

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 89 (1971)  
**Heft:** 48

**Artikel:** Grundlagen der Methode der Finiten Elemente  
**Autor:** Erni, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-85050>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Anwendung der Finiten Elemente in der Industrie

Unter diesem Titel veranstaltete die SIA-Fachgruppe der Ingenieure der Industrie (FII) am 12. November 1970 im Kasino Zürichhorn eine Informationstagung. In deren Verlauf erhielten die zahlreichen Teilnehmer einen Überblick über das Prinzip der Methode der Finiten Elemente und über deren Anwendungsmöglichkeiten in der Industrie sowie für die Lösung besonderer Fragen des Bauingenieurwesens.

Im vorliegenden Heft beginnen wir mit der Veröffentlichung der während der Tagung gehaltenen Vorträge,

welche zum Teil überarbeitet wurden. Damit auch die Leser, die mit der Methode nicht vertraut sind, einen Überblick über deren Grundlagen und Aufbau erhalten, hat sich Ing. E. Erni in verdankenswerter Weise bereit erklärt, einen entsprechenden Beitrag zu verfassen. Mit diesem Aufsatz leiten wir die Reihe über die Anwendung der Methode der Finiten Elemente in der Industrie ein. Der Umfang dieser Beitragsreihe zwingt uns, mit Rücksicht auf die verschiedenen Berufssparten unserer Leserschaft, sie auf mehrere Ausgaben zu verteilen.

Red.

## Grundlagen der Methode der Finiten Elemente

DK 539.4.001.2:512.83

Von E. Erni, Zürich

### 1. Einleitung

Die Methode der Finiten Elemente beruht auf den Grundlagen der Matrizenstatik. Ein wesentlicher Unterschied zu anderen Verfahren liegt in der Gestaltung des Rechenablaufes von Beginn an in der Form der Matrizenrechnung. Die geschichtliche Entwicklung der Methode beginnt in den Jahren vor dem Zweiten Weltkrieg. Während des Krieges und im Zeitraum bis 1955 lag der Schwerpunkt bei der Kraftmethode der Matrizenstatik (Matrix Force Method). In den weiteren Jahren beginnt die Deformationsmethode der Matrizenstatik (Matrix Deformation Method) an Anwendungshäufigkeit zu gewinnen. Die Entwicklung dieser Methoden auf den heutigen Stand der Methode der Finiten Elemente ist stark gekoppelt mit den Fortschritten der elektronischen Datenverarbeitung und ohne sie praktisch nicht denkbar. Erst die Datenverarbeitung macht die rationelle Lösung der grossen Zahl simultaner Gleichungen möglich, die beim Rechnungsvorgang anfallen. Von den zahlreichen Ingenieuren und Wissenschaftlern, die mit der Entwicklung besonders eng verbunden sind, seien einige genannt: B. Langefors, P.H. Denke, M.J. Turner, R.W. Clough, J.H. Argyris, F.B. de Veubeke, O.C. Zienkiewicz.

Die Literatur über die Methode, vor allem in englischer Sprache, hat seit 1960 einen Umfang angenommen, der selbst für Spezialisten schwer überblickbar ist. Die im Literaturverzeichnis angegebenen Standardwerke von 1967 an geben aber doch einen guten Überblick.

Die Methode der Finiten Elemente ist unter die numerischen Methoden der Festigkeitsrechnung einzureihen; es wird darunter im allgemeinen ein Verfahren verstanden, bei dem die zu analysierende Struktur als eine Konfiguration von diskreten Teilchen dargestellt wird, genannt Elemente.

Jedes Element hat dabei endliche Dimensionen. Um Berechnungen mit diesen Elementen durchzuführen, ist es notwendig, für jedes die Beziehung zwischen der wirkenden Kraft und der Deformation aufzustellen. Ein Kontinuumskörper kann durch ganz verschiedenartige Modelle von Finiten Elementen dargestellt werden: Dreiecke, Vierecke oder polygonale Formen. Das Netzwerk der Unterteilung kann grob sein und eine kleine Zahl von Elementen umfassen, oder aber sehr fein, indem zahlreiche kleine Elemente gewählt werden. Die Kriterien zur Wahl hängen von der Geometrie der Struktur und von lokalen Einflüssen, wie etwa Spannungskonzentrationen, ab. Dabei ist es durchaus möglich, die Feinheit der Unterteilung zu variieren und an den Orten von Krafteinlei-

tungen eine feinere Aufteilung vorzunehmen. Im Falle einer Rahmenkonstruktion erhält man bereits eine passende Unterteilung in Elemente, wenn jedes Teil, Balken oder Stab als ein Finites Element betrachtet wird.

Diese Teile werden in der Berechnung durch die Neutralachse dargestellt, die Bindungen an die Nachbarelemente treten bei einer Rahmenstruktur nur an den Enden, Knoten genannt, in Erscheinung. Die Betrachtung von Gleichgewicht und Verträglichkeit der Verschiebungen wird dementsprechend nur an diesen Knoten ausgeführt. Mit den Elementtypen, welche normalerweise unter den Begriff Finite Elemente fallen, werden Strukturen berechnet, die mathematisch dargestellt sind durch zweidimensionale Scheiben, Platten und Schalen, oder durch ein dreidimensionales elastisches Kontinuum. Damit erscheinen die Verbindungen entlang einer Linie oder einer Fläche und nicht nur an einem Knotenpunkt des Elementes. Es muss nun sichergestellt werden, dass das Gleichgewicht und die Verträglichkeit an den Knoten vorhanden ist und die Berührungsflächen oder Linien zwischen den Knoten die gewählte Form der Verschiebungsverteilung annehmen. Diese Verträglichkeit an den Begrenzungen zwischen zwei benachbarten Elementen muss gefordert werden, um ein der Wirklichkeit entsprechendes Spannungsbild in der Struktur zu erhalten. Sind die Verträglichkeits- und Gleichgewichtsbedingungen in den Knotenpunkten erfüllt, so ist es von der Richtigkeit der Steifigkeitsmatrize des Elementes abhängig, ob an den Begrenzungen zweier benachbarter Elemente die Verträglichkeitsbedingungen ebenfalls erfüllt sind. Wäre die Verträglichkeitsbedingung nur an den Knoten eines Dreieckselementes erfüllt und nicht an den Seiten, dann entstünden durch die Belastung Spalten oder Übereinanderverschiebungen der benachbarten Dreiecksfelder, so dass die ganze Struktur weniger steif wirkt, als in Wirklichkeit. Dieser Effekt hätte grosse Spannungsabweichungen gegenüber der exakten Lösung und Spannungskonzentrationen in den Knotenpunkten zur Folge.

### 2. Die Ableitung einer Steifigkeitsmatrize am Beispiel des einfachen Balkens

#### 2.1 Beziehungen zwischen Kräften und Verschiebungen

Vor der Betrachtung eines zweidimensionalen Dreieckselementes, wie es zur Berechnung eines Kontinuumskörpers verwendet werden kann, ist es nützlich, sich mit dem Vorgang an einem einfachen Element, dem Balken, zu befassen, wie er normalerweise in einem Rahmentragwerk vorkommt.

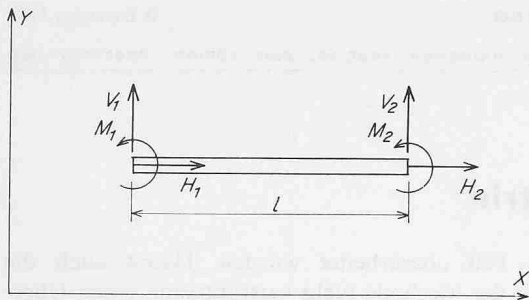


Bild 1. Endkräfte am einfachen Balken

In den Bildern 1 und 2 sind die Verschiebungen und Verdrehungen des einfachen Biegebalkens mit gleichmässigem Querschnitt unter den Knotenkräften  $V_1, H_1, M_1$  und  $V_2, H_2, M_2$  an den Knoten 1 und 2 dargestellt. Die Kolonnen der Kräfte  $V_1, H_1, M_1$  sowie  $V_2, H_2, M_2$  seien mit  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  bezeichnet.

$$(2.11) \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} V_1 \\ H_1 \\ M_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} V_2 \\ H_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  nennt man auch generalisierte Knoten- oder Endkräfte.

In ähnlicher Form lassen sich generalisierte Knoten- oder Endverschiebungen definieren:

$$(2.12) \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

Damit am Balken unter den Kräften  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  Gleichgewicht herrscht, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$(2.13) H_1 = -H_2; \quad V_1 = -V_2; \quad M_1 = -M_2 - V_2 l$$

Unter der Annahme, dass der Knoten 1 deformiert ist, während der Knoten 2 festgehalten bleibt (Bild 3), gilt unter Bezugnahme auf die einfachen Beziehungen am Kragträger:

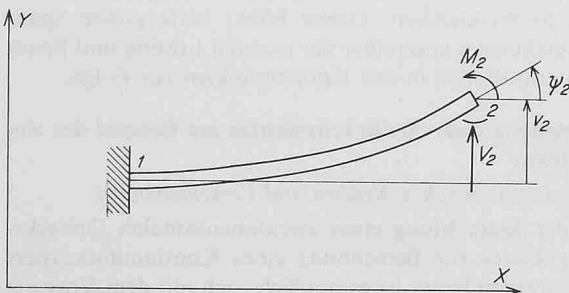
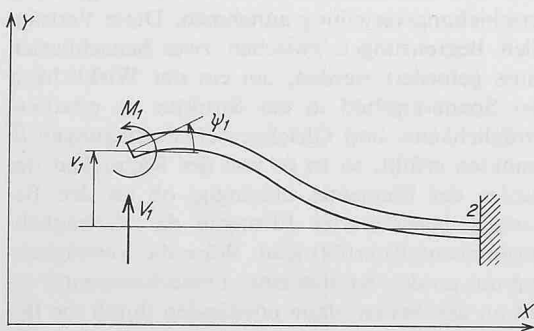


Bild 3. Endkräfte und Endverschiebungen des Balkens mit einem eingespannten Ende

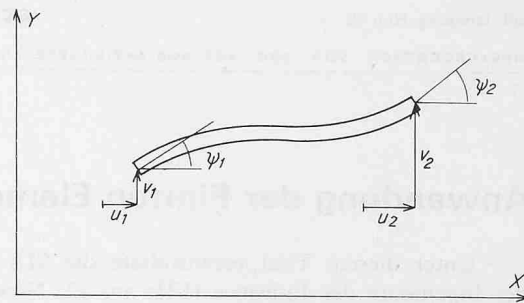


Bild 2. Endverschiebungen des einfachen Balkens

$$(2.14) \psi_1 = \frac{M_1 \cdot l}{EJ} - \frac{V_1 \cdot l^2}{2EJ} = \frac{1}{EJ} \left( M_1 \cdot l - V_1 \cdot \frac{l^2}{2} \right)$$

$$v_1 = \frac{1}{EJ} \left( -M_1 \frac{l^2}{2} + V_1 \frac{l^3}{3} \right)$$

Ist der Knoten 1 fixiert, so resultieren die Gleichungen:

$$(2.15) \psi_2 = \frac{1}{EJ} \left( M_2 l + V_2 \frac{l^2}{2} \right)$$

$$v_2 = \frac{1}{EJ} \left( M_2 \frac{l^2}{2} + V_2 \frac{l^3}{3} \right)$$

Das Einsetzen der Gleichgewichtsbedingungen aus (2.13) führt zu:

$$(2.16) \psi_2 = \frac{1}{EJ} \left( -M_1 l + V_1 \frac{l^2}{2} \right)$$

$$v_2 = \frac{1}{EJ} \left( -M_1 \frac{l^2}{2} + V_1 \frac{l^3}{6} \right)$$

Die in Längsrichtung des Balkens wirkenden Kräfte verursachen Längenänderungen der Grösse:

$$(2.17) u_1 - u_2 = H_1 \frac{l}{EA}$$

$V_1$  und  $M_1$  können mit  $v_2 = 0$  und  $\psi_2 = 0$  in Funktion der Verschiebung  $v_1$  und der Verdrehung  $\psi_1$  geschrieben werden:

$$V_1 = \frac{12EJ}{l^3} v_1 + \frac{6EJ}{l^2} \psi_1$$

Wenn  $v_1 = 0$  und  $\psi_1 = 0$ , gilt in Funktion von  $v_2$  und  $\psi_2$ :

$$V_1 = -\frac{12EJ}{l^3} v_2 + \frac{6EJ}{l^2} \psi_2$$

Die Kraft  $V_1$  wird damit infolge der kombinierten Verschiebung und Verdrehung der Enden 1 und 2:

$$(2.18) V_1 = \left( \frac{12EJ}{l^3} v_1 + \frac{6EJ}{l^2} \psi_1 \right) + \left( -\frac{12EJ}{l^3} v_2 + \frac{6EJ}{l^2} \psi_2 \right)$$

Auf das Moment und die Kraft  $H$  übertragen:

$$(2.19) M_1 = \left( \frac{6EJ}{l^2} v_1 + \frac{4EJ}{l} \psi_1 \right) + \left( -\frac{6EJ}{l^2} v_2 + \frac{2EJ}{l} \psi_2 \right)$$

$$H_1 = \frac{EA}{l} u_1 - \frac{EA}{l} u_2$$

## 2.2 Die Beziehungen zwischen Kräften und Verschiebungen in Matrizenschreibweise

Die Matrizenschreibweise hat den Vorteil, dass sie die Proportionalität zwischen Kräften und Verschiebungen klar hervortreten lässt und zudem eine abkürzende Schreibweise bei grosser Gleichungszahl darstellt. Die generalisierten Knotenkräfte und Verschiebungen sind Beispiele für Kolonnenvektoren, das heisst Matrizen mit nur einer Kolonne.

Die Matrize

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

mit drei Zeilen und drei Kolonnen wird als  $3 \times 3$  quadratische Matrize bezeichnet. Werden die Elemente der Zeilen von  $\mathbf{K}$  mit den entsprechenden von  $\mathbf{d}$  multipliziert und summiert, so ist das Produkt:

$$\mathbf{Kd} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u + a_{12}v + a_{13}\psi \\ a_{21}u + a_{22}v + a_{23}\psi \\ a_{31}u + a_{32}v + a_{33}\psi \end{bmatrix}$$

Das Produkt stellt ebenfalls einen Kolonnenvektor dar. Die Regeln welche hier angewandt wurden, können auf jeden anderen Matrizentyp mit  $m$  Zeilen und  $n$  Kolonnen erweitert werden (im Anhang wird ein Abriss weiterer notwendiger Rechenregeln für Matrizen gegeben).

Die Gleichungen (2.18) und (2.19) werden jetzt in Matrizenform dargestellt. Mit der Last- und Verschiebungsmatrize in (2.11) und (2.12) definiert, resultiert:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \end{bmatrix}$$

Damit kann geschrieben werden:

$$(2.20) \mathbf{P}_1 = \mathbf{K}_{11} \mathbf{d}_1 + \mathbf{K}_{12} \mathbf{d}_2$$

$$(2.21) \mathbf{P}_2 = \mathbf{K}_{21} \mathbf{d}_1 + \mathbf{K}_{22} \mathbf{d}_2$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

Diese Gleichungen lassen sich weiter zusammenfassen in eine einzige durch Definition der Kraft- und Verschiebungsmatrize:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix}$$

kombiniert mit der Steifigkeitsmatrize:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}$  und  $\mathbf{d}$  sind Kolonnenvektoren mit 6 Elementen und  $\mathbf{K}$  eine  $6 \times 6$  Matrize. Die Gleichungen (2.20) und (2.21) werden zu:

$$(2.22) \mathbf{P} = \mathbf{Kd}$$

Der betrachtete Biegebalken hatte bis jetzt eine zur  $x$ -Achse parallele Lage, und die positive Richtung lief von 1 nach 2. Damit war der Vorteil verbunden, dass die Ausdrücke der verschiedenen Matrizen einfach ausfielen. Normalerweise hat der Balken aber eine beliebige Lage zu einem globalen Koordinatensystem, wie Bild 4 zeigt. Die Kraftmatrize  $\mathbf{P}'$ , welche auf das neue globale Koordinatensystem ausgerichtet ist, lautet:

$$(2.23) \mathbf{P}'_1 = \begin{bmatrix} H'_1 \\ V'_1 \\ M'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{P}_1$$

Für  $\mathbf{P}_2$  und  $\mathbf{P}'_2$  gelten analoge Beziehungen. Die Transformationsmatrize wird dabei mit  $\mathbf{T}$  bezeichnet. Aus Bild 4 lassen sich weiter folgende Beziehungen herleiten:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \psi'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{d}'_1$$

Zusammengefasst gilt deshalb für  $\mathbf{P}'$  folgende allgemeine Beziehung:

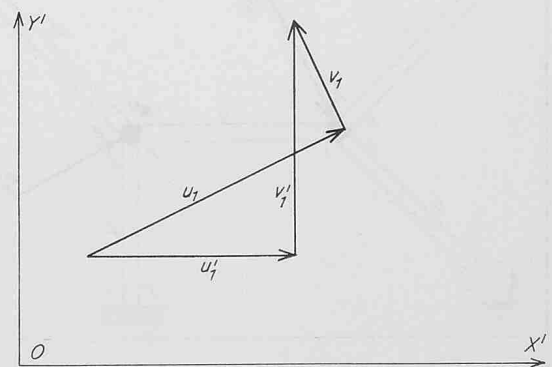
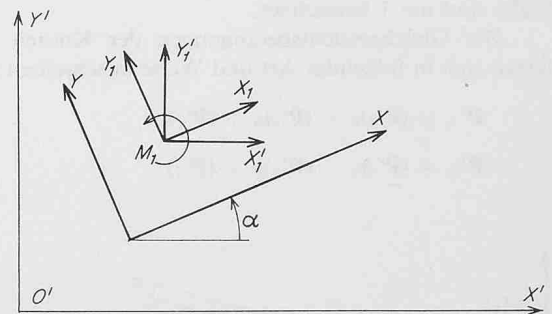


Bild 4. Globales und lokales Koordinatensystem

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} H'_1 \\ V'_1 \\ M'_1 \\ H'_2 \\ V'_2 \\ M'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ H_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{P}$$

$\mathbf{O}$  stellt eine quadratische Matrice dar, deren Elemente alle gleich 0 sind. Bei gleicher Behandlung von  $\mathbf{d}$  ergibt sich:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \mathbf{d}'$$

Weitere Entwicklungen sind dann:

$$(2.24) \quad \mathbf{P}' = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \mathbf{P}' = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \mathbf{d}' = \mathbf{K}' \mathbf{d}'$$

Die Steifigkeitsmatrice eines einfachen Biegebalkens, die sich auf ein beliebiges Koordinatensystem bezieht, ist damit gefunden und lautet ( $\mathbf{T}$  kann aus Gleichung (2.23) entnommen werden):

$$(2.25) \quad \mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}^T \end{bmatrix}$$

### 3. Die Ableitung der Steifigkeitsmatrice einer Balkenstruktur

In Bild 5, das eine Rahmenstruktur darstellt, wird der in den vorhergegangenen Kapiteln behandelte einfache Balken durch die Knoten A und B begrenzt und ist mit a bezeichnet. Weitere Balken, nämlich b und c, sind im Knoten A, d und e im Knoten B mit Balken a verbunden und an den anderen Enden C, D, E, F eingespannt. In den Knoten A und B wirken die Kräfte  $\mathbf{P}'_A$  und  $\mathbf{P}'_B$ . Die Einspannungen der verschiedenen Stäbe sind mit 1 bezeichnet.

Die Gleichgewichtsbedingungen der Knoten A und B lassen sich in folgender Art und Weise anschreiben:

$$\mathbf{P}'_A = (\mathbf{P}'_1)_a + (\mathbf{P}'_2)_b + (\mathbf{P}'_2)_c$$

$$\mathbf{P}'_B = (\mathbf{P}'_2)_a + (\mathbf{P}'_2)_d + (\mathbf{P}'_2)_e$$

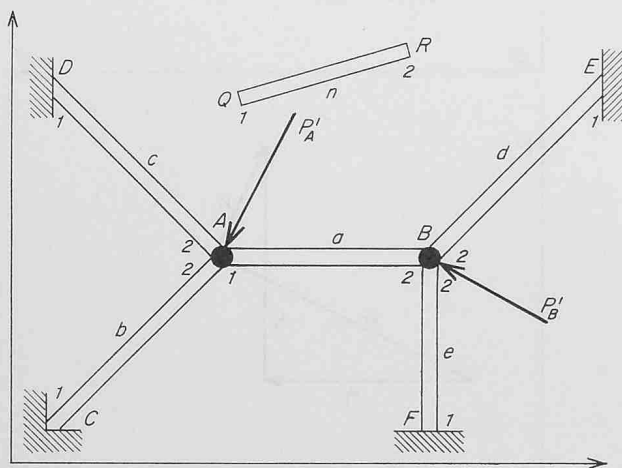


Bild 5. a) Rahmenstruktur in Balkenelemente aufgeteilt; b) Einfacher Balken in der Struktur

Mit Hilfe der Gleichungen (2.20) und (2.21):

$$(\mathbf{P}'_1)_a = (\mathbf{K}'_{11})_a \mathbf{d}'_A + (\mathbf{K}'_{12})_a \mathbf{d}'_B$$

$$(\mathbf{P}'_2)_b = (\mathbf{K}'_{21})_b \mathbf{d}'_c + (\mathbf{K}'_{22})_b \mathbf{d}'_A$$

Entsprechend Gleichung (2.25) gilt:

$$(\mathbf{K}'_{LR})_i = (\mathbf{T})_i (\mathbf{K}_{LR})_i (\mathbf{T}^T)_i,$$

wobei L und R für 1 oder 2 und i für a, b, c, ..., n stehen.

Die Knotengleichungen in A und B können in einer einzigen Matrice zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}'_A \\ \mathbf{P}'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(\mathbf{K}'_{11})_a + (\mathbf{K}'_{22})_b + (\mathbf{K}'_{22})_c] & [(\mathbf{K}'_{12})_a] \\ [(\mathbf{K}'_{21})_a] & [(\mathbf{K}'_{22})_a + (\mathbf{K}'_{22})_d + (\mathbf{K}'_{22})_e] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_A \\ \mathbf{d}'_B \end{bmatrix}$$

das entspricht:

$$(3.1) \quad (\mathbf{P})_{\text{Knoten}} = [\text{Steifigkeitsmatrice}] (\mathbf{d})_{\text{Knoten}}$$

Es ist also möglich, den Rechnungsgang, der sich auf die Lösung simultaner linearer Gleichungen reduziert, zurückzuführen auf die Bestimmung der Knotendeformationen durch die Knotenkräfte oder umgekehrt. Die Steifigkeitsmatrice entsteht dabei durch Zusammensetzen der Steifigkeiten der einzelnen Glieder in der beschriebenen Art und Weise. Im allgemeinen Fall gelten für die Matrice der Knotenkräfte und die Matrice der Knotenverschiebung folgende Ausdrücke:

$$(\mathbf{P})_{\text{Knoten}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}'_A \\ \mathbf{P}'_B \\ \vdots \\ \mathbf{P}'_Q \\ \vdots \\ \mathbf{P}'_R \\ \vdots \\ \mathbf{P}'_N \end{bmatrix} \quad (\mathbf{d})_{\text{Knoten}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_A \\ \mathbf{d}'_B \\ \vdots \\ \mathbf{d}'_Q \\ \vdots \\ \mathbf{d}'_R \\ \vdots \\ \mathbf{d}'_N \end{bmatrix}$$

Die mit Q und R indizierten Grössen seien die Knoten eines einfachen Balkens (Bild 5b). Dabei stellt Q den Anfang 1 und R das Ende 2 dieses Balkens n dar. Der Beitrag dieses Balkens zur Steifigkeitsmatrice besteht in der Addition der Ausdrücke  $(\mathbf{K}'_{11})_i$  zum Element, welches sich in der Zeile Q und der Kolonne Q befindet. Die Grössen  $(\mathbf{K}'_{12})_i$ ,  $(\mathbf{K}'_{21})_i$ ,  $(\mathbf{K}'_{22})_i$  werden zu den Elementen auf Zeile Q, Kolonne R und Zeile R, Kolonne Q und Zeile R, Kolonne R hinzuaddiert.

$$[\text{Steifigkeitsmatrice}] = \begin{bmatrix} & (Q) & (R) \\ (Q) & -(\mathbf{K}_{11})_i & -(\mathbf{K}_{12})_i \\ (R) & -(\mathbf{K}_{21})_i & -(\mathbf{K}_{22})_i \end{bmatrix}$$

### 4. Übertragung des Vorgehens auf Kontinuumskörper

Der beschriebene Lösungsweg kann in drei Abschnitte eingeteilt werden:

- Bestimmung der Steifigkeit jedes einzelnen Elementes
- Bilden der Steifigkeitsmatrice der ganzen Struktur
- Lösung der Gleichung (3.1), welche die Knotenkräfte und die Knotenverschiebungen verbindet und Auffinden der unbekannten Knotenkräfte oder Knotenverschiebungen in Ausdrücken der bekannten Kräfte oder Verschiebungen.

Im behandelten Beispiel greifen die äusseren Kräfte an den Knoten an. Eine Erweiterung auf allgemeine Fälle des Lastangriffes, einschliesslich verteilte Lasten, ist ohne weiteres



möglich, liegt aber nicht im Rahmen dieser Ausführungen. Die Spannungen und Verzerrungen in einem Kontinuumskörper können auf ähnliche Art beschrieben werden. Das Rahmentragwerk stellt die Zusammensetzung von einzelnen, fest definierten Balken dar und kann damit leicht unterteilt werden in seine elementaren Komponenten. Für einen Kontinuumskörper gilt dies nicht unbedingt, denn er besteht aus Teilchen von infinitesimaler Grösse und kann nur durch Elemente mit endlicher Abmessung und Form angenähert werden. Die Güte der Annäherung wird unter anderem bestimmt sein durch Art und Grösse der Elemente.

Die Methode der Finiten Elemente wendet das Matrizenverfahren der Festigkeitsrechnung auf Kontinuumskörper an. Zu diesem Zweck werden die Körper bei Problemen mit ebenem Spannungs- oder ebenem Deformationszustand in eine Zahl von kleinen Elementen unterteilt mit variabler Grösse und gewöhnlich von dreieckiger Form. Im allgemeinen dreidimensionalen Fall, welcher an dieser Stelle nicht diskutiert werden soll, werden Tetraeder oder Kuben verwendet. Der Körper wird dabei nicht durch ein Rahmentragwerk oder Netzwerk ersetzt, sondern durch eine reale Zusammensetzung von zwei- oder dreidimensionalen dreieckigen Elementen, welche an ihren Rändern oder Seitenflächen miteinander verbunden sind. Die Deformationen und Kräfte entlang den sich berührenden Rändern oder Flächen benachbarten Elementen anzupassen stellt Probleme. Aus diesem Grund werden vereinfachende Annahmen gemacht, um die Aufgabe auf eine lösbare Form zu bringen.

Diese Annahmen bestehen in der vorliegenden Anwendung darin, dass gerade Linien gerade bleiben und damit auch die Ränder der Elemente. Die Kontinuität zwischen Nachbar-elementen mit zwei gemeinsamen Ecken ist gesichert, wenn die gemeinsamen Ecken um den gleichen Betrag verschoben werden. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Randkräfte, welche auf jedes Element aufgebracht werden, um das Gleichgewicht im Element während der verursachten Deformation zu halten, einem System von Kräften gleichwertig sind, welche an den Ecken wirken. Diese Kräfte und Verschiebungen an den Ecken können verglichen werden mit den Knotenkräften und den Verschiebungen in der Struktur eines Rahmentragwerkes. Die Ecken, welche mehreren Elementen angehören, spielen die gleiche Rolle wie die Knoten, welche verschiedene Balken verbinden. Die grundlegende Idee der Finiten Elemente besteht unter anderem darin, die wahre Deformation und Randlast jedes Elementes zu ersetzen durch Eckkräfte und Verschiebungen und diese Kräfte und Verschiebungen in der gleichen Weise anzupassen, wie das im Falle des Rahmentragwerkes geschehen ist.

## 5. Die Ableitung der Steifigkeitsmatrize von Dreieckelementen

Bild 6 zeigt ein Dreieckelement und den deformierten Zustand dieses Elementes. Die Verschiebungen jedes Knotens haben zwei Komponenten  $u$  und  $v$ . Die Verschiebungen des gesamten Elementes müssen nun durch die damit pro Element vorhandenen sechs Verschiebungen ausgedrückt werden. Die einfachste Darstellung ist gegeben durch zwei lineare Polynome:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

wobei  $\alpha_1$  bis  $\alpha_6$  in Funktion der Verschiebungen an den Ecken  $u_q$  und  $v_q$ ,  $u_r$  und  $v_r$  sowie  $u_s$  und  $v_s$  ausgedrückt werden können. Die Anwendung der obigen Gleichungen auf die Eckpunkte ergibt:

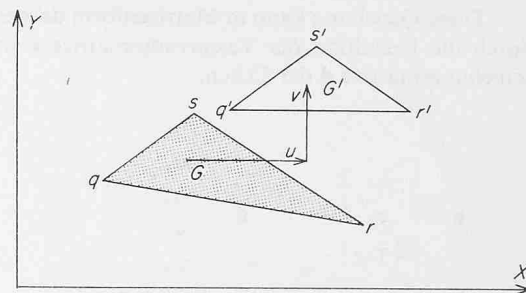


Bild 6. Dreieckelement in deformiertem und ursprünglichem Zustand

1	$x_q$	$y_q$	0	0	0	$\alpha_1$	$u_q$
1	$x_r$	$y_r$	0	0	0	$\alpha_2$	$u_r$
1	$x_s$	$y_s$	0	0	0	$\alpha_3$	$u_s$
0	0	0	1	$x_q$	$y_q$	$\alpha_4$	$v_q$
0	0	0	1	$x_r$	$y_r$	$\alpha_5$	$v_r$
0	0	0	1	$x_s$	$y_s$	$\alpha_6$	$v_s$

Wird dieses Gleichungssystem gelöst, so findet sich:

$$\alpha_1 = [u_q (x_r y_s - x_s y_r) + u_r (x_s y_q - x_q y_s) + u_s (x_q y_r - x_r y_q)] / \Delta$$

$$\alpha_2 = [u_q (y_r - y_s) + u_r (y_s - y_q) + u_s (y_q - y_r)] / \Delta$$

$$\alpha_3 = [u_q (x_s - x_r) + u_r (x_q - x_s) + u_s (x_r - x_q)] / \Delta$$

$$\alpha_4 = [v_q (x_r y_s - x_s y_q) + v_r (x_s y_q - x_q y_s) + v_s (x_q y_r - x_r y_q)] / \Delta$$

$$\alpha_5 = [v_q (y_r - y_s) + v_r (y_s - y_q) + v_s (y_q - y_r)] / \Delta$$

$$\alpha_6 = [v_q (x_s - x_r) + v_r (x_q - x_s) + v_s (x_r - x_q)] / \Delta$$

$$\Delta = (x_r y_s + x_q y_r + x_s y_q) - (x_r y_q + x_q y_s + x_s y_r)$$

Der allgemeine Ausdruck für die Verschiebung des Punktes 0 wird damit:

$$(5.1) \quad u = \frac{u_q}{\Delta} [(x_r y_s - x_s y_q) + (y_q - y_s) x + (x_s - x_r) y] + \frac{u_r}{\Delta} [(x_s y_q - x_q y_s) + (y_s - y_q) x + (x_q - x_s) y] + \frac{u_s}{\Delta} [(x_q y_r - x_r y_q) + (y_q - y_r) x + (x_r - x_q) y]$$

Ein entsprechender Ausdruck gilt für die Verschiebung in Richtung der y-Achse  $v$ , wobei  $u_q$ ,  $u_r$ ,  $u_s$  durch  $v_q$ ,  $v_r$  und  $v_s$  ersetzt werden müssen. Die Verzerrungen im Punkte 0  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $\gamma_{xy}$  lassen sich ausdrücken durch:

$$(5.2) \quad e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = [u_q (y_q - y_s) + u_r (y_s - y_q) + u_s (y_q - y_r)] / \Delta$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = [v_q (x_s - x_r) + v_r (x_q - x_s) + v_s (x_r - x_q)] / \Delta$$

$$2 \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = [u_q (x_s - x_r) + u_r (x_q - x_s) + u_s (x_r - x_q) + v_q (y_r - y_s) + v_r (y_s - y_q) + v_s (y_q - y_r)] / \Delta$$



Diese Gleichung kann in Matrizenform dargestellt werden durch die Definition der Verzerrungsmatrize  $\mathbf{e}$  und der Verschiebungsmatrize  $\mathbf{d}$  der Ecken.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ 2\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_q \\ u_r \\ u_s \\ v_q \\ v_r \\ v_s \end{bmatrix}$$

Daraus:

$$(5.3) \quad \mathbf{e} = \mathbf{Bd}$$

$\mathbf{B}$  ist eine  $3 \times 6$  Matrize:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (y_r - y_s) & 0 & (y_s - y_q) & 0 & (y_q - y_r) & 0 \\ 0 & (x_s - x_r) & 0 & (x_q - x_s) & 0 & (x_r - x_q) \\ (x_s - x_r)(y_r - y_s) & (x_q - x_s)(y_s - y_q) & (x_r - x_q)(y_q - y_r) \end{bmatrix}$$

Die Spannungen im Punkte 0 lassen sich bestimmen, sobald die Verzerrungen bekannt sind. Die gegebene Proportionalität zwischen  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{e}$  schliesst ein, dass  $\mathbf{S} = \mathbf{De}$ , wobei:

$$(5.4) \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Ebener Spannungszustand}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad \text{Ebener Verzerrungszustand}$$

An den Rändern müssen die Spannungen durch die Randkräfte im Gleichgewicht gehalten werden. Hier wird angenommen, dass diese Randkräfte einem Satz von Kräften gleich sind, die an den Ecken  $X_q, Y_q, X_r, Y_r$  und  $X_s, Y_s$  wirken. Damit wirken ausser den Knotenkräften keine Kräfte direkt auf

die Elemente. Um die Knotenkräfte den effektiven Randspannungen und den verteilten Lasten gleichwertig zu machen, ist der einfachste Vorgang derjenige, eine virtuelle Knotenverschiebung anzubringen. Für diese betrachtete Verschiebung gilt, dass die Arbeit der äusseren Kräfte gleich der Arbeit der inneren Spannungen sein muss. Das Konzept, die verteilten Spannungen an den Elementengrenzen durch äquivalente statische Kräfte zu ersetzen, stellt die Frage nach den konkreten physikalischen Bedingungen, die dabei verwendet werden, sowie die Frage, welcher Grad der Annäherung an die exakte Lösung durch den Rechenvorgang tatsächlich erreicht wird. Der Rahmen dieser Ausführungen würde aber gesprengt durch ein weiteres Eingehen auf diese Einzelheiten, und es muss auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen werden. Erwähnt sei noch, dass die Methode der Finiten Elemente unter Beachtung der notwendigen Kriterien den Satz vom Minimum der potentiellen Energie erfüllt. Durch die Ableitung der Steifigkeitsbeziehung auf einem alternativen Weg und der Grundlage des Satzes des Minimums der gesamten Energie des Systems kann die Identität der Methode der Finiten Elemente mit der bekannten Ritz-Methode gezeigt werden. Ist die Verschiebungsfunktion im Element so gewählt, dass sich keine Diskontinuitäten zwischen den Verschiebungen benachbarter Elemente ergeben, dann ist in jedem Zustand der Lösung der Inhalt der totalen Energie des Systems über dem wahren Minimum.

Die Arbeit der äusseren Kräfte kann angeschrieben werden mit:

$$2 W_e = X_q u_q + Y_q v_q + X_r u_r + Y_r v_r + X_s u_s + Y_s v_s$$

$$2 W_e = \begin{bmatrix} u_q & v_q & u_r & v_r & u_s & v_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_q \\ Y_q \\ X_r \\ Y_r \\ X_s \\ Y_s \end{bmatrix} = \mathbf{d}^T \mathbf{P}$$

Die Arbeit der inneren Spannungen pro Einheitsvolumen beträgt unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.3) und (5.4):

$$2 W_i = e_x \sigma_x + e_y \sigma_y + 2 \gamma_{xy} \tau_{xy} = \mathbf{e}^T \mathbf{S}$$

$$2 W_i = (\mathbf{Bd})^T \mathbf{DBd} = \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{DBd}$$

Werden die Regeln der Matrizenrechnung, welche im Anhang zusammengestellt sind, angewendet, so lässt sich schreiben:

$$(5.5) \quad \mathbf{P} = \int_{\text{Volumen}} (\mathbf{B}^T \mathbf{DBd}) dV_{\text{Volumen}} = \mathbf{Kd}$$

$$\mathbf{K} = \int_{\text{Volumen}} (\mathbf{B}^T \mathbf{DB}) dV_{\text{Volumen}}$$

Alle Ausdrücke in dieser Gleichung sind unabhängig von den Koordinaten und beziehen sich auf die Geometrie des Elementes und die elastischen Eigenschaften.

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}^T \mathbf{DB}) \times (\text{Fläche des Dreiecks}) \times (\text{Dicke})$$

In dieser Gleichung sind  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{d}$  Spaltenvektoren mit 6 Elementen, und  $\mathbf{K}$  ist eine  $6 \times 6$  quadratische Matrize. Sind die Koordinaten von  $q, r$  und  $s$  bekannt, der E-Modul und die Poisson-Zahl, so kann die Matrize  $\mathbf{K}$  gerechnet werden, allerdings wird sie infolge der grossen Gleichungszahl nur mit Hilfe der elektronischen Datenverarbeitung bewältigt.

Die Gleichung (5.5) ist im Prinzip dieselbe wie Gleichung (2.24). In beiden Fällen ist die Steifigkeitsmatrize auf ein

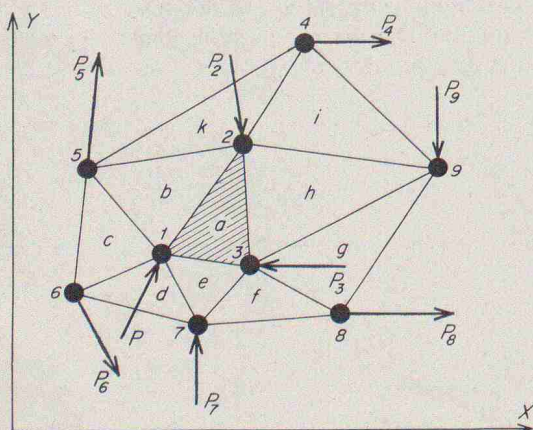


Bild 7. Zusammengesetzte Dreieckselemente



globales Koordinatensystem bezogen. Während bei einem Dreieckselement  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{d}$  die Eckkräfte und Deformationen in der x- und y-Richtung einschliessen, enthalten  $\mathbf{P}'$  und  $\mathbf{d}'$  die Kräfte und Momente sowie die Verschiebungen und Verdrehungen der beiden Enden des Balkens.

## 6. Ableitung der Steifigkeitsmatrize für eine Struktur, die mit Dreieckselementen idealisiert wird

Die Ableitung der Steifigkeitsmatrize erfolgt nach den gleichen Richtlinien wie diejenige des Rahmentragwerkes. Die äusseren Kräfte auf die Struktur mögen entsprechend dem Bild 7 wirken. Die Gleichung (5.5) soll erweitert werden, um die Beziehung jedes Elementes zur Gesamtsteifigkeit zu untersuchen. Für das mit a bezeichnete Dreieckselement kann geschrieben werden:

$$(6.1) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} (\mathbf{K}_{11})_a & (\mathbf{K}_{12})_a & (\mathbf{K}_{13})_a \\ (\mathbf{K}_{21})_a & (\mathbf{K}_{22})_a & (\mathbf{K}_{23})_a \\ (\mathbf{K}_{31})_a & (\mathbf{K}_{32})_a & (\mathbf{K}_{33})_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{K}_{11})_a, \dots, (\mathbf{K}_{33})_a$  stellen  $2 \times 2$  Matrizen dar.

Dieselben Gleichungen können für die weiteren Dreieckselemente in Bild 7 formuliert werden. Das Gleichgewicht im Knoten 1 lässt sich folgendermassen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= (\mathbf{P}_1)_a + (\mathbf{P}_1)_b + (\mathbf{P}_1)_c + (\mathbf{P}_1)_d + (\mathbf{P}_1)_e = \\ &= [(\mathbf{K}_{11})_a + (\mathbf{K}_{11})_b + (\mathbf{K}_{11})_c + (\mathbf{K}_{11})_d + (\mathbf{K}_{11})_e] \mathbf{d}_1 + \\ &+ [(\mathbf{K}_{12})_a + (\mathbf{K}_{12})_b] \mathbf{d}_2 + [(\mathbf{K}_{13})_a + (\mathbf{K}_{13})_e] \mathbf{d}_3 + \\ &+ [(\mathbf{K}_{15})_b + (\mathbf{K}_{15})_e] \mathbf{d}_5 + [(\mathbf{K}_{16})_e + (\mathbf{K}_{16})_d] \mathbf{d}_6 + \\ &+ [(\mathbf{K}_{17})_d + (\mathbf{K}_{17})_e] \mathbf{d}_7 \end{aligned}$$

Das Gleichgewicht der weiteren Knoten wird durch entsprechende Gleichungen beschrieben. Der Beitrag eines Dreieckselementes QRS zur Gesamtsteifigkeitsmatrize einer Struktur besteht in der Addition des Ausdruckes  $(\mathbf{K}_{QR})_i$  zum Element der Zeile Q und der Kolonne R so, dass die Steifigkeitsmatrize folgendermassen dargestellt werden kann, wobei alle Elemente  $2 \times 2$  Matrizen sind:

$$\begin{array}{c|c|c} & \text{(Q)} & \text{(R)} & \text{(S)} \\ \hline \text{(Q)} & - & - & - \\ \text{(R)} & - & - & - \\ \text{(S)} & - & - & - \end{array}$$

Die Elemente jeder Zeile, zum Beispiel Q, können wie folgt ausgedrückt werden:

$$(\mathbf{K}_{QL})_{\text{Allgemein}} = \sum_n (\mathbf{K}_{QL})_i$$

Der Index L entspricht einer Kolonne in der Gesamtsteifigkeitsmatrize, und die Summation erfolgt über alle Dreiecke, welche einen gemeinsamen Rand QL aufweisen. Ist Q gleich L, so wird die Summation erweitert über alle Dreiecke mit gemeinsamer Ecke Q. Daraus lässt sich folgern, dass die Zahl von Elementen, die nicht 0 sind, in jeder Zeile sehr klein ist. Die Grösse der totalen Matrize spielt dabei keine Rolle, da nur eine kleine Zahl von Dreieckselementen gemeinsame Ränder QL oder gemeinsame Ecke Q haben werden. Die zusammengesetzte Steifigkeitsmatrize ist daher sehr spärlich besetzt, und die meisten ihrer Terme sind gleich 0. Von dieser Eigenheit wird bei der numerischen Lösung Nutzen gezogen.

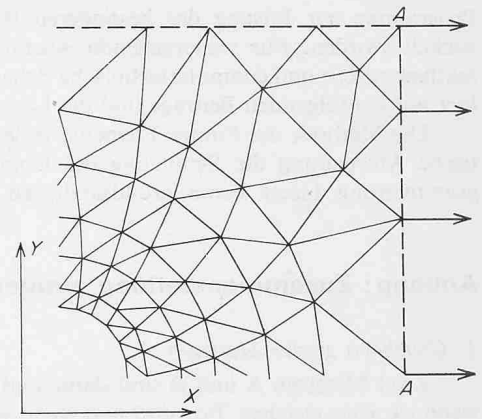


Bild 8. Platte mit einem kreisförmigen Ausschnitt, idealisiert mit Dreieckselementen

In der allgemeinen Form noch einmal angeschrieben lautet die Beziehung zwischen Kräften und Verschiebungen:

$$(6.2) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = (\text{Steifigkeitsmatrize}) \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Wie im Falle des Rahmentragwerkes besteht das Problem darin, die unbekannten Kräfte oder Verschiebungen aus den bekannten Verschiebungen oder Kräften zu finden. Ist der zu untersuchende Körper zum Beispiel eine unendlich breite Platte mit einem kreisförmigen Ausschnitt, so kann er gemäss Bild 8 in Dreieckselemente unterteilt werden. In den Ecken oder Knoten wirken, ausgenommen am Rand, keine äusseren Kräfte. Die Verschiebungen jedes Punktes ergeben sich durch Lösung der Gleichung unter Verwendung der entsprechenden numerischen Methoden. Sind die Verschiebungen bekannt, so ist es möglich, die Dehnungen aus der Gleichung (5.3) und die Spannungen aus der Gleichung (5.4) zu berechnen.

## 7. Numerische Lösung der simultanen linearen Gleichungen

Die vorausgegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass die numerische Deformations-, Kraft- und Spannungsberechnung zurückgeführt werden auf die Lösung eines Satzes von simultanen linearen Gleichungen. Diese Gleichungen ergeben sich normalerweise in der folgenden allgemeinen Form:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

A ist eine  $m \times n$  quadratische Matrize. B und C sind Spaltenvektoren mit n-Elementen. In dieser Gleichung sind die Elemente B Unbekannte, während A und C bekannt sind. Die Elemente von B stellen die Deformation einer Zahl von Punkten dar. A stellt die Steifigkeitsmatrize dar, und C ist eine Spalte von bekannten Konstanten, zum Beispiel Komponenten von Knotenkräften in x- und y-Richtung. Für die Lösung dieser simultanen Sätze linearer Gleichungen bestehen zahlreiche numerische Verfahren, und es wird an dieser Stelle auf die Fachliteratur verwiesen. Der notwendige Rechnungsvorgang ist für einen Digitalcomputer, welcher mit Standardprogrammen für solche Probleme ausgerüstet ist, eine Routineangelegenheit. Es werden dabei direkte und iterative Verfahren benutzt. Als direkte Methode kann das Choleski-Verfahren, als iterative das Gauss-Seidel-Verfahren oder das Jacobi-Verfahren angeführt werden. Standardprogramme nehmen normalerweise an, dass die Koeffizientenmatrize voll besetzt ist, und es wird aus der Bandstruktur der Matrizen, welche für Festigkeitsprobleme typisch sind, kein Vorteil gezogen. Im Interesse der minimalen Speicherbelegung des Computers sowie einer kurzen Rechenzeit sind deshalb zahlreiche



Programme zur Lösung der besonderen Bandmatrizen entwickelt worden. Für weitergehende Ausführungen über die mathematische und computertechnische Behandlung wird auch hier auf die folgenden Beiträge und die Literatur verwiesen.

Die Methode der Finiten Elemente verlangt für ihre praktische Anwendung die Benützung des Computers. Die Programmierung bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

## Anhang: Zusammenstellung einiger Rechenregeln für Matrizen

### 1. Gleichheit zweier Matrizen

Zwei Matrizen **A** und **B** sind dann, und nur dann, gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind und wenn jedes Element der einen Matrize gleich ist dem ihm entsprechenden Element der anderen Matrize.

Es gilt  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  dann, und nur dann, wenn  $a_{ik} = b_{ik}$  für alle

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, m, \\ k &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

erfüllt ist.

### 2. Addition

Zwei Matrizen **A** und **B** des Typs (m, n) werden addiert (subtrahiert), indem man die einander entsprechenden Elemente der ursprünglichen Matrizen addiert (subtrahiert). Die Summenmatrize **C** ist wieder eine Matrize von Typ (m, n).

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik} \text{ für alle } \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, m, \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

### 3. Multiplikation einer Matrize mit einem Faktor

Eine Matrize **A** wird mit einer Zahl *k* multipliziert, indem man jedes Element der Matrize mit der Zahl multipliziert. Das allgemeine Element lautet  $ka_{ij}$ .

### 4. Multiplikation zweier Matrizen

Das Produkt **AB** einer m, n Matrize **A** und einer n, p Matrize **B** in der angegebenen Reihenfolge ist die Matrize **C**, deren Elemente  $c_{ik}$  man als Skalarprodukt der *i*-ten Zeile von **A** mit der *k*-ten Spalte von **B** erhält.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rk}$$

$$i = 1, 2, \dots, m. \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Ist die Zahl der Zeilen von **A** nicht gleich der Zahl der Kolonnen von **B**, so ist die Multiplikation nicht durchführbar. Die Matrizen werden als inkompatibel bezeichnet.

Ausführlich geschrieben lauten die Ausdrücke:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{vmatrix} (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31}) & (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32}) & (a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} + a_{13} b_{33}) \\ (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31}) & (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32}) & (a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33}) \\ (a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} + a_{33} b_{31}) & (a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{32}) & (a_{31} b_{13} + a_{32} b_{23} + a_{33} b_{33}) \end{vmatrix}$$

Allgemein gilt  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

Der Aufbau von wirtschaftlich arbeitenden Standardprogrammen verlangt aber umfangreiche Vorbereitungen. Im Augenblick wird ein beträchtlicher Aufwand in die Weiterentwicklung dieser Methode gelegt, deren Eignung und Vorteile gegenüber anderen numerischen und experimentellen Verfahren durch zahlreiche Berechnungsbeispiele belegt werden können.

### 5. Transponieren

Die aus einer Matrize  $\mathbf{A}_{m,n}$  durch Vertauschen der Zeilen mit den Kolonnen entstehende Matrize  $\mathbf{A}_{n,m}$  nennt man die transponierte Matrize.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Aus diesen Regeln folgt:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

### 6. Inversion

Die invertierte Matrix oder Kehrmatrix  $\mathbf{A}^{-1}$  einer Matrize **A** ist die Matrize, welche mit **A** von links oder rechts her multipliziert die Einheitsmatrize ergibt.

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Die Einheitsmatrize ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonalen, welche von der linken oberen Ecke zur rechten unteren Ecke verlaufen, null sind, währenddem diejenigen längs der Hauptdiagonalen gleich 1 sind.

### Literaturverzeichnis

- [1] B. Langefors: Analysis of Elastic Structures by Matrix Transformation with Special Regards to Semimonocoque Structures. «J. Aeron. Sci.», Oktober 1952, Bd. 19, S. 677-684.
- [2] P. H. Denke: A matrix method of structural analysis. Proceedings of the Second U.S. Congress of Applied Mechanics, 14. bis 18. Juni 1954.
- [3] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp: Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. «J. Aeron. Sci.», 1956, Bd. 9, S. 805.
- [4] J. H. Argyris: Energy Theorems and Structural Analysis. «Aircraft Engineering» 26, 27, 1954, 1955.  
Die Matrizen der Statik. «Ing. Archiv» 25, S. 174-192, 1957.
- [5] F. B. de Veubeke: Matrix Methods of Structural Analysis. London 1964, Pergamon Press.
- [6] R. Zurmühl: Matrizen. Berlin 1964, Springer-Verlag.
- [7] R. K. Livesly: Matrix Methods of Structural Analysis. London 1964, Pergamon Press.
- [8] O. C. Zienkiewicz, G. S. Holister: Stress Analysis. London 1965, J. Wiley.
- [9] O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method. Maidenhead, Berkshire 1967, Mc. Graw Hill.
- [10] W. M. Jenkins: Matrix and Digital Computer Methods in Structural Analysis. Maidenhead, Berkshire 1969, Mc. Graw Hill.

Adresse des Verfassers: E. Erni, dipl. Ing. ETH, Institut für Flugzeugstatik und Leichtbau der ETH, 8006 Zürich, Weinbergstrasse 38.