

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 89 (1971)  
**Heft:** 40

**Artikel:** Numerisch berechnete und gemessene Verschiebungen einer elastisch-plastischen Scheibe  
**Autor:** Kovári, K. / Vannotti, F. / Amstad, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84999>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Das Eidgenössische Amt für Strassen- und Flussbau feiert am 12. Oktober 1971 sein hundertjähriges Bestehen. Mit dem vorliegenden Heft gratuliert die Schweizerische Bauzeitung dem Jubilar herzlich. Es sei anderen, Befugteren, überlassen, die grossen Verdienste und die Geschichte des ASF aufzuzeigen; mit einigen Fachaufsätzen seien hier lediglich Eckpunkte des grossen Arbeitsgebietes kurz gestreift. Der erste Aufsatz weist auf die Bemühungen hin, die Tunnelstatik auf den exakten Grundlagen der Mechanik zu fundieren. Dabei steht die numerische Berechnung der elastisch-plastischen Scheibe im Vordergrund. Der Strassenbau wird in einem Aufsatz über Fahrbahnhebeligkeit beleuchtet. Die beiden letzten Aufsätze befassen sich mit den Naturgewalten: mit einem Gletscherandsee und einem Wildbach. Bei dieser Auswahl mag der Flussbau überwiegen, es war dies jedoch lange Zeit das Haupttätigkeitsgebiet des Amtes; der Strassenbau hat erst in den letzten Jahren mit dem Nationalstrassenbau so stark an Bedeutung gewonnen.

## Numerisch berechnete und gemessene Verschiebungen einer elastisch-plastischen Scheibe

DK 624.074.4:539.37

Von Dr. K. Kovári, F. Vannotti und Ch. Amstad, Zürich

### 1. Einleitung

Viele Probleme der Konstruktionspraxis des Bau- und Maschineningenieurs führen auf die Berechnung von Scheiben. Falls die Scheibe als solche eine Tragfunktion hat, wie bei Wänden oder bei einzelnen Maschinenelementen, herrscht der ebene Spannungszustand vor. Oft stellt aber die Scheibe im ebenen Verformungszustand die erste Vereinfachung eines verwickelten räumlichen Problems dar, wie etwa die ebenen Schnitte senkrecht zur Achse eines Tunnels oder einer verankerten Stützwand.

Der analytischen Behandlung von Scheiben nach der klassischen Elastizitätstheorie sind durch die geometrischen und dynamischen Randbedingungen enge Grenzen gesetzt. Erst die Methode der Finiten Elemente in Verbindung mit leistungsfähigen Computern hat den Weg zur allgemeinen Spannungsanalyse für beliebige Randbedingungen und für nichtlineare Materialeigenschaften eröffnet. Die wichtigsten Arbeiten stammen von R.W. Clough [1] und O.C. Zienkiewicz [2], welche auch die Grundlagen des vom Institut für Strassen- und Untertagbau der ETHZ erstellten Computerprogrammes bilden. Im Gegensatz zu einem früheren, sehr problemorientierten Programm [3] ist die erweiterte neue Fassung für verschiedene Fließbedingungen und sowohl für den ebenen Spannungs- als auch für den ebenen Verschiebungszustand verwendbar. Obwohl das Programm zur Lösung von felsmechanischen Problemen aufgestellt ist, kann es ganz allgemein für jedes Scheibenproblem mit elastisch-idealplastischem Material verwendet werden. Neben den elastischen Materialkennwerten ( $E$  und  $\nu$ ) treten als Festigkeitsparameter die Fließspannung  $\sigma_0$  für die von Misesche Fließbedingung und die Kohäsion  $c$  und der Winkel  $\varphi$  der inneren Reibung für die Coulombsche (oder Drucker-Pragersche) Fließbedingung auf.

In der vorliegenden Arbeit wird über einen einfachen Versuch berichtet, dessen Resultate mit den Ergebnissen der Berechnung einen Hinweis über die Aussagekraft der elastisch-plastischen Analyse geben soll. Wir haben uns die Frage gestellt, wie weit sich die wirklichen Verhältnisse einer gelochten Scheibe unter Zug (Bild 1) aus einem gewöhnlichen handelsüblichen Baustahl ST 37/11 durch das vorliegende Programm

beschreiben lassen. Allfällige Unsicherheiten zwischen Beobachtung und Theorie können auf Streuungen in den Materialkennwerten, auf die Hypothesen der Plastizitätstheorie und schliesslich auf das numerische Vorgehen zurückgeführt werden.

### 2. Die theoretischen Grundlagen der Berechnung

Es sind dies die Stoffgleichungen und die Methode der Finiten Elemente. Die Stoffgleichungen, welche das elastisch-idealplastische System beherrschen, sind

- das Hookesche Gesetz,
- die Fließbedingung,
- das Fließgesetz und
- die Hypothese von Prandtl-Reuss über die totalen Verzerrungszinkremente (Verzerrungsgeschwindigkeiten).

Für Metalle wie ein Siemens-Martin-Stahl ist die grundsätzliche Richtigkeit der von Miseschen Fließbedingung durch Versuche mehrmals bestätigt worden. M. Roš und A. Eichinger [4] geben z.B. die in Bild 2 dargestellten Resultate an, welche insgesamt 10 Versuche an hohlen Stäben unter mehrachsiger Beanspruchung (Torsion mit und ohne Innendruck, Druck mit Innendruck usw.) geliefert haben.

Die von Misesche Fließbedingung für den ebenen Spannungszustand

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_0^2 = 0$$

stellt in den Hauptspannungen ausgedrückt

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_0^2 = 0$$

eine Ellipse (Bild 2) dar. Die Grösse  $\sigma_0$  bezeichnet die Fließspannung (Streckgrenze) des Materials bei einachsigem Zug

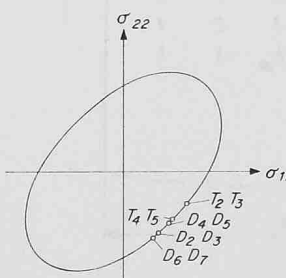


Bild 2. Die Versuche von Roš und Eichinger zur Untersuchung der Fließhypothesen für Stahl

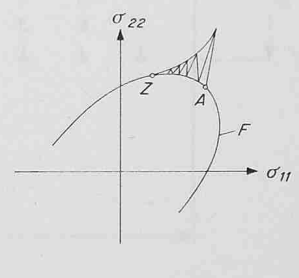


Bild 3. Der Iterationsprozess für ein Lastinkrement

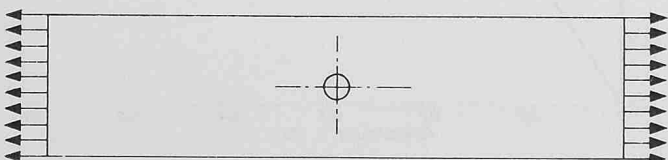


Bild 1. Der Zugversuch an der gelochten Scheibe

oder Druck. Falls der Spannungszustand der Fließbedingung genügt, können plastische (bleibende) Verzerrungen  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  auftreten. Nach der Theorie des plastischen Potentials [5]

$$(1) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

steht der Vektor der plastischen Verzerrungssinkremente  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$

im Spannungsraum senkrecht zur Fließfläche. Da der Faktor  $\lambda$  nur eine Konstante für Proportionalität darstellt, bleibt der Betrag des Vektors zunächst unbestimmt. Nach Ansicht A. Nadais [6] ist die Gültigkeit des Fließgesetzes (1) für Metalle durch die Versuche von Lode, Taylor und Quinney genügend gesichert. In einem elastisch-plastischen System können die einzelnen Elemente im mehrachsigen Spannungszustand neben

den plastischen Verzerrungssinkrementen  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  gleichzeitig auch

elastische Verzerrungen  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  erfahren, falls der Spannungspunkt auf der Fließfläche ebenfalls eine inkrementelle Änderung erfährt. Diese Tatsache drückt die Hypothese von Prandtl-Reuss [5] über die totalen Verzerrungssinkremente

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

aus.

Es sei hier angemerkt, dass die nichtlineare Eigenschaft des elastisch-plastischen Systems durch die Beziehung (1) bedingt ist. Die plastischen Verzerrungssinkremente sind nämlich eine Funktion der totalen Spannungen und nicht der Spannungssinkremente.

Um nun über das angewandte Berechnungsverfahren einen Überblick zu gewinnen, nehmen wir an, die Lasten werden von Null beginnend langsam so weit erhöht, dass in

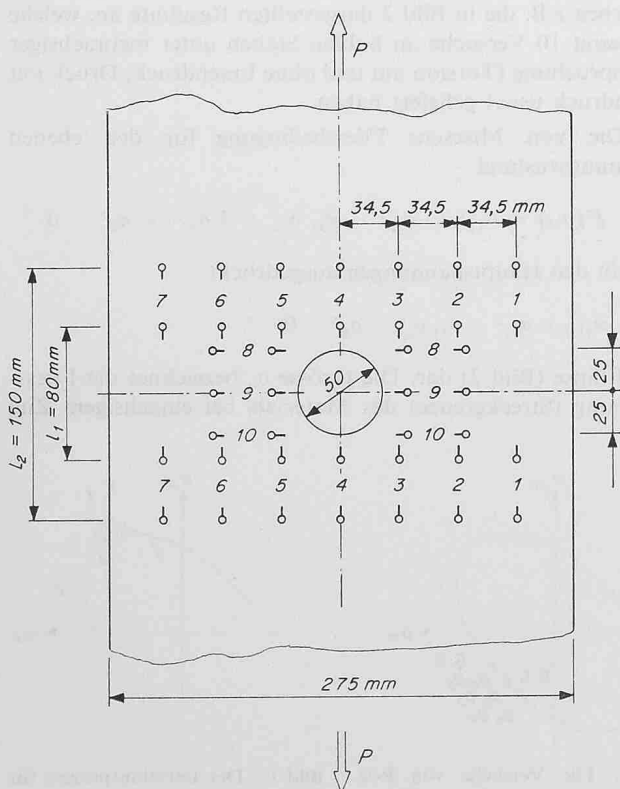


Bild 4. Die Anordnung der Messlängen 1 bis 10

Tabelle 1. Zugversuche an acht Stäben  $25 \times 8$  mm, die aus dem Versuchsstück herausgeschnitten wurden

| Stab    | Streckgrenze $\sigma_s$<br>(t/cm <sup>2</sup> ) | Zugfestigkeit $\beta_z$<br>(t/cm <sup>2</sup> ) |
|---------|---|---|
| $L_1$   | 2,75  | 4,11  |
| $L_2$   | 2,57  | 4,10  |
| $L_3$   | 2,56  | 4,13  |
| $Q_1$   | 2,83  | 4,05  |
| $Q_2$   | 2,79  | 4,08  |
| $Q_3$   | 2,67  | 4,13  |
| $Q_4$   | 2,75  | 4,11  |
| $(Q_s)$ | (3,02)  | (4,06)  |

$L$  = Stab in Längsrichtung

$Q$  = Stab in Querrichtung

irgendeinem Punkt der Scheibe der Spannungszustand die Fließbedingung erfüllt. Den verbleibenden Lastanteil teilt man in Inkremente  $P$  ein und führt für jedes Lastinkrement – von einer rein elastischen Rechnung ausgehend – einen Iterationsprozess so durch, dass am Ende der Spannungszustand die Fließbedingung nirgends verletzt. Dabei ist es von grosser Bedeutung, dass die Spannungsumlagerungen infolge lokalen Fließens durch eine Reihe rein elastischer Berechnungen mit der ursprünglichen Steifigkeitsmatrix erreicht werden. Bild 3 veranschaulicht die Iterationen für ein Lastinkrement, welche den Punkt A schliesslich in Z überführt. Die Konvergenz ist um so rascher, je steifer die elastisch gebliebenen Zonen sind. Der Kollaps eines Systems kündigt sich in der Berechnung durch schlechte Konvergenz an.

### 3. Die Versuchsanordnung

Die Länge der Scheibe wurde so gewählt, dass in einer Entfernung von 10  $d$  beidseits des mittigen Loches ein homogener, linearer Spannungszustand herrsche. Zur Messung von Relativverschiebungen hat man in der Umgebung des Loches kleine Messbolzen symmetrisch angeklebt und dadurch die Messlängen 1–1 bis 7–7 in Längs- und 8–8 bis 10–10 in Querrichtung definiert (Bild 4). Die zweireihige Anordnung mit den Basislängen  $l_1 = 80$  mm und  $l_2 = 150$  mm erlaubt eine übersichtliche Erfassung der Verschiebungen und ihre Entwicklung für die verschiedenen Laststufen. Die Messung selbst erfolgte durch einen mechanischen Deformometer der Firma Huggenberger AG, welcher eine Wiedergabe der Messungen auf  $\pm 10^{-3}$  mm (1  $\mu$ m) genau erlaubt. Alle Messlängen, welche nicht auf den Symmetrieachsen liegen, kommen doppelt vor und ergeben somit durch das arithmetische Mittel eine erhöhte Genauigkeit. Zum Versuch wurde – wie bereits erwähnt – ein handelsüblicher Baustahl ST 37 mit den Abmessungen  $1400 \times 275$  mm und der Stärke  $t = 8$  mm gewählt.

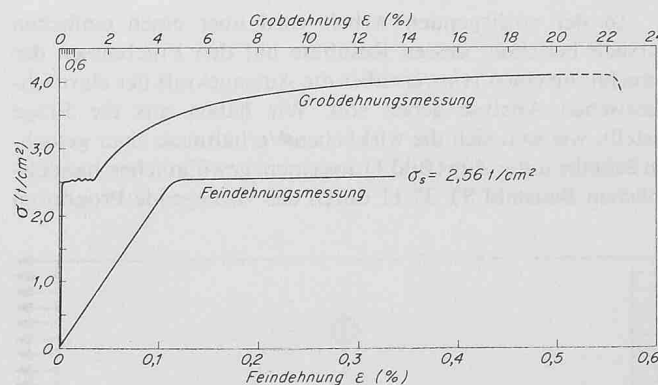


Bild 5. Spannungs-Dehnungsdiagramm des verwendeten Stahles für den Zugversuch  $L_3$

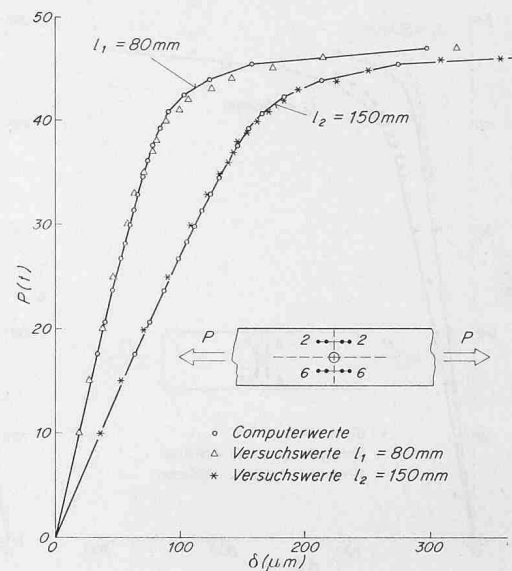
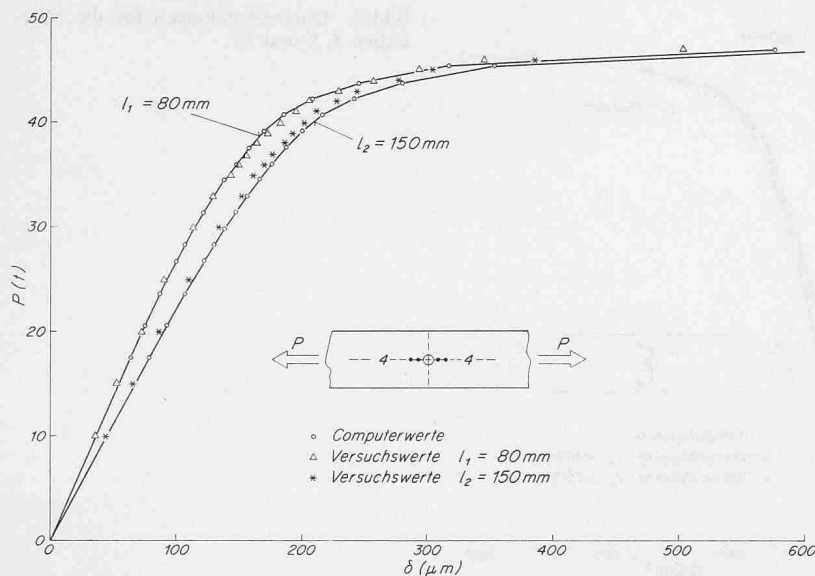


Bild 6. Längsverformungen für die Messstellen 4, 2 und 6 ( $1\text{ }\mu\text{m} = 10^{-3}\text{ mm}$ )

Nach Beendigung der Messungen hat man in der Eidg. Materialprüfungsanstalt (EMPA) aus den nichtplastifizierten Teilen des Versuchsstückes in Längs- und Querrichtung insgesamt acht Stäbe ( $25 \times 8\text{ mm}$ ) herausgeschnitten und an diesen Zugversuche durchgeführt. Die in Tabelle 1 zusammengestellten Ergebnisse zeigen Streuungen der Streckgrenzen in der Größenordnung von rund 10%, wenn vom Extremwert für  $Q_5$  abgesehen werden darf.

Die Schwankungen von  $\sigma_s$  der Einzelstäbe und der durchschnittlich höhere Wert für Querstäbe sind auf Kaltverformungen bei der Herstellung zurückzuführen, da die Zugfestigkeit  $\beta_Z$  weitgehend konstant ist.

Die Messwerte selbst werden vom Wert  $\sigma_s$  der engen Umgebung des mittleren Loches bestimmt. Diesen Wert können wir genügend genau aus der gemessenen Traglast  $P^*$  bei Vollplastifizierung des reduzierten Querschnittes  $F_{red}$  nach der Formel

$$\bar{\sigma}_s = \frac{P^*}{F_{red}}$$

ermitteln. Mit der gemessenen Traglast  $P^* \approx 46,0\text{ t}$  und der reduzierten Fläche  $F_{red} = 18,0\text{ cm}^2$  ergibt sich die mass-

gebende Streckgrenze für die nachfolgenden Berechnungen als  $\sigma_s = 2,55\text{ t/cm}^2$ . Dieser Wert wird auch durch die zwei Versuche  $L_2$  und  $L_3$  (Tabelle 1) bestätigt. Wegen der Art der Beanspruchung werden bei einer Richtungsabhängigkeit der Streckgrenzen eher die Werte für die Längsrichtung das Fließverhalten bestimmen. Der Elastizitätsmodul wurde in einem homogenen Spannungsbereich der Scheibe durch Messungen ermittelt. Als Eingabedaten für die iterativen Berechnungen wurden

$$E = 2,12\text{ t/cm}^2, \quad \nu = 0,3, \quad \sigma_0 = 2,55\text{ t/cm}^2$$

eingeführt. Zur Charakterisierung des verwendeten Materials sei noch ein vollständiges Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Bild 5) angegeben. Der unmittelbare Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich lässt die Annahme des elastisch-idealplastischen Materials im Fließbereich (bis zur anfänglichen Verfestigung) begründet erscheinen.

#### 4. Die Ergebnisse der Berechnung und des Versuches

Sie wurden in Form von Kraft-Verformungsdiagrammen für die in Bild 4 definierten Messlängen dargestellt. Die Belastungssinkremente  $\dot{P}$  hat man sowohl beim Versuch als

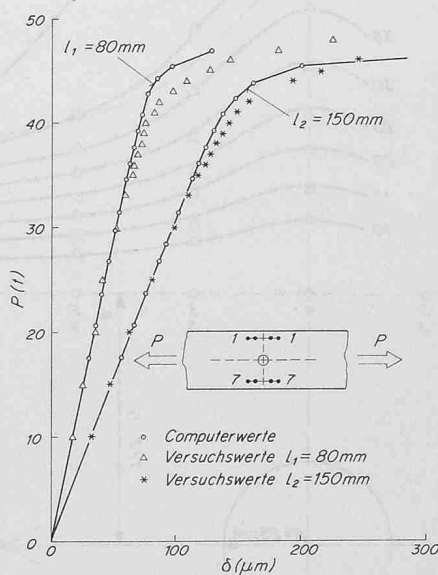
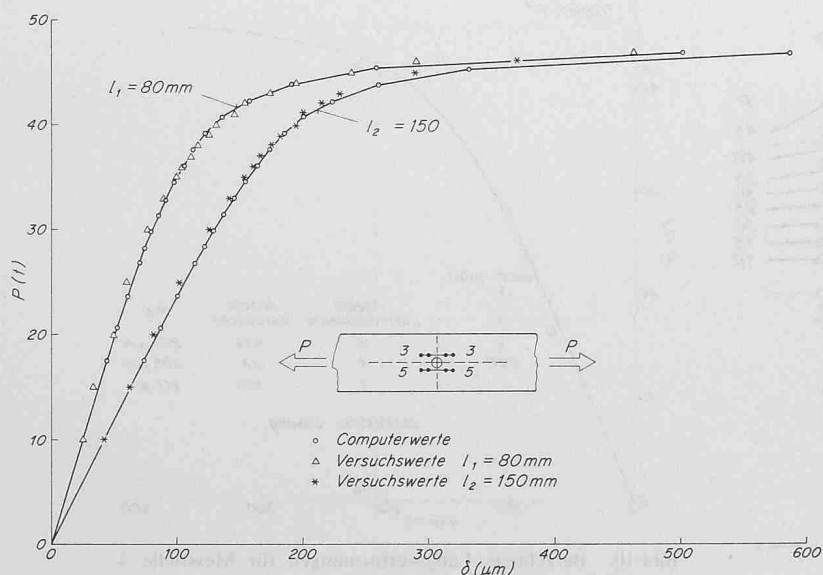


Bild 7. Längsverformungen für die Messstellen 3, 5, 1 und 7

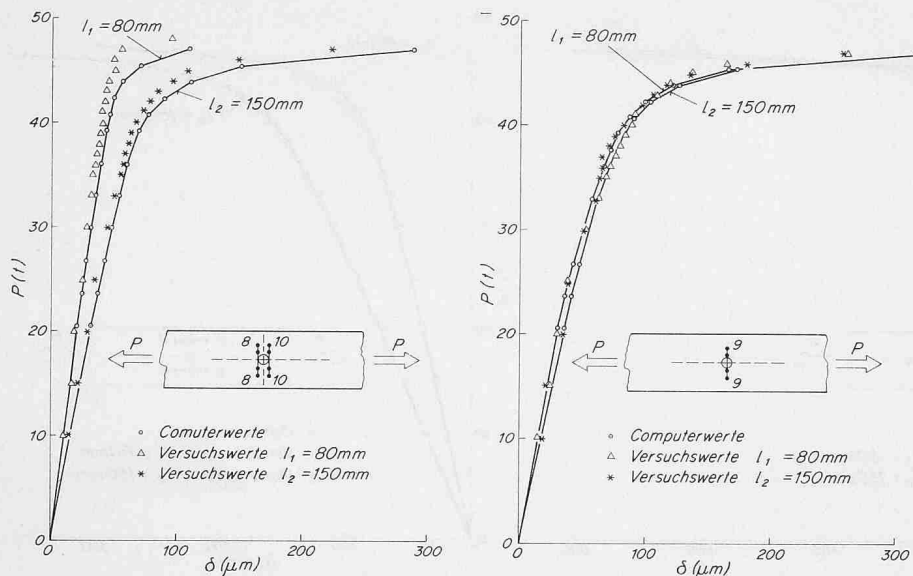


Bild 8. Querverformungen für die Messstellen 8, 9 und 10

auch bei der Berechnung so klein gewählt, dass sie den nicht-linearen Teil der Diagramme durch genügend viele Punkte beschreiben. Zur Ausschaltung des Einflusses einer allfälligen Krümmung der Platte auf die Genauigkeit der Messwerte wurde mit der eigentlichen Messung erst nach einer Vorspannung von  $P_v = 10$  t begonnen. Da die rechnerische Fließlast

$P_0 = 17,55$  t beträgt, liegt  $P_v$  weit unten im elastischen Bereich. Bei der Betrachtung der Ergebnisse (Bilder 6 bis 9) fällt auf, dass die Kraft-Verformungskurven der beiden Messlängen  $l_1$  und  $l_2$  um so mehr auseinandergehen, je weiter sie von den Symmetrieachsen entfernt sind. In Bild 8 decken sich sogar die beiden Kurven für die Messstelle 9 fast vollständig. In Bild 9 ist die Wirkung des mittleren Loches auf die Verschiebungen der Bolzenreihe gegenüber der unverschieblich gedachten Symmetrieachse  $s-s$  ersichtlich. Das elastisch-plastische Material ergibt für  $P = 45$  t rund die doppelte Verschiebung gegenüber dem idealelastischen Stoff. Die Erklärung für die grösseren Abweichungen der Versuchswerte für die Messstellen 1,7 sowie 8 und 10 mit der Messlänge  $l_1 = 80$  mm muss in lokalen Abweichungen der Festigkeitseigenschaften gesucht werden.

## 5. Die Untersuchung der Konvergenz

Die Genauigkeit der numerischen Berechnung ist abhängig von der Einteilung der Belastung in Inkremente und von der Anzahl der Iterationen, welche für ein jedes Inkrement durchgeführt werden. Um die Konvergenz zu verfolgen, wurde der Punkt  $R$  in Bild 10 auf verschiedene Arten berech-

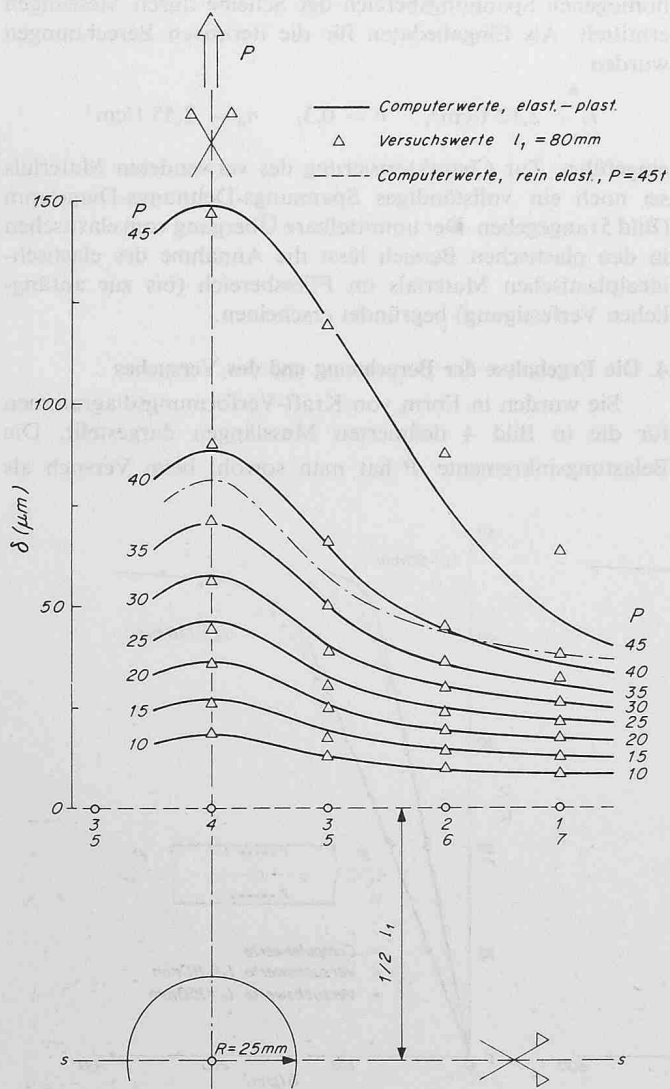


Bild 9. Längsverschiebungen der Bolzenreihe mit  $l_1 = 80$  mm

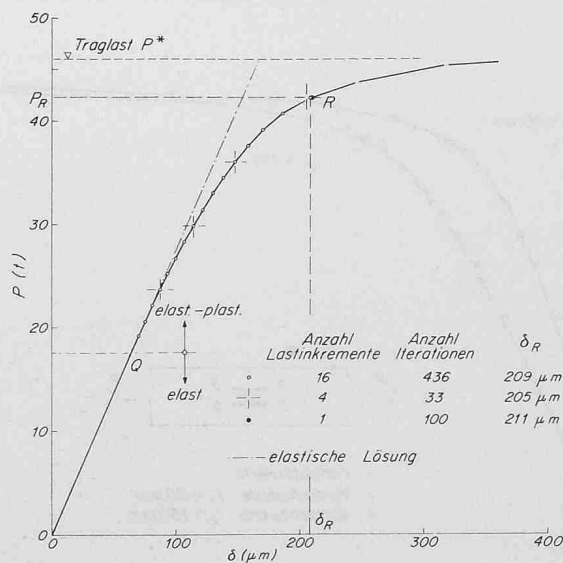


Bild 10. Berechnete Längsverschiebungen für Messstelle 4  $l_1 = 80$  mm. Vergleich der Resultate verschiedener Berechnungen für den Punkt  $R$



net. Das ausgezogene Kraft-Verformungsdiagramm bis zum Punkt  $R$  ergab sich durch die Einteilung der Lastdifferenz ( $P_R - P_Q$ ) in 16 Inkremente mit insgesamt 436 Iterationen. Zum Vergleich wurden für die gleiche Endlast  $P_R$  Berechnungen mit vier Lastinkrementen und 33 Iterationen bzw. mit einem Inkrement und 100 Iterationen durchgeführt. Bild 11 zeigt die rasche Konvergenz der Verformungen für den Belastungsfall mit einem einzigen Inkrement ( $P_R - P_Q$ ). Für das vorliegende Problem können wir feststellen, dass ein verhältnismässig kleiner numerischer Aufwand bereits zu guten Ergebnissen führt, solange die Endlast  $P_R$  etwa 95% der Traglast  $P^*$  nicht überschreitet.

## 6. Schlussbemerkungen

Ein Blick auf die dargestellten Ergebnisse der numerischen Berechnung und des Versuches lässt erkennen, dass die theoretische Behandlung der elastisch-plastischen Scheibe mit der Methode der Finiten Elemente und den bekannten Hypothesen der Plastizitätstheorie möglich ist. Der dargestellten experimentellen und rechnerischen Untersuchung kommt insofern ein wissenschaftliches Interesse zu, als die Sätze der Plastizitätstheorie zumindest für Metalle noch mehr erhärtet werden. Bei der Anwendung des Berechnungsverfahrens auf andere Materialien, wie zum Beispiel Fels oder Lockergestein, liegen die Verhältnisse anders, da die Idealisierung auf den elastisch-idealplastischen Stoff mit der Coulombschen oder Drucker-Pragerschen Fließbedingung eine grössere Vereinfachung bedeutet, als dies bei Metallen der Fall ist. Eine allfällige Unstimmigkeit zwischen Berechnung und Beobachtung wird deshalb nicht im Algorithmus, sondern im verwendeten Materialmodell zu suchen sein.

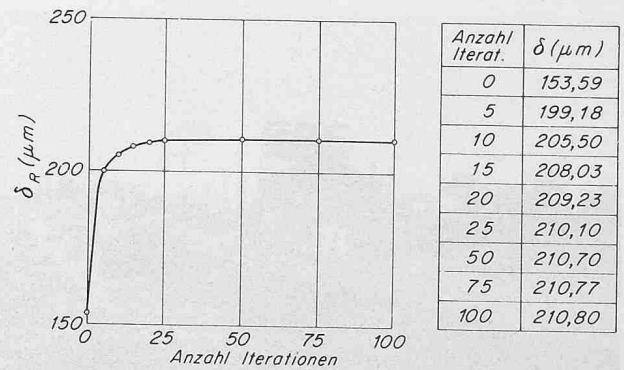


Bild 11. Konvergenz der Verschiebung  $\delta_R$  bei einem einzigen Lastinkrement, Messstelle 4,  $l_1 = 80$  mm

## Literaturverzeichnis

- [1] Clough, R. W.: The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, 1960.
- [2] Zienkiewicz, O. C., Vallapant, S., King, J. P.: Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems "Initial Stress" Finite Element Approach. «Int. J. for Num. Method. in Eng.», Vol. 1 (1969).
- [3] Kovári, K.: Ein Beitrag zum Bemessungsproblem von Untertagbauten, «Schweiz. Bauzeitung» 87 (1969), H. 37, S. 687-697.
- [4] Roš, M., Eichinger, A.: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, EMPA-Bericht, Sept. 1926, Zürich.
- [5] Hill, R.: The Mathematical Theorie of Plasticity, Oxford University Press, 1967.
- [6] Nadai, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. I, S. 250 Mc Graw-Hill, 1950.

Adresse der Verfasser: Dr. sc. techn. K. Kovári, F. Vannotti, dipl. Math. ETH, und Ch. Amstad, dipl. Bau-Ing. ETH, Institut für Strassen- und Untertagbau an der ETH Zürich, Clausiusstrasse 23, 8006 Zürich.

## Helle oder dunkle Fahrbahnoberflächen?

Von H. Leuch, Zürich

In Art. 5 des Bundesgesetzes über die Nationalstrassen wird verlangt: «Nationalstrassen haben hohen Verkehrsanforderungen zu genügen; sie sollen insbesondere eine sichere und wirtschaftliche Abwicklung des Verkehrs gewährleisten.» Art. 39 legt fest: «Die Nationalstrassen sind nach neuesten Erkenntnissen der Strassenbautechnik und nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten zu erstellen.»

Über das zum Aufbau der Strassenkörper zu verwendende Material und über die zu erzielenden Eigenschaften der Schichten samt der Oberfläche der Verschleisschicht bestehen in der Schweiz Normen; sie wurden von der Vereinigung Schweizerischer Strassenfachmänner (VSS) erarbeitet und von der Schweizerischen Normen-Vereinigung (SNV) herausgegeben. Dem das ganze Normenwerk überblickenden Benutzer fällt auf, dass über sehr viele Eigenschaften des Fahrbahnkörpers geschrieben wird, zum Beispiel über zertrümmerungsfestes Material, Verdichtungswerte, Hohlraumgehalt, Strassenentwässerung und sodann über Ebenheit, Griffbarkeit, Haltbarkeit der

Verschleisschichtoberfläche; es wird gesprochen von der Widerstandsfähigkeit der Oberfläche gegen Erschütterung, wechselnde Last, extrem schwankende Witterungseinflüsse, Bremskräfte sowie von Dichtigkeit zum Schutz der unteren Schichten, Sicherheit gegen Aquaplaning, Beständigkeit gegen Spikes usw. Von einer Eigenschaft, die von allen Strassenbenützern und ganz besonders von den Fahrzeugführern

bestimmt wahrgenommen wird, ist leider nicht die Rede, nämlich vom Verhalten der Fahrbahnoberfläche gegenüber auffallendem Licht. Diese Eigenschaft wäre jedoch würdig, in die Normen der Strassenbauer aufgenommen zu werden.

### Das Auge des Strassenbenützers

Jeder Verkehr auf der Strasse, der langsame wie der schnelle, ist augen-

Bild 1. Autostrasse mit heller und dunkler Fahrspur; Sicherheits- und Leitlinie (Italien)

