Berechnungsbeispiele und Erfahrungen mit der Methode der Finiten Elemente im Maschinenbau

Autor(en): **Stumpp, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **89 (1971)**

Heft 48

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-85051

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Berechnungsbeispiele und Erfahrungen mit der Methode der Finiten Elemente im Maschinenbau

DK 539.4.001.2:621

Von **W. Stumpp**, Winterthur

Einleitung

Die beiden wohl wichtigsten Gesichtspunkte einer Spannungsberechnung sind: 1. Genauigkeit der Ergebnisse und 2. Aufwand an Zeit und Kosten um diese Ergebnisse zu erhalten. Ausser der Besprechung von Beispielen soll auch auf diese beiden Punkte etwas eingegangen werden. Nachstehend folgt eine kurze Beschreibung des Finite-Elemente-Programms, mit dem bei Gebr. Sulzer seit etwa zwei Jahren Berechnungen durchgeführt werden.

Anwendungsgebiet: Rotationssymmetrische, ebene und kombinierte Probleme im elastischen Bereich.

Programmaufbau: Deformationsmethode. Lineare Verschiebungsfunktion. Zwei Freiheitsgrade pro Knoten.

Elementtypen: △-Ringelement, △-Scheibenelement, Stabelemente für ebene und rotationssymmetrische Strukturen, Membranschalenelement.

Belastung: Mechanisch, thermisch.

Berechnung: Elementspannungen, Knotenverschiebungen.

Das Programm wurde von einer amerikanischen Firma übernommen. Bei der Benützung desselben für komplizierter geformte Körper zeigte sich bald, dass ein rationelles Arbeiten mit möglichst einfacher und kurzfristiger Eingabedatenvorbereitung und mit einer übersichtlichen Darstellung der Ausgabedaten nur mittels zusätzlichen Programmen erreicht werden konnte. Solche Programme wurden bei Sulzer ausgearbeitet; bei der Besprechung der Beispiele wird darauf zurückgekommen.

Um etwas Einblick in die Genauigkeit und Handhabung dieser Berechnungsmethoden zu bekommen, wurden damals zuerst Rechnungen an einfachen, analytisch nachprüfbaren Formen durchgeführt. Davon seien zwei Beispiele gezeigt.

Es werden die Beanspruchungen und Verformungen in einer rotierenden Scheibe infolge Fliehkraft untersucht, Bild 1. Die Scheibenmittelebene sollte aus Symmetriegründen in Achsrichtung keine Verschiebung aufweisen. Mit der Elementeinteilung nach Bild 1a ergibt sich eine achsiale Verschiebung der Scheibenmittelebene gemäss dem gezeichneten Verlauf. Die Elementeinteilung hat eine anisotrope Wirkung. Mit der Einteilung nach Bild 1b ist eine erhebliche Verbesserung zu erzielen. Die Spannungen sind für beide Einteilungsarten gleich gross. Die Genauigkeit ist sehr gut, an der Innenfaser kann die Umfangsspannung genau extrapoliert werden. Ein Zusatzprogramm wurde ausgearbeitet, um die Zentriefugalkräfte, welche in den ein-

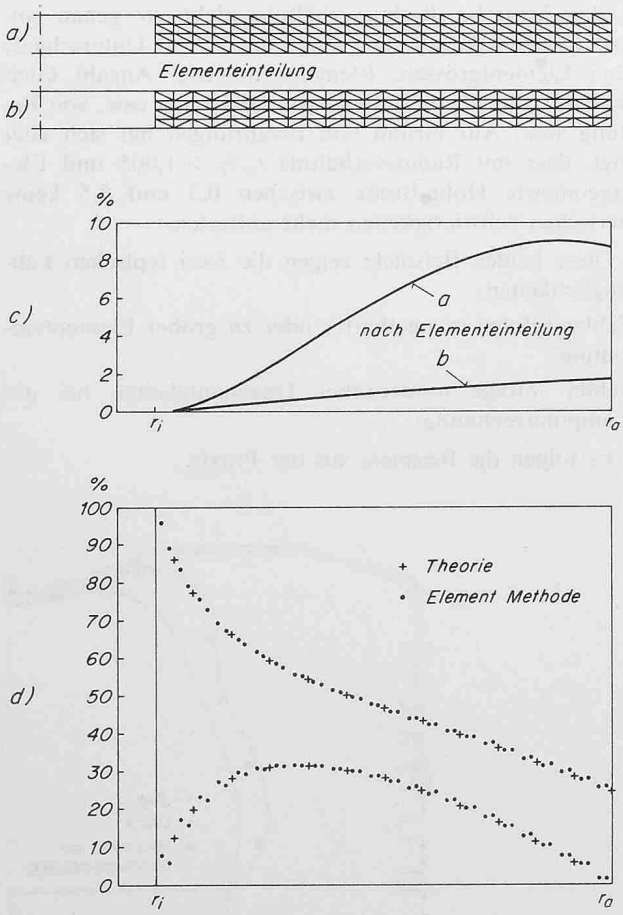


Bild 1. Rotierende Scheibe

a, b Elementeinteilung

c Achsiale Verschiebung der Scheibenmittelebene bezogen auf die radiale Verschiebung am Innenrad. Obere Kurve: Elementeinteilung nach a; untere Kurve: Einteilung nach b

d Umfangs- und Radialspannungen bezogen auf die analytisch ermittelte Umfangsspannung am Innenrad

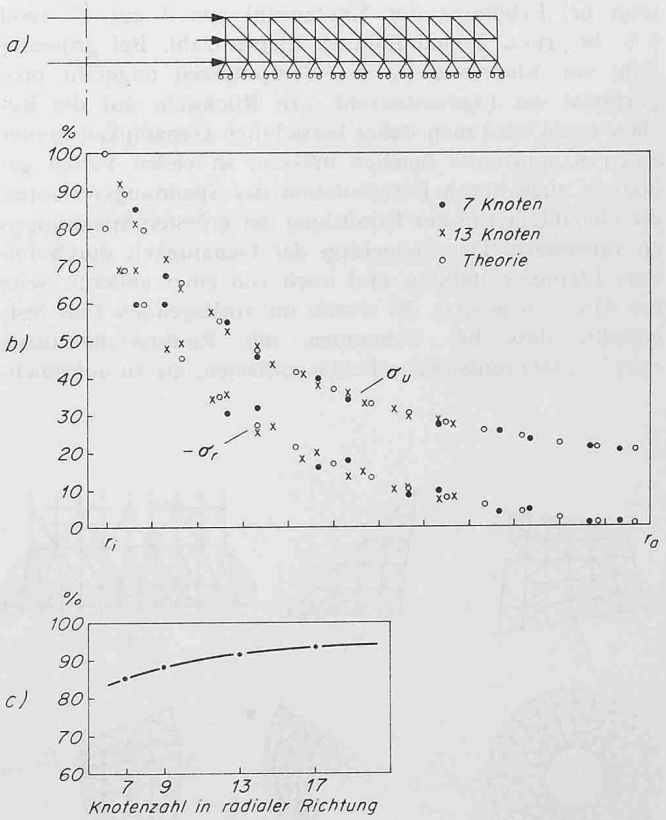


Bild 2. Zylinder unter Innendruckbelastung

a Elementeinteilung, Randbedingungen, Belastung

b Elementspannungen bezogen auf die analytisch ermittelte Umfangsspannung am Innenrad

c Elementumfangsspannungen am Innenrad, bezogen auf die analytisch ermittelte Spannung

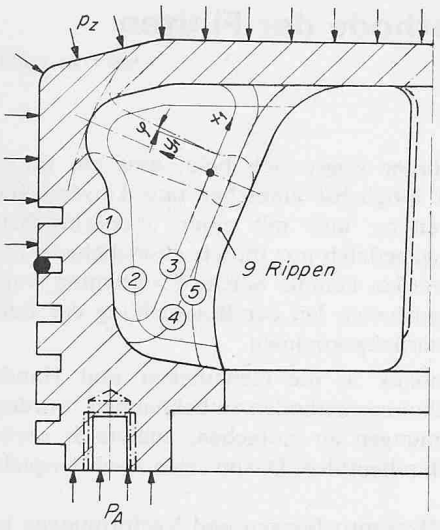


Bild 3. Kolbenoberteil für einen Dieselmotor

zelnen Knoten angebracht werden müssen, automatisch berechnen zu können. Es muss nur noch die spezifische Dichte und die Drehzahl eingegeben werden.

Dickwandiger Zylinder unter radialer Innendruckbelastung, Bild 2

Da die Summe von Umfangs- und zugehöriger Radialspannung konstant ist und demzufolge keine Achsialspannung auftritt, hat die Zylinderhöhe auf die Spannungen keinen Einfluss. Die Zunahme der Genauigkeit der Elementspannung am Innenrand mit feinerer Einteilung beträgt bei Erhöhung der Knotenzahl von 7 auf 17 rund 8 % bei rund 2,6mal höherer Elementzahl. Bei grösserer Zahl von Elementen ist die Computerzeit ungefähr proportional der Elementanzahl. Mit Rücksicht auf die Rechenkosten wird man daher hinsichtlich Genauigkeit immer einen Kompromiss machen müssen; in vielen Fällen gelingt es auch durch Extrapolation des Spannungsverlaufes, die Genauigkeit in der Ermittlung der grössten Spannungen zu verbessern. Der Steigerung der Genauigkeit durch feinere Elementeinteilung sind noch von einer anderen Seite her Grenzen gesetzt. Es wurde im vorliegenden Fall festgestellt, dass bei Elementen mit Radiusverhältnissen $r_a/r_i < 1{,}003$ numerische Fehler auftreten, die zu unbrauchbaren Ergebnissen führen. Für den allgemeinen Fall lässt sich das kritische Radiusverhältnis nicht so genau angeben, da eine Anzahl von Parametern wie Unterschiede in den Elementgrössen, Elementgeometrie, Anzahl Gleichungen, Anzahl Unbekannten pro Gleichung usw. von Bedeutung sind. Auf Grund von Erfahrungen hat sich aber gezeigt, dass mit Radiusverhältnis $r_a/r_i > 1{,}005$ und Elementgeometrie Höhe/Breite zwischen 0,3 und 3,5 keine numerischen Schwierigkeiten mehr auftreten.

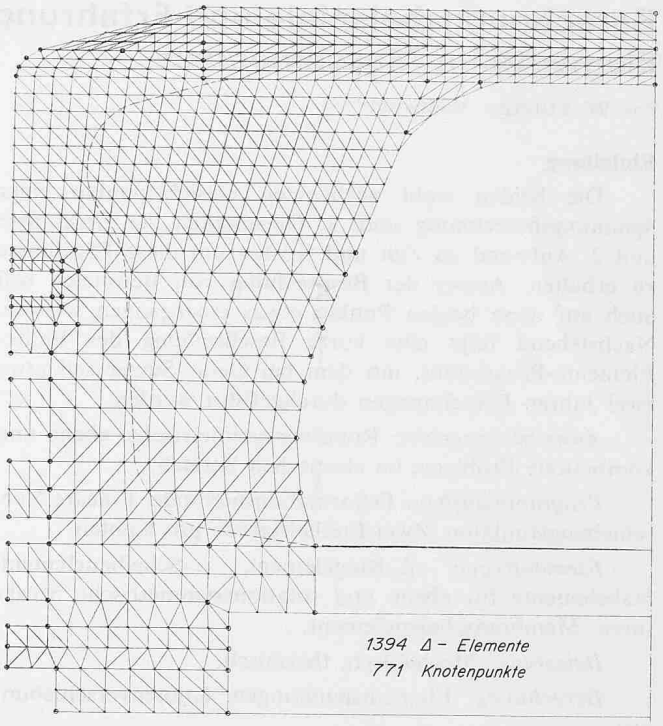
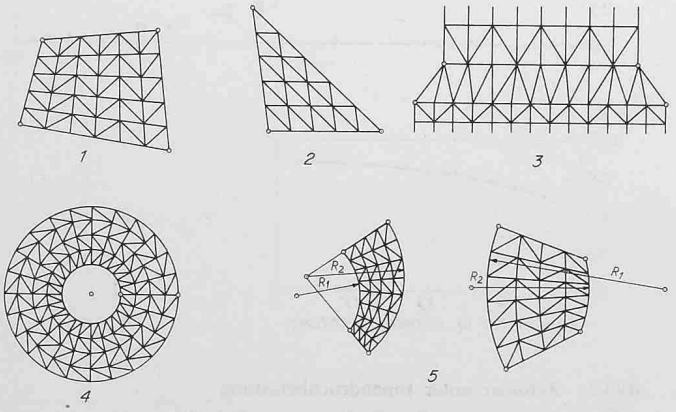


Bild 5. Netzeinteilung für Kolbenoberteil

Diese beiden Beispiele zeigen die zwei typischen Fehlermöglichkeiten:

1. Fehler infolge mangelhafter oder zu grober Elementeinteilung,
2. Fehler infolge numerischer Ungenauigkeiten bei der Computerrechnung.

Es folgen die Beispiele aus der Praxis.



1 Allgemeine Viereckform
2 Allgemeine Dreieckform
3 Übergangsform
4 Kreiselement (Schale, Kugel)
5 Allgemeines, kreisbegrenztes Element

Bild 4. Blockformen für die Elementeinteilung

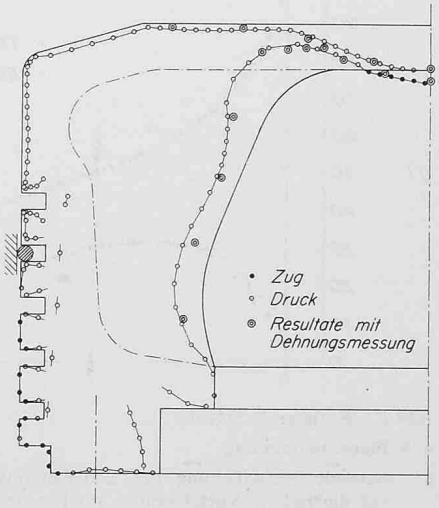


Bild 6. Kolbenoberteil. Grösste Hauptspannungen infolge mechanischer Belastung in Oberflächenelementen

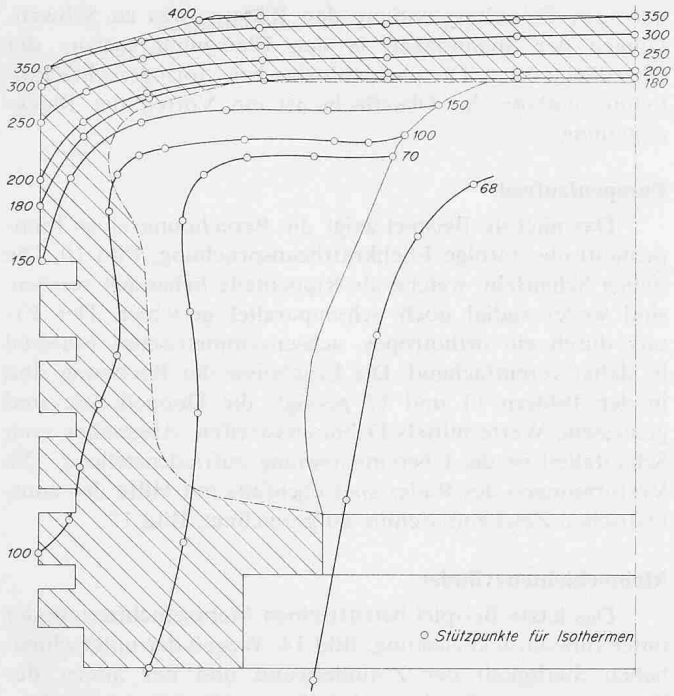


Bild 7. Isothermenverlauf in Kolbenoberteil

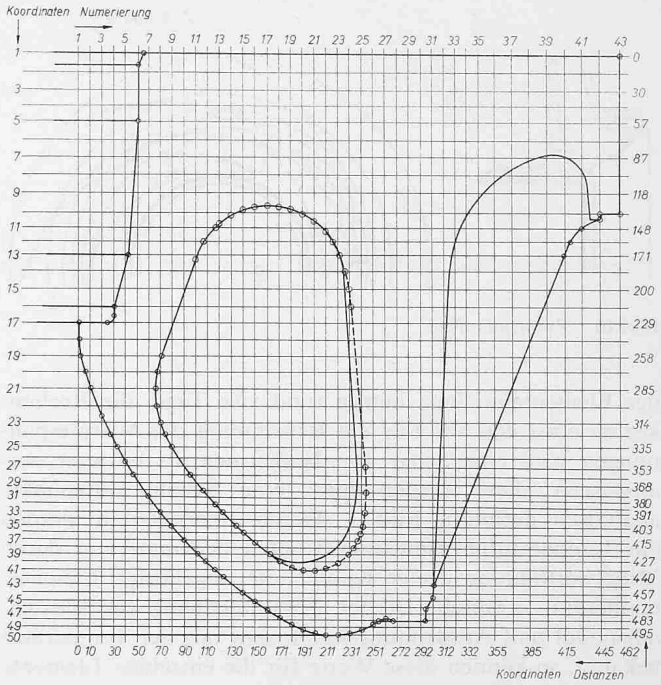


Bild 8. Vorbereitung für programmierte Elementeinteilung

Kolbenoberteil für Dieselmotor, Bild 3

Der Kolben ist zusammengesetzt aus einem Rotationskörper und neun radial stehenden Rippen. Von Interesse war insbesondere die Spannungsermittlung im Kolbenboden und entlang der Rippenkontur für mechanische und thermische Belastung. Die Rippenzone wird für die Rechnung ebenfalls als rotationssymmetrisch betrachtet, wobei dieses Material als orthotrop mit E-Modul $= 0$ in Umfangsrichtung aufzufassen ist. Die Annahme der Rotationssymmetrie ist um so korrekter, je mehr Rippen am Umfang vorhanden sind. Die radiale und achsiale Steifigkeit wird entsprechend dem Verhältnis Summe aller Rippendicken geteilt durch Umfangslänge an der betreffenden Stelle korrigiert. Die mathematische Formulierung der Abgrenzung zwischen Rippen- und Rotationsteil wie auch die Festlegung der Rippendicke jedes Elementes war im vorliegenden Fall ziemlich aufwendig. Auf das Zusammenstellen dieser Subroutine soll hier nicht näher eingegangen werden.

Einige Bemerkungen zur Elementeinteilung

Im ursprünglichen Programm konnten Elemente einzeln beigegeben oder innerhalb von Rechteckblöcken automatisch erzeugt werden. Die Idee der blockweisen automatischen Einteilung wurde im Laufe der Zeit für eine grössere Anzahl von Blockkonturen verwirklicht, wie dies in Bild 4 dargestellt ist. Man muss nur noch die Eckpunkte der Blöcke festlegen und in zwei Richtungen angeben, wie fein die Unterteilung sein soll. Die Elementunterteilung kann gleichgerichtet oder abwechselnd gerichtet sein. Die Arbeit für die Netzeinteilung konnte dadurch ganz bedeutend verringert werden, es müssen allgemein nur noch wenige Elemente einzeln eingegeben werden.

Bild 5 zeigt die Elementeinteilung des Kolbens, wie sie mit der Blockmethode durchgeführt wurde. Die Eckpunkte der Blöcke sind durch die Kreise markiert. Eine der Eingabekontrollen besteht darin, dass vorgängig der Rechnung die Elementeinteilung mit einer automatischen Zeichenmaschine aufgezeichnet wird, um so allfällige Fehler bezüglich Geometrie und Elementeinteilung korrigieren zu können. Für die Druckbelastung sind in Bild 6 die grössten Hauptspannungen der Oberflächenelemente, in Achsialschnittebene liegend, eingetragen. Die Zeichnung wurde mit dem automatischen Zeichengerät durchgeführt, die Spannungen sind senkrecht zur Oberfläche aufgetragen. Die stark ausgezogenen Kreise sind die Ergebnisse einer Dehnungsmessung am ausgeführten Kolben. Die Übereinstimmung ist recht gut. Es sei noch erwähnt, dass für einige komplexe Bauteile Finite-Elemente-Berechnungen und experimentelle Analysen durchgeführt wurden; in sämtlichen Fällen war die Übereinstimmung zufriedenstellend. Noch zwei Angaben: Die Zeit für die Vorbereitung und Kontrolle

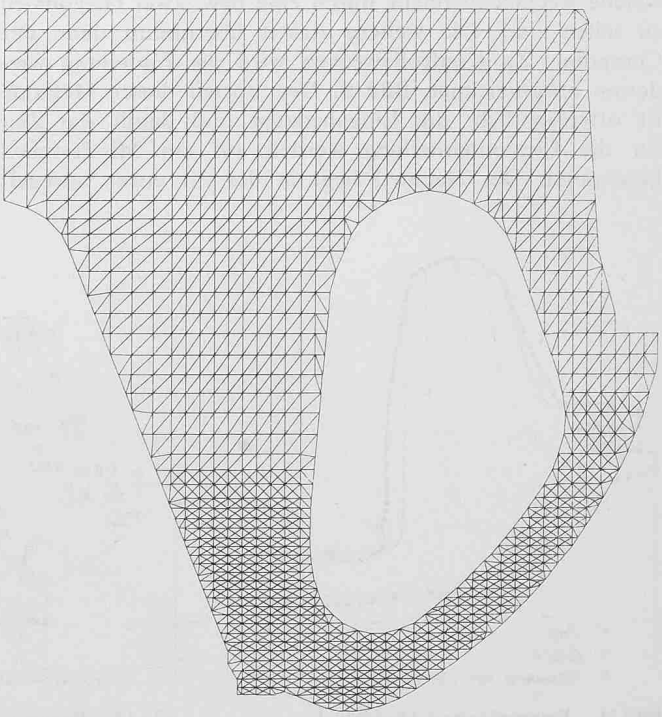


Bild 9. Programmierte Elementeinteilung

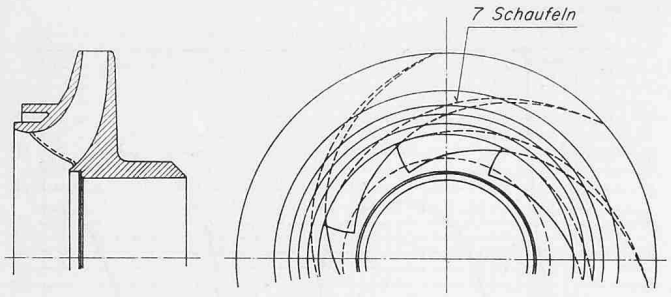


Bild 10. Pumpenlaufrad

der Elementeinteilung betrug rund vier Tage, die Rechenkosten etwa 400 Fr. Für die Berechnung der Wärmespannungen wird eine Schar von Isothermen als bekannt vorausgesetzt; diese werden durch eine Anzahl Stützpunkte analytisch definiert, Bild 7. Durch Interpolation werden die Temperaturen sämtlicher Knoten bestimmt und durch Mittelwertbildung dreier Knoten die zugehörige Elementtemperatur ermittelt. Ist der Zusammenhang für Elastizitätsmodul und Ausdehnungskoeffizient mit der Temperatur bekannt, so können diese Werte für die einzelnen Elemente entsprechend ihren Temperaturen automatisch berechnet werden.

Wie bereits erwähnt, erforderte anfänglich die Elementeinteilung, abgesehen von der Behandlung komplizierter Rippenstrukturen, einen grossen Zeitaufwand beim Bereitstellen der Eingabedaten. Es wurde ausser der beschriebenen Blockmethode eine weitere Methode der Elementeinteilung entwickelt; das Vorgehen für die Vorbereitung der Eingabedaten ist zusammengefasst folgendes: Es wird zuerst ein Netz von Horizontalen und Vertikalen eingezeichnet, wobei die Abstände der einzelnen Linien mit Rücksicht auf die zukünftige Grösse der Elemente gewählt werden, Bild 8. Von einem Koordinaten-Nullpunkt aus müssen diese Linien fortlaufend numeriert und die Entfernung, bezogen auf diesen Nullpunkt, festgelegt werden. Die Körpergeometrie ist definiert durch eine Anzahl fortlaufend numerierter Schnittpunkte, die untereinander durch Gerade verbunden sind. Man kann noch vorschreiben, welche Rechteckbereiche durch eine bzw. zwei Diagonalen zu teilen sind. Die weitere Arbeit übernimmt dann der Computer. Zu Kontrollzwecken wird die Einteilung wiederum aufgezeichnet, Bild 9. Der Vorteil dieser Methode ist offensichtlich, die Eingabedaten und damit die Zeit für die Elementeinteilung werden auf ein Mindestmass beschränkt. Der Nachteil liegt in der oft etwas unregelmässigen Einteilung entlang den Rädern, was zu Schwankungen der Spannungen in den Elementen entlang der Oberfläche führt. Die gleichmässige bzw. formgerechte Einteilung entlang der Oberfläche ist ein Vorteil der Blockeinteilung.

Pumpenlaufrad

Das nächste Beispiel zeigt die Berechnung eines Pumpenlaufrades infolge Fliehkraftbeanspruchung, Bild 10. Die sieben Schaufeln, welche als Rippenteile behandelt werden, sind weder radial noch achsenparallel gerichtet. Der Ersatz durch ein orthotropes, achsensymmetrisches Material ist daher vereinfachend. Die Ergebnisse der Rechnung sind in den Bildern 11 und 12 gezeigt; die Doppelkreise sind gemessene Werte mittels Dehnmessstreifen. Abgesehen vom Schaufelteil ist die Übereinstimmung zufriedenstellend. Die Verformungen des Rades sind ebenfalls mit Hilfe der automatischen Zeichenmaschine aufgezeichnet, Bild 13.

Mehrschichtenzylinder

Das letzte Beispiel betrifft einen Mehrschichtenzylinder unter Innendruckbelastung, Bild 14. Wegen der unterschiedlichen Steifigkeit der Zylinderwand und der ausser der Wandmitte angreifenden Achsiallasten tritt eine gewisse Biegung auf. Die einzelnen Schichten liegen mit nur geringer Pressung aufeinander, da nach dem Schweissen der ganze Behälter geglüht wird. Der Reibungskoeffizient zwischen den Schichten ist unbekannt. Man kann zwei Extremfälle annehmen:

1. die Schichten können reibungsfrei aufeinander gleiten, d. h. keine Schubübertragung zwischen den Schichten;
2. die Reibungskräfte sind so gross, dass der Behälter als massiv betrachtet werden kann.

Es wurden beide Fälle berechnet. Reibungsfreies Gleiten kann man mit Stäben, welche die entsprechenden Knoten zweier Schichten verbinden und über den ganzen Umfang gleichmässig verteilt sind, erreichen. Die Stäbe sind biegeschlaff und können somit nur Zug- oder Druckkräfte übertragen. Die Wirkung dieser Stäbe ist gleich wie diejenige eines rotationssymmetrischen Membranschalenelementes mit Elastizitätsmodul = 0 in Umfangsrichtung. Die Länge dieser Elemente wurde mit 0,2 mm angenommen, pro Radian wurde derjenige Elementquerschnitt eingesetzt, welcher die richtige Radialspannung wiedergibt, die zwischen den Schichten entsteht. Diese Stabelemente haben sich als ganz nützlich erwiesen, es lassen sich mit ihnen Bedingungen, wie sie zwischen den Trennflächen zweier

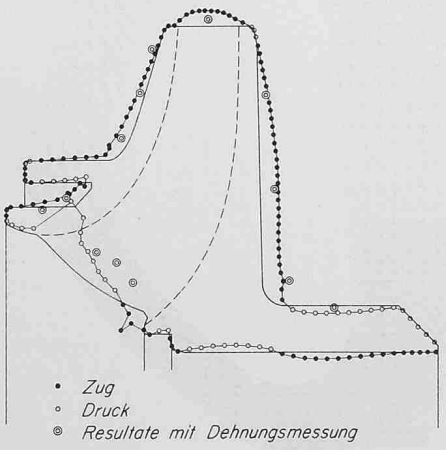


Bild 11. Pumpenlaufrad. Meridionalspannungen

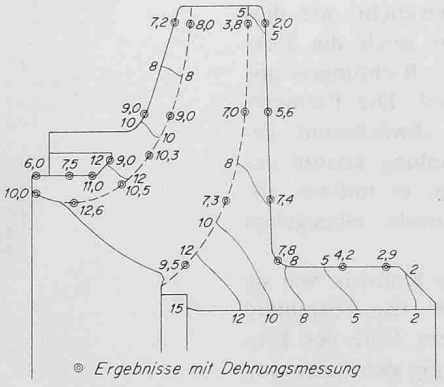


Bild 12. Pumpenlaufrad. Linien konstanter Tangentialspannungen

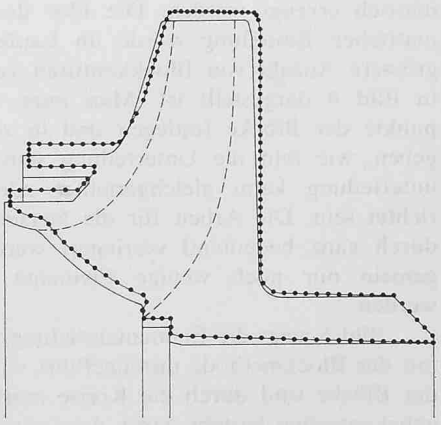
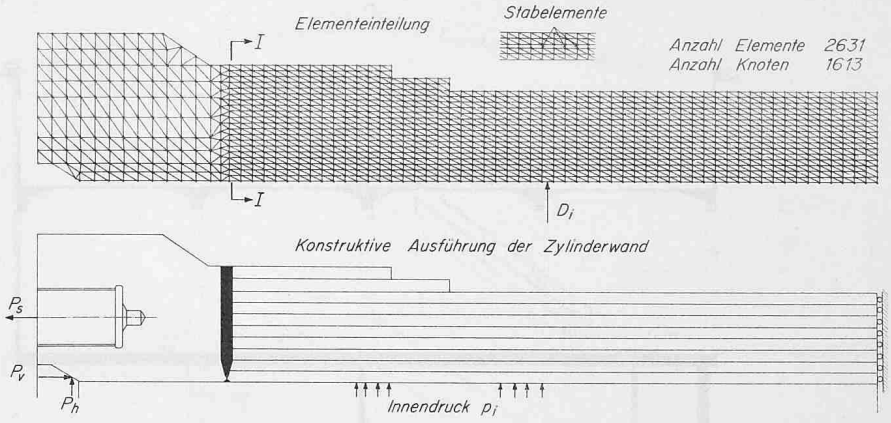


Bild 13. Deformationen des Pumpenlaufrades

Bild 14. Mehrschichtenzylinder



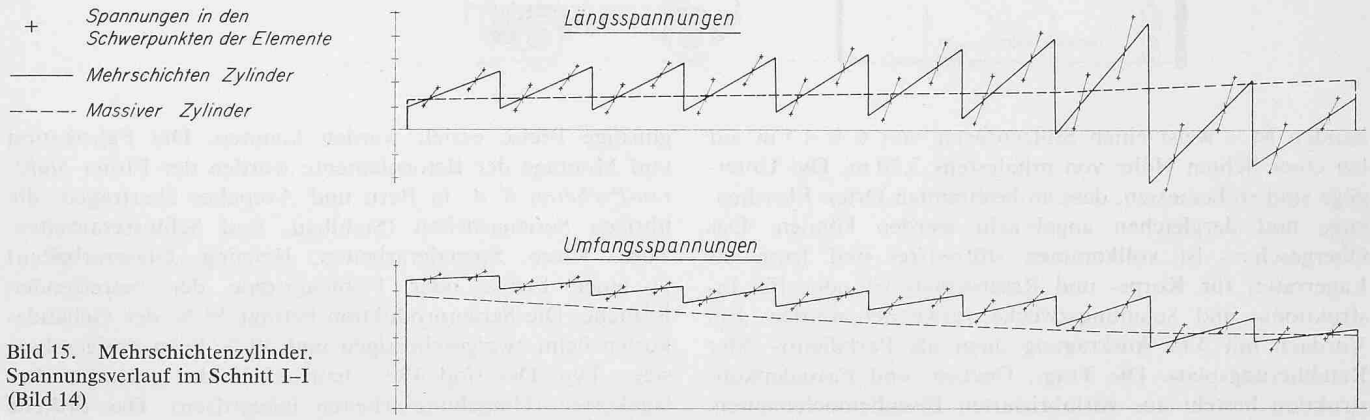


Bild 15. Mehrschichtenzylinder. Spannungsverlauf im Schnitt I–I (Bild 14)

zusammengespannter Teile herrschen, gut wiedergeben. Die Stäbe lassen sich auch so anordnen, dass zudem Schubübertragung möglich ist. In Bild 15 sind die Ergebnisse für die Achsial- und Umfangsspannungen im Schnitt I–I aufgetragen. Die ausgezogene Kurve ist für den reibungsfreien Fall. Da pro Schicht nur vier Elemente über die Dicke vorhanden sind, ist eine gewisse Streuung der Spannungswerte benachbarter Elemente vorhanden. Wegen der Beschränkung in der gesamten Elementzahl konnte keine feinere Einteilung innerhalb der Schichten vorgenommen werden. Die strichlierte Kurve gilt für den massiven Zylinder. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, einen Ausschnitt dieser Zone mit feinerer Einteilung getrennt zu berechnen. Die Randbedingungen des Ausschnittes entsprechen dann denjenigen der ersten Rechnung.

Die gezeigten Beispiele geben einen Einblick in die mannigfaltigen Möglichkeiten der Spannungsanalyse mit der Methode der finiten Elemente. Bei sinnvollem Einsatz ist diese Methode ein wirksames Hilfsmittel zur Spannungsanalyse eines Bauteiles und trägt somit bei zur Gestaltung festigkeitsgerechter Bauteile.

Adresse des Verfassers: *W. Stumpp,* dipl. Ing., in Firma Gebrüder Sulzer AG, Abteilung 1502, 8401 Winterthur.

Bauten der Eidgenossenschaft in der Westschweiz

DK 72:725.18:725.35

Ende Oktober dieses Jahres veranstaltete das Eidg. Departement des Innern eine Pressefahrt durch die Kantone Freiburg und Waadt, bei welchem Anlass der Direktor der Eidg. Bauten, *Max von Tobel,* dipl. Arch., und sein Stellvertreter, *Claude Grosgurin,* dipl. Arch., die einzelnen Bauten kommentierten. Ausserdem zeigten sie in Plänen und Modellen eine Anzahl von westschweizerischen Bauvorhaben. Anlässlich des Mittagessens im «Milieu du Monde» in Pompaples richteten Bundesrat *H. P. Tschudi,* Regierungsrat *M.-A. Ravussin,* Lausanne, und Gemeindepräsident *Ed. Bonzon-Zaugg* das Wort an die Teilnehmer. Die sehr wohlgelungene Veranstaltung hinterliess einen vorzüglichen Eindruck von der Vielfalt der von der Eidg. Baudirektion zu bewältigenden Probleme sowie von der Umsicht und Entwicklungsfreude, mit der diese Amtsstelle ans Werk geht. Im folgenden geben wir einen Überblick über die ausgeführten oder kurz vor ihrer Vollendung stehenden Bauten, von denen einzelne später noch ausführlich zur Darstellung kommen sollen.

Die Norm-Lagerhalle des Zeughauses Belfaux ist eine der ersten der bis heute erstellten 31 Hallen. Der Umfang des im Rüstungsprogramm 1966 festgelegten Mehrbedarfs an Lagerraum legte es der Baudirektion nahe, einen *Mehrzweck-Bautyp* entwickeln zu lassen. Mit den Studien wurden das Architekturbüro *W. Althaus* und die Ingenieure *Emch & Berger* in Bern beauftragt. Die Hallen dienen dem Einstellen von Fahrzeugen, der Lagerung von Korps- und Reservematerial und von schwerem Material (Brükken usw.), zum Reparieren von Material und Fahrzeugen, für Truppenparkdienst, als Retablierungsplatz und Schulungsraum; sie müssen unter verschiedenen klimatischen, topographischen und geologischen Bedingungen aufgestellt werden können und sollen architektonisch in den verschiedensten Landschaften und Siedlungsräumen nicht störend wirken. Die Hallen sind zwei- oder dreigeschossig und haben eine Breite von 18 m. Ihre Länge beträgt ein Vielfaches von 6 m (zum Beispiel 24, 30, 36, 42 m usw.). Das Erdgeschoss – und das Untergeschoss, wenn eines vor-