

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 90 (1972)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Anwendung der Methode der Finiten Elemente im Apparatebau  
**Autor:** Nehring, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-85114>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Anwendung der Methode der Finiten Elemente im Apparatebau

DK 621.001.2

Von E. Nehring, Oberhausen

Die Methoden der Festigkeitsberechnung im Apparatebau sind entscheidend dadurch bestimmt, dass die Konstruktionen des Apparatebaues und ihre Belastungen weitgehend rotations-symmetrisch sind. Die Grundformen der Konstruktionen – und in diesem Zusammenhang seien unter Konstruktionen des Apparatebaues druckführende Behälter verschiedenster Zweck-bestimmung verstanden wie Wärmetauscher, Dampferzeuger, Kolonnen und Reaktoren für chemische Anlagen, Reaktordruckgefässe, Lagerbehälter für gasförmige und flüssige Medien oder für Schüttgüter sowie Rohrleitungen und mit Einschränkungen Armaturen – können aus den Stufenkörpern Zylinder-, Kegel-, Kugel- oder Torusschale, Kreisplatte sowie Ring zusammengesetzt gedacht werden.

Bis vor etwa zehn Jahren wurde es von Herstellern, Auftraggebern und Überwachungsinstitutionen in den meisten Fällen als hinreichender Tragfähigkeitsnachweis für ein Druckgefäß angesehen, wenn die unter der Annahme gleichmässiger Spannungsverteilung über die Wanddicke berechneten Membranspannungen für jeden der rotationssymmetrischen Stufenkörper kleiner waren als die zulässigen Spannungen des verwendeten Werkstoffes; die Flansche wurden zusätzlich auf Biegung nachgerechnet. Die Auswirkung von statisch unbestimmter gegenseitiger Beeinflussung der Stufenkörper, von Diskontinuitäten, von die Rotationssymmetrie störenden Konstruktionsteilen relativ kleiner Abmessungen, von örtlichen Krafteinleitungen

gen, ungleichförmigen Temperaturfeldern im Bauteil sowie von unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten aneinandergeschweißter Konstruktionsteile wurde durch empirisch gewonnene Faktoren berücksichtigt, die dem jeweiligen Stand der Erfahrungen angepasst wurden. Daher sind die so erstellten Formeln nur für bestimmte Konstruktionsformen und Größenbereiche gültig. Diese Berechnungsmethode ist auch heute noch Gegenstand der meisten technischen Regelwerke in Europa.

Die hohen technischen Anforderungen und das erheblich gesteigerte Sicherheitsbedürfnis beim Bau kern-technischer Anlagen haben zu einer wesentlichen Verfeinerung der Berechnungsverfahren geführt, die zunächst auf Komponenten der Primärkreisläufe angewendet wurden, darüber hinaus aber auch vielfach zur Spannungs- und Verformungsermittlung an Druckgefäßsen für herkömmliche Verwendungszwecke eingesetzt werden. Die Notwendigkeit, genauere Berechnungsverfahren anzuwenden, fiel zeitlich mit der Entwicklung elektronischer Rechenanlagen zusammen, so dass damit die Möglichkeit geschaffen war, auch grosse statisch unbestimmte Systeme zu berechnen, deren Arbeitsaufwand mit Tischrechenmaschinen nicht mehr zu bewältigen wäre.

Reaktordruckgefäße werden heute allgemein nach der Stufenkörpermethode (im englischen Sprachgebrauch Free-Body-Method) berechnet. Dabei wird das Druckgefäß gedanklich in rotationssymmetrische Grundkörper zer-

legt, für die unter der Voraussetzung linearen Spannungsverlaufs über die Wanddicke die Lösungen der Differentialgleichungen nach der Theorie der biegesteifen Schale in geschlossener Form vorliegen oder durch numerische Integration gefunden werden können. An den Verbindungsstellen der Stufenkörper werden als statisch Unbestimmte die Querkraft, das Moment und unter Umständen auch eine Achsialkraft eingeführt. Durch Formulierung der Verformungen an den Rändern der Stufenkörper in Abhängigkeit von den Belastungen und durch Gleichsetzen der Randverformungen aneinandergrenzender Stufenkörper entsteht ein Gleichungssystem, mit dessen Lösung die statisch Unbestimmten gegeben sind. Selbstverständlich braucht eine Spannungsanalyse nicht in jedem Fall das gesamte Druckgefäß in einer Rechnung zu umfassen; es können vielmehr begrenzte interessierende Bereiche herausgegriffen werden, wenn entweder ihre Grenzen so weit von einer Störstelle entfernt sind, dass an den Rändern der Einfluss der Störungen abgeklungen ist, oder wenn die Grösse der statisch unbestimmten Randkräfte aus anderen Rechnungen bekannt ist.

Bild 1 zeigt den Bodenbereich des VersuchsmodeLLS eines Siedewasserreaktors. Durch die besondere Formgebung des Übergangsbereiches zwischen Zylinder und Kugelboden soll erreicht werden, dass die Meridianverdrehung des KugelbodenS, in den die Regelstabstützen eingeschweißt werden unter Innendruck verhältnismäßig klein ist, und sich damit eine geringe Richtungsabweichung der Regelstab-Führungsrohre im Betrieb einstellt. Links im Bild ist die Aufteilung der Schale in Stufenkörper mit Querkräften und Momenten als statisch Unbestimmte an den Schnittstellen dargestellt. Die Stufenkörper sind: ein langer Zylinder, zwei Torussegmente verschiedener Krümmungsrichtung und zwei Kugelsegmente. Die Unterteilung des KugelbodenS in zwei Segmente ist in diesem Fall erforderlich, um die VerschäWung des unteren Bereiches durch die Bohrungen für die RegelstäBe mit einem modifizierten ElastizitäTsmodul und einer umgerechneten Querkontraktionszahl berücksichtigen zu können.

Als statisch bestimmte Belastungen können bei der Stufenkörpermethode rotationssymmetrische Flächen- und Linienkräfte, Momente und Tempera-

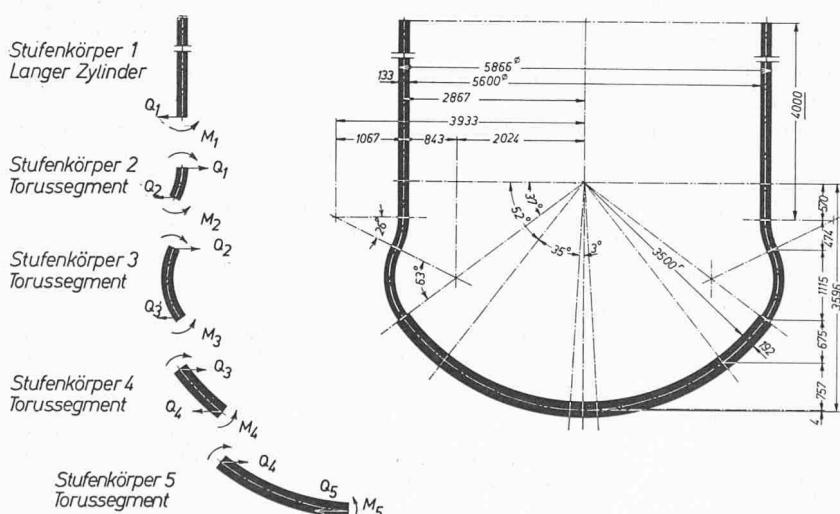


Bild 1. Versuchsmodell eines Reaktordruckgefäßes. Aufteilung nach der Stufenkörpermethode

turgradienten – im Falle des Ringes Temperaturfelder – erfasst werden. Im Grunde stellt die Stufenkörpermethode eine sehr spezielle Form der Methode der Finiten Elemente dar und zwar insofern als man die Stufenkörper als Elementtypen mit besonderen Eigenschaften auffassen kann.

Ein kleiner Schritt zur Verallgemeinerung des Berechnungsverfahrens führt zu einem Schalenprogramm, das nur einen Elementtyp enthält, und zwar ein in Meridianrichtung geradlinig begrenztes ringförmiges rotationssymmetrisches Element, unter Umständen mit veränderlicher Wanddicke, das nur in Meridianrichtung mit anderen Elementen verknüpft werden kann. Durch entsprechend feine Aufteilung sind Rotationsschalen mit beliebigem Verlauf der Wandmittellinie anzunähern. Ebenso wie bei der Stufenkörpermethode muss die Belastung rotationssymmetrisch sein und die Wanddicke klein im Verhältnis zum Radius, da auch hier üblicherweise linearer Spannungsverlauf über die Wanddicke vorausgesetzt wird. Im Gegensatz zur Stufenkörpermethode versagt ein solches Berechnungsprogramm in Fällen, bei denen die Konstruktion einen verhältnismässig steifen, dickwandigen Ring enthält, z. B. den Flanschring eines Druckgefäßes, der bei der Stufenkörpermethode nach der Stülp-Ringtheorie von Biezeno und Grammel als besonderer Elementtyp vorkommt.

Mit erheblich mehr Aufwand ist die Berechnung dickwandiger Rotationschalen verbunden, deren Wanddicke im Verhältnis zum Radius so gross ist, dass das Abklingen der Spannungen in radialer Richtung nicht mehr vernachlässigt werden kann. Dazu bieten sich Finite-Element-Programme mit rotationssymmetrischen ringförmigen Elementen, rechteckigen, dreieckigen oder trapezförmigen Querschnittes an, für welche Anschlussbedingungen sowohl in achsialer als auch in radialer Richtung formuliert sind. Während Elemente von Programmen zur Berechnung dünnwandiger Schalen ein beliebiges Verhältnis von achsialer zu radialer Erstreckung haben können, muss das Seitenverhältnis bei Elementen von Programmen zur Berechnung dickwandiger Schalen wie bei allgemeinen Finite-Element-Programmen aus numerischen Gründen auf einen Maximalwert beschränkt werden, der gewöhnlich zwischen 2,5 und 4 liegt. Daraus ist das Mass des Mehraufwandes bei der Anwendung dieser Programme zu erkennen: die Anzahl der erforderlichen Elemente zur Beschrei-

bung einer Struktur nimmt nicht nur multiplikativ mit der notwendigen Anzahl von Elementen zu, die in radialer Richtung zur hinreichend genauen Ermittlung des Spannungsverlaufes angeordnet werden müssen, sondern auch die Aufteilung in achsialer Richtung muss relativ fein gewählt werden, damit das maximal zulässige Seitenverhältnis der Elemente nicht überschritten wird.

In Bild 2 ist die Struktur des Rohrbodenbereiches eines Dampferzeugers dargestellt, wie sie zur Berechnung mit einem rotationssymmetrischen Finite-Element-Programm idealisiert wurde. Zur Entlastung des Rohrbodens wurde ein zentrales Stützrohr vorgesehen, so dass das System auch in achsialer Richtung statisch unbestimmt ist. An den Übergangsstellen der Rotationskörper wurde die Elementaufteilung verfeinert, um den Verlauf der durch die statisch unbestimmten Kräfte und Momente bewirkten Spannungen und Verformungen genauer zu erfassen.

Die bisher beschriebenen Berechnungsverfahren setzen Rotationssymmetrie sowohl für die Struktur als auch für die Belastung voraus. Sie sind damit besonders typisch für die Anwendung im Apparatebau, womit nicht gesagt sei, dass sie nicht auch in anderen Bereichen ihre Bedeutung haben.

Im folgenden wird auf die Anwendung allgemeiner Finite-Element-Programme im Apparatebau eingegangen. Reine Stabprogramme spielen für Festigkeitsprobleme des Apparatebaues eine untergeordnete Rolle, da die Konstruktionen fast ausschliesslich flächig sind. Je nach dem Masse, in dem die Biegesteifigkeit Anteil an der Tragfähigkeit eines Bauteils hat, werden Programme mit Membranelementen, biegesteifen Flächenelementen, dreidimensionalen Elementen oder einer Kombination dieser Elementtypen – gegebenenfalls auch mit Stabelementen – angewendet. Da der Aufwand an Eingabevorbereitungszeit und Rechenzeit bei allgemeinen Finite-Element-Programmen außerordentlich hoch ist, ergibt sich für den Anwender die Notwendigkeit, die zu berechnende Struktur durch Ausnutzung von Symmetrien und durch Einführung von Randkräften, die mit weniger aufwendigen Rechenverfahren bestimmt wurden, auf einen möglichst kleinen Bereich zu beschränken. Aus denselben Gründen sollten die Autoren von Finite-Element-Programmen bemüht sein, möglichst umfassende Vereinfachungen der Ein- und Ausgabe mit ihren Programmen anzubieten. Natürlich werden Hilfsprogramme für die Ein- und Ausgabe die gesamte Rechenzeit verlängern,

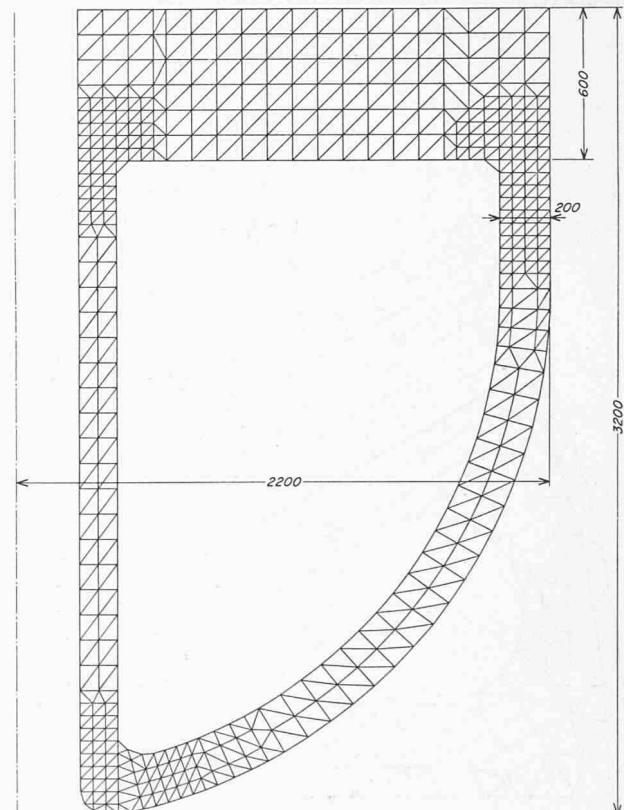


Bild 2. Idealisierte Struktur des Rohrbodenbereiches eines Dampferzeugers

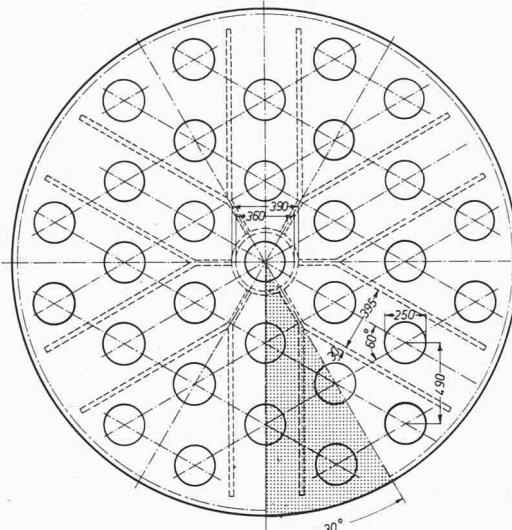
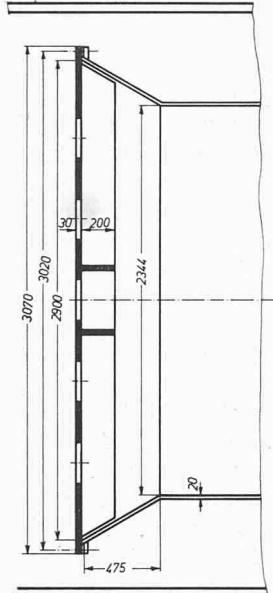


Bild 3. Tragplatte für die Grobabscheider eines Dampferzeugers. Gerasterte Fläche: zu berechnender Ausschnitt

aber das Mehr an Rechenzeit steht in keinem Verhältnis zur Ersparnis an Arbeitszeit; außerdem wird die Fehlermöglichkeit bei der Eingabe und Auswertung wesentlich vermindert. Als Eingabe erleichterung gibt es für ziemlich viele Programme bereits Unterprogramme zur automatischen Netzgenerierung in Bereichen regelmässiger Struktur. Die Möglichkeit, die Punktkoordinaten einer Struktur mit einem Abtastgerät elektronisch von der Zeich-

nung abzulesen und von einem ange- schlossenen Lochkartenstanzer自动- matisch ablochen zu lassen, ist dagegen erst bei wenigen Programmen gegeben, und auch die Möglichkeit der pro- grammgesteuerten graphischen Darstel- lung der eingegebenen Struktur zur Kontrolle der Koordinaten – im Falle eines räumlichen Tragwertes unter ver- schiedenen vorzugebenden Blickwin- keln – fehlt noch manchen ansonsten sehr gut ausgereiften Programmen.

Im Apparatebau werden, wie auch im Maschinenbau, neben den Verformungen weniger Schnittkräfte und -momente zur Beurteilung der Beanspruchung einer Konstruktion betrachtet als Spannungen. Daher sollte auch die Ausgabe von Hauptspannungen sowie von Spannungen in einem Koordinatensystem frei wählbarer und örtlich veränderlicher Orientierung – bei Konstruktionen des Apparatesbaues wären das in vielen Fällen die Umfangs-, die achsiale und radiale Richtung – vorgesehen sein. Dies nicht nur für Elementschwerpunkte, sondern auch als gewichtete Mittelwerte der angrenzenden Elementschwerpunktsspannungen für Knotenpunkte, da gewöhnlich die Knotenpunkte auf den Linien liegen, längs derer Spannungsverläufe interessant sind, während die Lage der Elementschwerpunkte in den seltensten Fällen zielstrebig festgelegt wird. Eine Ausgabe der Ergebnisse für sämtliche Knotenpunkte und Elemente wird bei grösseren Problemen so umfangreich, dass ihre Auswertung unnötig erschwert wird; insofern bietet ein geringerer Umfang der Ausgabe dem Benutzer eines Programmes mehr, wenn die Ergebnispunkte und -elemente frei gewählt werden können. Optimal wäre die graphische Darstellung der Ergebnisse längs wählbarer Verlaufslinien durch einen angeschlossenen Plotter.

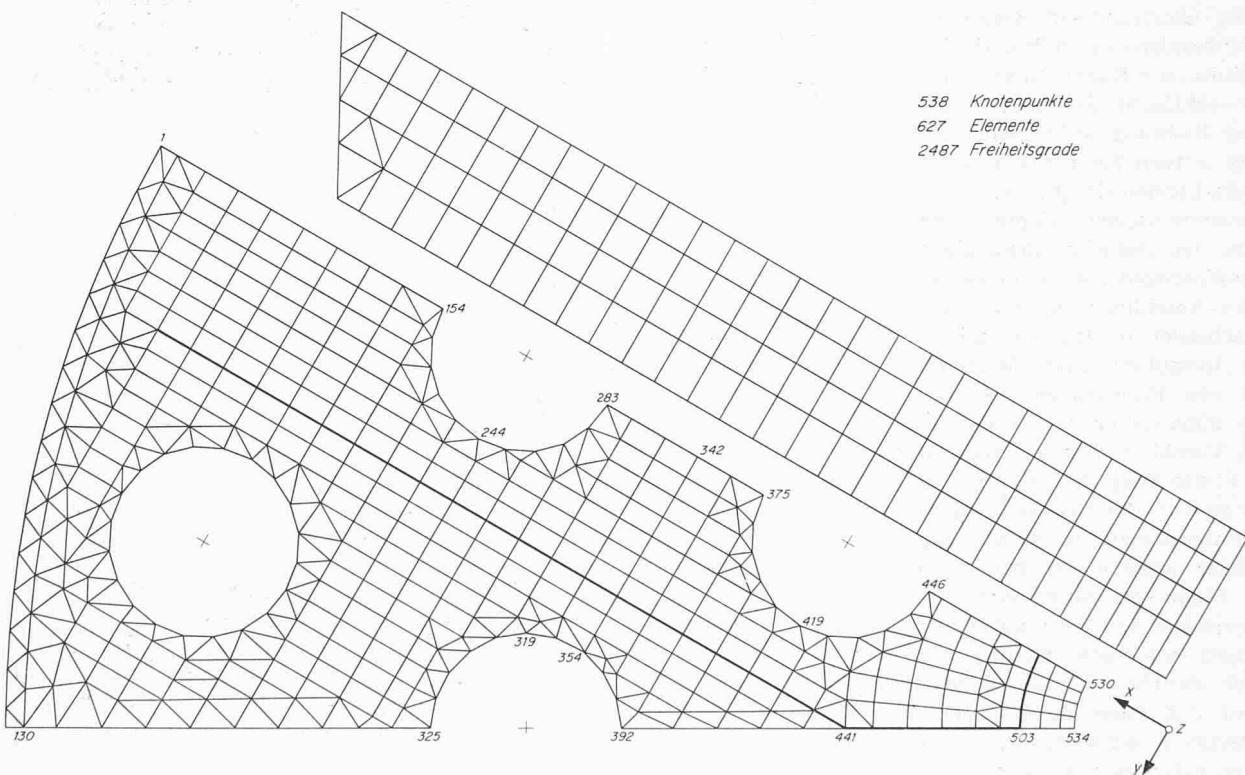


Bild 4. Idealisierte Struktur der Tragplatte (Ausschnitt nach Bild 3)

Als Beispiel für die Anwendung eines allgemeinen Finite-Element-Programmes auf ein Apparatebauproblem sei die Berechnung einer mit Rippen verstärkten kreisförmigen Platte dargestellt. Sie hat die Funktion, in den Dampferzeugern eines Kernkraftwerkes die Dampfabscheider zu tragen, die den aufsteigenden Dampf vom umlaufenden Wasser trennen sollen (Bild 3). Sie ist auf der kegelförmigen Erweiterung des zylindrischen Hüllmantels für das U-Rohr-Bündel angeschraubt. Durch die Versteifungsripen und die Ausschnitte für die Grobabscheider ist die Rotationssymmetrie der Konstruktion, durch das Gewicht der Grobabscheider und der Rippe die Rotationssymmetrie der Belastung gestört. Die Biegesteifigkeit sowohl der Platte als auch der Rippe hat wesentlichen Einfluss auf die Tragfähigkeit der Konstruktion; daher war die Berechnung mit einem Finite-Element-Programm mit flächigen biegesteifen Elementen zur genauen Bestimmung von Spannungen und Verformungen erforderlich. Die Rechnung wurde mit dem Programm STRIP, STEP S der Digital AG, Zürich, durchgeführt.

Aus Gründen der Symmetrie konnte der zu berechnende Ausschnitt auf einen Sektor von  $30^\circ$  beschränkt werden. Die Struktur dieses Sektors wurde durch 627 rechteckige, trapezförmige oder dreieckige Flächenelemente des Konstruktionstyps Schale mit 538 Knotenpunkten in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt, Bild 4. Jeder Knoten hat im allgemeinen Fall sechs Deformationsfreiheitsgrade, drei translatorische und drei rotatorische. In den Knoten, in denen nur Elemente zusammenstoßen, die in einer Ebene liegen, entfällt ein rotatorischer Freiheitsgrad. Unter Berücksichtigung der in den Punkten der Symmetrieschnitte und in den Randpunkten zu unterdrückenden Rotationen und Verschiebungen hat die Struktur insgesamt 2487 Freiheitsgrade.

Als Belastungen der Platte wurden in der Rechnung berücksichtigt: Überdruck auf die berippte Seite, das Gewicht der Dampfabscheider – es wird gleichmäßig auf die Randpunkte der kreisförmigen Ausschnitte verteilt – und das Eigengewicht der Platte. Für jeden dieser Lastfälle einzeln sowie für die Überlagerung aller wurden als Ergebnisse die Schnittkräfte und Verformungen an einer Anzahl ausgewählter Knotenpunkte und die Hauptspannungen sowie ihre Richtungen in den Mittelpunkten einiger Elemente bestimmt.

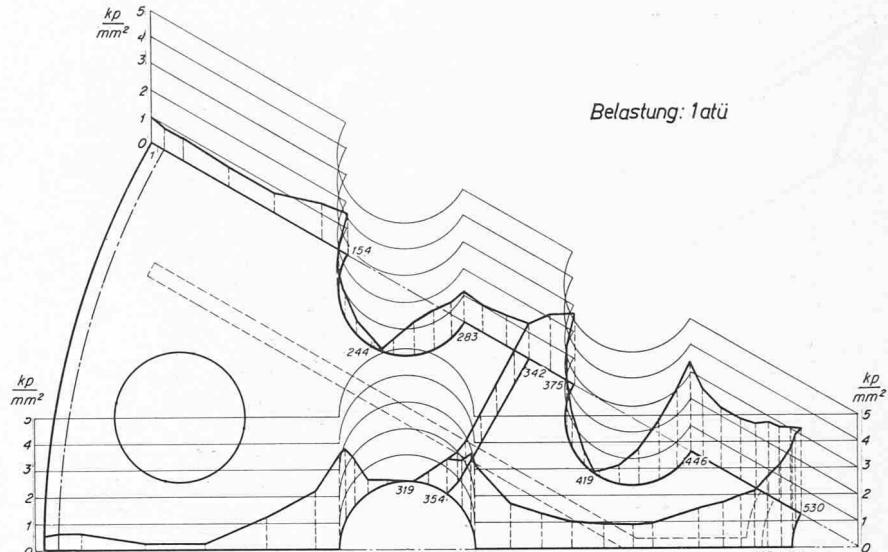


Bild 5. Umfangsspannungen in der mittleren Faserschicht

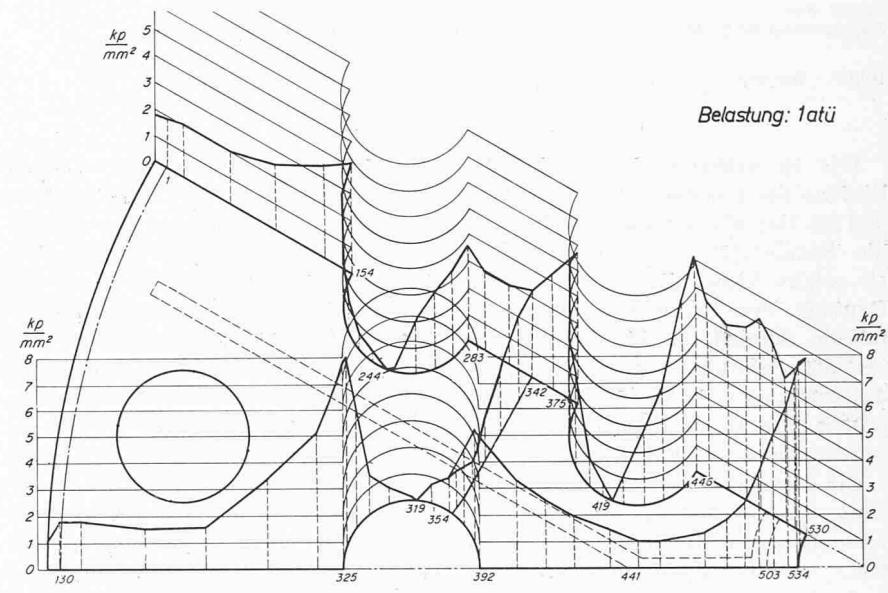


Bild 6. Umfangsspannungen in der oberen Faserschicht

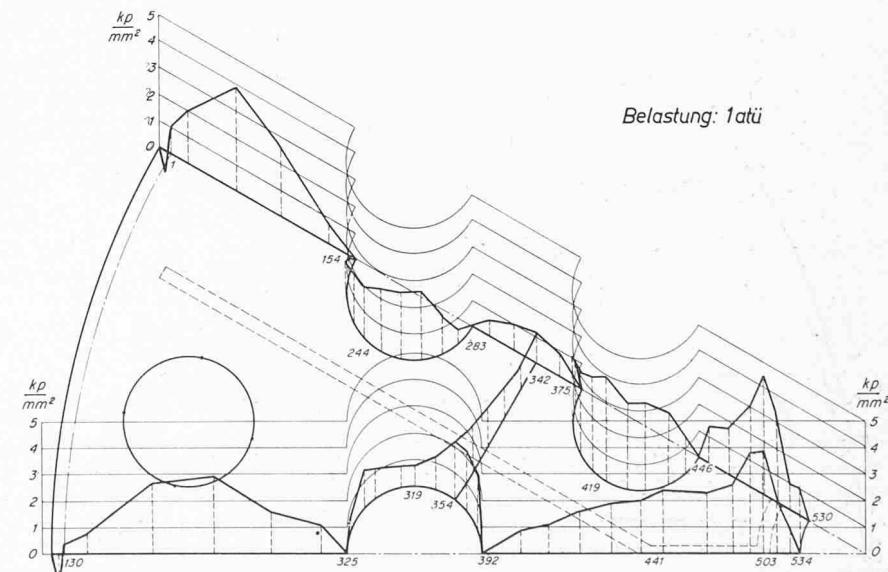


Bild 7. Radialspannungen in der obersten Faserschicht

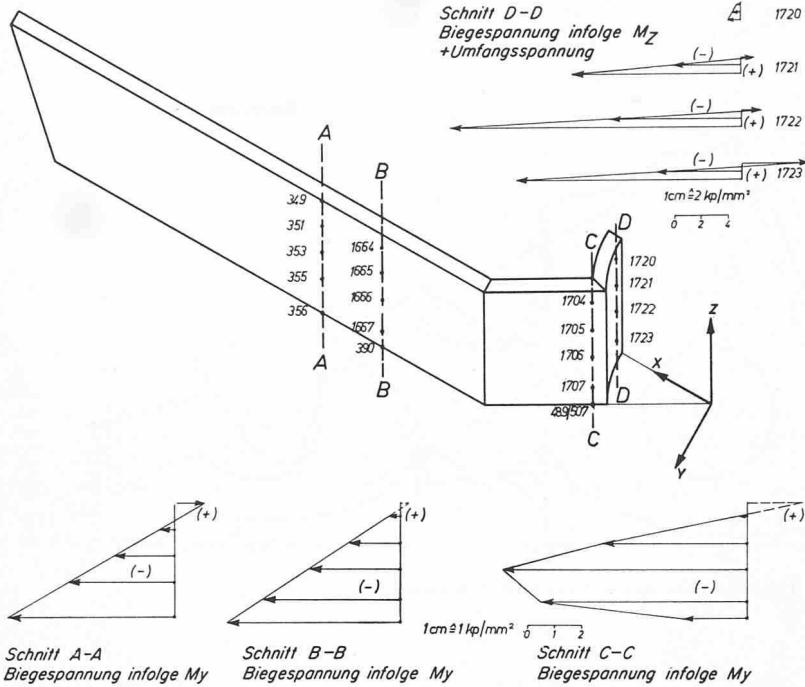


Bild 8. Biegespannungen in der Rippe

Wie zu erwarten, erwies sich der Einfluss des Eigengewichtes der Platte und des Dampfabscheidergewichtes auf die Spannungen und Verformungen als relativ klein; daher und um die Deutung der Ergebnisse zu vereinfachen, wurden die Spannungen nur für die Belastung durch Überdruck dargestellt, der im Hinblick auf dynamische Druckschwankungen zu 1 atü angenommen wurde (Bild 5).

Die Umfangsspannungen in der mittleren Faserschicht der Platte – also vorwiegend der Membranspannungsanteil – sind für die Symmetrieschnitte in Verbindung mit einem Raster, der

die Grösse der Spannungen erkennen lässt, aufgetragen. Die Gesamtrendenz der zum Plattenzentrum hin grösser werdenden Spannungen wird im Bereich der Ausschnitte gestört: an den Lochrändern durch Spannungserhöhungen, im Bereich der radialen Tangente an die Ausschnitte durch Abfall der Spannungen auf null. Die im Bereich des Knotenpunktes 441 niedrigen Spannungswerte dürfen sowohl auf eine Entlastung durch die Rippe als auch auf eine Auswirkung des Abfalles der Umfangsspannung auf den Wert Null im Punkt 419 zurückzuführen sein (Bild 6). Die Überlagerung

von Biege- und Membranspannungsanteil in der obersten Faserschicht der Platte sieht qualitativ dem Membranspannungsverlauf ähnlich. Der Maximalwert ist in beiden Fällen die Lochrandsspannung am innersten Ausschnitt (Knotenpunkt 446).

Die Radialspannung wurde in Bild 7 nur für die oberste Faserschicht dargestellt, da die neutrale Faser durch die Biegesteifigkeit der Rippe aus der Mittelebene der Platte merklich nach unten verschoben ist. An den durch die Symmetrietechnik hervorgerufenen Ecken der Ausschnitte kann keine Radialspannung wirken. Der Höchstwert tritt erwartungsgemäss in der Nähe des Plattenzentrums auf, und zwar unmittelbar vor der entlastenden konzentrischen Rippe. Allerdings sind die Werte in der Nähe des Plattenrandes nicht viel kleiner, da dort der versteifende Einfluss der Rippe nur gering ist.

In Bild 8 sind die Biegespannungen in der Rippe dargestellt und zwar in den Schnitten A, B und C die Biegung um die Y-Achse und im Schnitt D die Biegung um die Z-Achse. Ein Vergleich zwischen dem Spannungsbild der Schnitte A und B zeigt, dass sich die Lage der neutralen Faser infolge unterschiedlicher mittragender Breite der Platte verschiebt. Im unteren Bereich des Schnittes C wird die Spannung auf einen relativ kleinen Wert abgebaut, da die Steifigkeit der konzentrischen Rippe nicht ausreicht, um die radial verlaufende Rippe voll abzustützen. Für vier Punkte des Schnittes D ist über der Wanddicke die Überlagerung von Umfangsspannung und Biegespannung um die Z-Achse aufgetragen. Am Flächenelement 1722 tritt die höchste Spannung der gesamten Tragplatte auf.

Die achsiale Verformung der Tragplatte zeigt einen sehr gleichförmigen Verlauf (Bild 9), der den Schluss zulässt, dass die Wahl der Steifigkeit der Rippe und ihre Anordnung auf der Platte konstruktiv gut gelungen ist.

Nun noch einige Worte zur wirtschaftlichen und organisatorischen Seite dieser Berechnung: Die Gutehoffnungshütte hat nach Beratung durch die Digital AG die Eingabedaten innerhalb von etwa 3 bis 4 Wochen erstellt. Lochen und Prüfen der Daten und die eigentliche Rechnung wurden von der Digital AG in zehn Tagen durchgeführt. Die reine Rechenzeit des Produktionslaufes betrug auf einer Univac 1108 53 Minuten, zuzüglich 11 Minuten für Probelaufe.

Adresse des Verfassers: Dipl.-Ing. E. Nehring, D-4220 Dinslaken, Heistermannstr. 35.

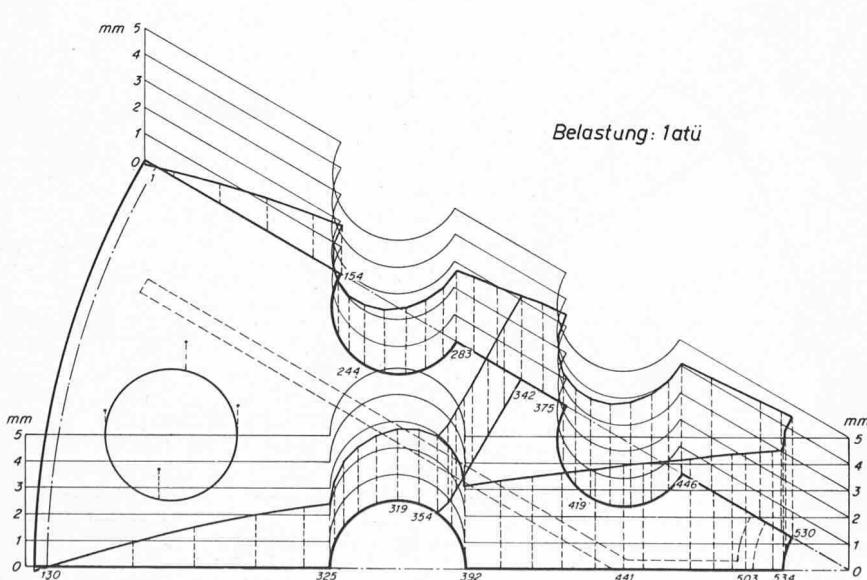


Bild 9. Tragplatte. Achsiale Verformung