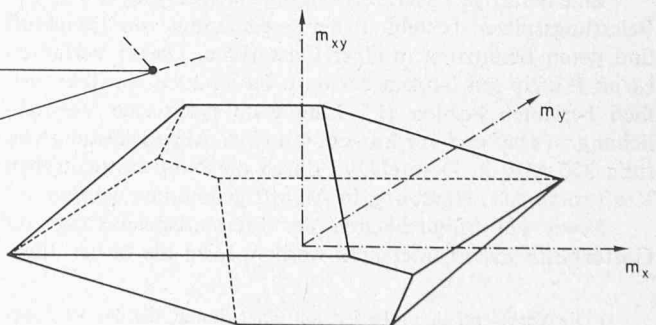


Bild 6. Fliessfigur aus linearisierten Fliessbedingungen



Mechanismus. Der resultierende Momentenzustand entspricht nicht dem effektiven Momentenzustand beim Kollaps, sondern unterscheidet sich davon durch Eigenspannungszustände. Er soll deshalb nicht für eine Bemessung verwendet werden. Der Mechanismus zeigt ein anschauliches Bild der effektiv zu erwartenden Form der Verschiebungen.

Die numerischen Berechnungen haben gezeigt, dass das IRIS-C-Modell (elementweise konstante Momente) auf wesentlich zu tiefe Werte für die Traglast führen kann, wenn die untere oder obere Armierung oder die Armierung in einer der beiden Hauptrichtungen gering ist. Das IRIS-L-Modell dürfte sich für praktische Berechnungen im allgemeinen besser eignen, weil es mit dem gleichen Rechenaufwand bessere Werte für  $\lambda$  liefert. Die Kosten für die Rechenzeit lagen z.B. bei einer Masche mit 50 Knoten unter 100 Fr. je Lastfall.

## 6. Schlussbemerkungen

Die IRIS-Programme stellen eine wertvolle Ergänzung zu den heute zahlreich vorhandenen Computerprogrammen dar, welche Platten aufgrund linear-elastischer Annahmen berechnen, und die somit im allgemeinen keine Auskünfte über Bruchsicherheit liefern können. Sie dürften deswegen in erster Linie bei solchen Plattentragwerken Anwendung finden, bei denen die Bruchsicherheit gegen einmalige ausserordentliche Lasten nachgewiesen werden muss (z.B. bei Schutzbauten) sowie auch dann, wenn bei elastisch vordimensionierten Tragwerken eine zusätzliche, auf ganz verschiedenen Annahmen basierende Kontrollrechnung gerechtfertigt erscheint. Dies dürfte öfters der Fall sein, nicht zuletzt, weil die IRIS-Programme, solange Klarheit über die getroffenen Annahmen und über die Bedeutung der am Finite-Element-Modell erhaltenen Ergebnisse herrscht, leicht zu verwenden sind und mässige Rechenkosten verursachen.

Zur Zeit werden am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETHZ ähnliche Programme entwickelt, die, je nach den zugrunde gelegten Plastizitätsbedingungen, für eine Reihe zwei-

dimensionaler Probleme, von der Traglastberechnung von Stahlbetonscheiben bis zur Bestimmung der Tragfähigkeit von Streifenfundamenten eingesetzt werden können. Eine langjährige, auf die Forderung plastischer Berechnungsmethoden ausgerichtete Tradition wird damit fortgesetzt. Was die Zukunft anbetrifft, könnte man sich fragen, ob Programme für die automatische optimale Bemessung der Armierung bei starrplastischen Stahlbetonplatten entwickelt werden sollen. Dies ist möglich, wenn auch recht aufwendig. Allerdings taucht hier die Frage auf, ob für die Praxis vollkommen automatische optimale Bemessungsmethoden geeigneter sind als nur «computerunterstützte» Bemessungsmethoden. Bei den letzteren bleibt für die Festlegung der Bemessungsparameter der Ingenieur verantwortlich, wobei ihm der Computer nur zeigt, in welcher Richtung er sein Optimum zu suchen hat. Dafür helfen aber auch die aus den IRIS-Programmen erhaltenen Ergebnisse.

## Literaturverzeichnis

- [1] Thürlimann B., Ziegler H.: Plastische Berechnungsmethoden. Kurs ETH Zürich, 1963.
- [2] Wolfensberger R.: Traglast und optimale Bemessung von Platten. Technische Forschungs- und Beratungsstelle Wildeg, 1964.
- [3] Zienkiewicz O.: Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, 1971.
- [4] Anderheggen E.: Starr-plastische Traglastberechnungen mittels der Methode der finiten Elemente. Bericht Nr. 32 des Institutes für Baustatik der ETHZ, Birkhäuser-Verlag Basel und Stuttgart, 1971.
- [5] Cardenas A. E. and Sozen M. A.: Strength and Behavior of isotropically and non-isotropically reinforced concrete slabs subjected to combinations of flexural and torsional moments. Structural Research Series No 336, University of Illinois, Urbana, 1968.
- [6] Knöpfel H.: Berechnung starr-plastischer Platten mittels finiter Elemente. Bericht Nr. 47 des Institutes für Baustatik der ETHZ, Birkhäuser-Verlag Basel und Stuttgart, 1973.

Adresse der Verfasser: Dr. E. Anderheggen, Institut für Baustatik und Konstruktion an der ETH Zürich, und Dr. H. Knöpfel, Institut für Bauplanung und Baubetrieb an der ETH Zürich.

# Luftspeicher-Kraftwerke zur Spitzendeckung

Von B. Lendorff, dipl. Masch.-Ing., Kilchberg ZH<sup>1)</sup>

DK 620.9:621.311.16

Die Elektrizitätswerke stehen vor der Aufgabe, nicht nur eine bestimmte Energiemenge an die Verbraucher abzugeben, sondern die Energieerzeugung auch den Bedarfsschwankungen anzupassen. Der übliche Verlauf der Netzbelastung während eines Tages kann Bedarfsschwankungen zwischen 40% Nachtlast und 100% Tagesspitze aufweisen. Geeignete Zusatzrichtungen zur Spitzendeckung werden um so notwendiger, wenn zur Energieerzeugung Kernkraftwerke grosser Leistung beitragen, die möglichst konstant belastet werden müssen, da sie nicht geeignet sind, den täglichen Änderungen der Netzbelastung zu folgen.

Eine derartige Zusatzvorrichtung zur Deckung von Tagesbelastungsspitzen besteht in der Speicherung von Druckluft und deren Benützung in einer Gasturbine. Dieses Verfahren ist im Prinzip seit langem bekannt. Es ist auch heürüber vielfach berichtet worden [1]. Eine erste praktische Verwirklichung ist aber erst vor kurzem mit einer Abgabeleistung von rund 300 MW in Deutschland durch die Nordwestdeutschen Kraftwerke AG, Hamburg, in Angriff genommen worden.

Bevor die Möglichkeiten der Pressluftspeicherung mit Gasturbinen näher untersucht werden, seien die bisher allge-

mein verwendeten Verfahren erwähnt, die zur Ergänzung von Grundlastkraftwerken zwecks Bewältigung der täglichen Belastungsschwankungen dienen.

## 1. Hydraulische Speicherung

Die alpinen Kraftwerke mit Saison-Speichern können zwar den täglichen Belastungsschwankungen folgen. Sie werden aber vorteilhaft durch Speicherpumpen ergänzt, welche über Nacht oder Wochenende verfügbare Überschussenergie verwenden, um Wasser von einem Zwischenbecken in den höher gelegenen Stausee zurückzupumpen. Dieses wird nachher für die Deckung der täglichen Belastungsspitzen im Turbinenbetrieb wieder ausgenützt. Damit lässt sich der Speicherung von Winterenergie ein Pendelbetrieb überlagern, der den Nachtenergieanfall und den Spitzenbedarf ausgleicht. Solche Kraftwerksausrüstungen mit kombinierten Pumpen und Turbinen sind in der Schweiz in grosser Zahl ausgeführt worden, weitere stehen im Bau [2].

Derartige Kombinationen von Saison-Speichern und überlagertem Pendelbetrieb sind nicht unbeschränkt verfügbar. Mit der Zunahme des Energiebedarfs und bei dem notwendigerweise sich vergrössernden Anteil der Kernkraftwerke an der Energieerzeugung werden zusätzlich Vorrichtungen notwendig. Als hydraulische Lösung sind in der Schweiz reine Pumpspeichieranlagen geplant, wobei vorzugsweise aus beste-

<sup>1)</sup> Die Veröffentlichung basiert auf einer Studie, die der Verfasser als Consultant der Elektro-Watt Ingenieur Unternehmung bearbeitet hat.