

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	89 (1971)
Heft:	36
Artikel:	Anwendungsbeispiele zur Berechnung segmentierter Radialgleitlager endlicher Breite bei instationärem Betrieb
Autor:	Ott, H.H. / Varga, Z.E.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-84976

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Anwendungsbeispiele zur Berechnung segmentierter Radialgleitlager endlicher Breite bei instationärem Betrieb

Von Prof. Dr. H. H. Ott und Z. E. Varga, dipl. Ing., ETH Zürich

DK 621.822.5.004.12

Zusammenfassung

Mit einem kürzlich veröffentlichten Berechnungsverfahren für segmentierte Radialgleitlager bei instationärer Belastung [1], das auf bisher nicht verwendeten Randbedingungen beruht, werden einige in der Praxis gebräuchliche Lager untersucht. Zum Nachweis des Randbedingungseinflusses werden zunächst bei stationärem Betrieb die Druckverteilungen in verschiedenen Einzelsegmenten und in ganzen mehrsegmentigen Lagern ermittelt. Für ein Zitronenspiellager werden die vollständigen Kennlinien angegeben, die zur Bemessung solcher Lager notwendig sind. – Um die Anwendung des Berechnungsverfahrens im instationären Bereich zu zeigen, werden Druckverteilungen und resultierende Kraftverläufe bei kreisförmigen und elliptischen Bewegungen des Wellenzentrums bei zwei- und dreisegmentigen Lagern berechnet. Schliesslich werden für das vorerwähnte stationär untersuchte Zitronenspiellager auch die Feder- und Dämpfungszahlen ermittelt und mit gemessenen und berechneten Ergebnissen anderer Autoren verglichen.

1. Einleitung

Der vorliegende Aufsatz behandelt Anwendungen des in [1] veröffentlichten Berechnungsverfahrens für segmentierte Radiallager endlicher Breite. Mit dieser Theorie werden einige Einzelsegmente mit einfachen Spaltformen und ganze Radiallager von gebräuchlicher Bauart berechnet. Bei den gewählten Fällen handelt es sich vorwiegend um solche, die in der Literatur mit anderen Methoden berechnet wurden, so dass ein Vergleich der Ergebnisse möglich ist. Eine derartige Gegenüberstellung ist deswegen wichtig, weil in den Berechnungen anderer Autoren andere Randbedingungen für die Druckverteilung im Schmierspalt angenommen werden. Anhand der konkreten Fälle lassen sich Rückschlüsse auf den Einfluss der Randbedingungen ziehen. Insbesondere wird mit den Resultaten von G. Schaffrath [2] [3] verglichen, der mit sehr vereinfachten Randbedingungen arbeitet und das Verfahren der «Negativbereich-Unterdrückung» anwendet¹⁾.

Von einer allgemeinen instationären Theorie ist zu fordern, dass sie für den Sonderfall des stationären Betriebes brauchbare, das heisst mit den bekannten, experimentell gesicherten Berechnungsverfahren für konstante Belastung übereinstimmende Ergebnisse liefert. Deshalb werden zunächst einige stationäre Fälle untersucht und die Ergebnisse mit denjenigen anderer Autoren verglichen. Insbesondere werden im Hinblick auf die Beurteilung des Randbedingungseinflusses solche stationäre Beispiele berechnet, die auch Schaffrath in [2] und [3] untersucht hat.

¹⁾ Schaffrath schreibt an den Grenzen der Segmente den Druck Null vor und setzt dort, wo die Rechnung negative Drücke ergibt, den Druck gleich Null.

2. Theoretische Unterlagen und Formelzeichen

Das angewandte Berechnungsverfahren ist in [1] vollständig beschrieben. Auf die Wiedergabe dieser Theorie und der darin enthaltenen Gleichungen wird hier verzichtet. Gleichungen aus [1] werden durch die betreffenden Nummern mit vorangestelltem Buchstaben T bezeichnet. Ebenso werden alle Bezeichnungen aus [1] übernommen; es wird auf die dort vorhandene Formelzeichen-Zusammenstellung verwiesen. Nachstehend sind nur diejenigen Zeichen aufgeführt, die in der vorliegenden Arbeit neu hinzukommen.

a	große dimensionslose Halbachse der elliptischen Verlagerungsbahn des Wellenzentrums
b	kleine dimensionslose Halbachse der elliptischen Verlagerungsbahn des Wellenzentrums
$S_1 = H$	Horizontalkomponente des resultierenden Sommerfeldzahl-Vektors
$S_2 = V$	Vertikalkomponente des resultierenden Sommerfeldzahl-Vektors
β	relative Dämpfungskonstante (auf S_{ores} bezogen)
β^+	Dämpfungskonstante
γ	relative Federkonstante (auf S_{ores} bezogen)
γ^+	Federkonstante
ξ_1	dimensionslose Horizontalkoordinate des Wellenzentrums
ξ_2	dimensionslose Vertikalkoordinate des Wellenzentrums
$\dot{\xi}_{1,2}$	dimensionslose Geschwindigkeit des Wellenzentrums in Richtung $\xi_{1,2}$
$\Pi(\varphi)$	über die Lagerbreite gemittelter dimensionsloser Überdruck des Schmiermittels im Spalt
$\hat{\Pi}^*(\varphi)$	dimensionsloser Druck in der Mittelebene des Lagers bei Randbedingungen nach Schaffrath [2] («Negativbereich-Unterdrückung»)

Indices:

i	Richtung der Kraftkomponente (bei Feder- und Dämpfungskonstanten)
k	Richtung der Verlagerung des Wellenmittelpunktes (bei Feder- und Dämpfungskonstanten)
s	Gleichgewichtslage (Wellenverlagerung bei statischer Belastung; Punkt auf Gümbelkurve)

3. Allgemeine Angaben über die numerische Durchführung des Verfahrens

Für das vorliegende Berechnungsverfahren [1] wurde ein ALGOL-Programm für die am ETH-Rechenzentrum vorhandene Maschine ausgearbeitet.

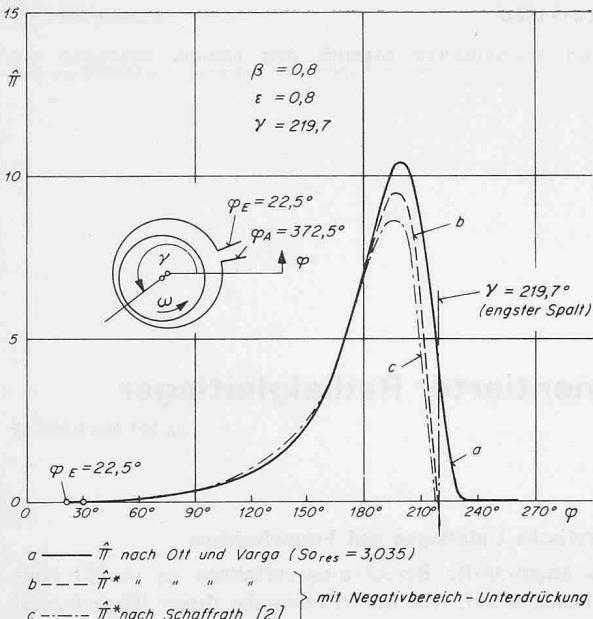


Bild 4.1. Druckverteilung in der Mittelebene eines stationär laufenden Kreisschalen-Lagers

Die sowohl für die Genauigkeit des Verfahrens wie auch für den Rechenaufwand wichtigste Größe ist die Zahl n der Intervalle im Segment. Systematische Untersuchungen haben ergeben, dass bei üblichen Spaltformen mit $\Delta\varphi = 2^\circ \dots 5^\circ$ eine für die Anwendungen hinreichende Genauigkeit der Ergebnisse (insbesondere der resultierenden Sommerfeldzahl S_{ores}) erreicht wird²⁾.

4. Druckverteilung in einzelnen Segmenten bei stationärem Betrieb

Die vorliegende Segment-Theorie lässt sich insbesondere auf kreiszylindrische Lagerschalen anwenden, wobei auch das volumenschließende Kreislager mit einer axialen Schmiermittel-Zuführnut als Grenzfall eines Segmentlagers aufgefasst werden

²⁾ im Bogenmaß $\Delta\varphi = 0,03 \dots 0,09$

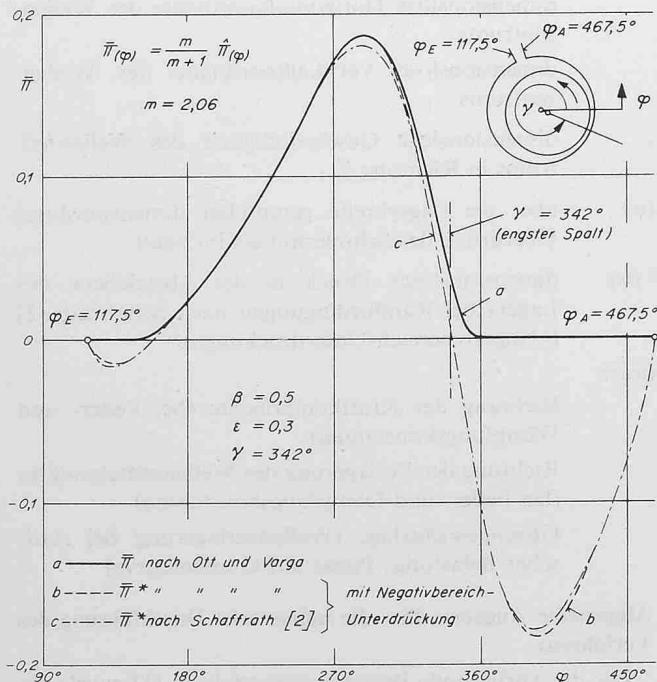


Bild 4.3. Verteilung des mittleren Drucks in einem stationär laufenden Kreisschalen-Lager

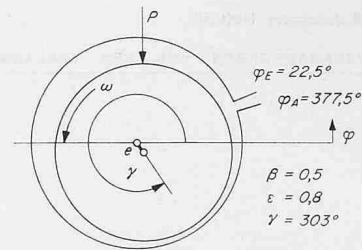


Bild 4.2. Kreisschalen-Lager mit vertikaler Belastung

kann. In diesem Abschnitt sollen einige Fälle behandelt werden, die der Literatur entnommen werden können und aus denen der Einfluss der Randbedingungen zu ersehen ist.

Beispiel 1: Kreisschale mit einer Zuführnut (Bild 4.1)

Dieses Beispiel hat Schaffrath in [2] behandelt (Bild 6b in [2]). Die nach [1] in der Mittelebene des Lagers berechnete Druckverteilung ist in Bild 4.1 dargestellt und mit den Resultaten von Schaffrath verglichen. Die Berechnung nach [1] führt auf einen Randbedingungsfall b_1 . Bei der gewählten Lage des Wellenzentrums ergibt sich eine resultierende Kraft auf die Welle, die annähernd horizontal nach rechts weist (Bild 4.1).

Das Beispiel zeigt, dass die gewählten Randbedingungen eine nicht vernachlässigbare Auswirkung auf die Druckverteilung (und damit auch auf Richtung und Größe der resultierenden Tragkraft) der Lagerschale besitzen. Die Druckverteilung nach Schaffrath endet bereits vor der engsten Spaltstelle, was im Widerspruch zu allen experimentellen Befunden steht [7].

Beispiel 2: Kreisschale mit einer Zuführnut (Bild 4.2)

Dieses Beispiel wurde gewählt, weil in [2] eine Gegenüberstellung der resultierenden dimensionslosen Tragkraft S_{ores} nach verschiedenen Berechnungsverfahren angegeben ist (Lagergeometrie nach Bild 4.2). Für $\varepsilon = 0,8$ lauten die Zahlwerte:

Verfasser	S_{ores}
(a) Ott & Varga [1]	1,780
(b) Sassenfeld & Walther [9]	1,730
(c) Schaffrath [2]	1,543
(d) Someya [10]	1,535

Die Gegenüberstellung zeigt deutlich den Einfluss der Randbedingungen. Die annähernd übereinstimmenden Resultate (a) und (b) sind beide mit den als physikalisch korrekt zu betrachtenden Gumbelschen Auslauf-Randbedingungen gerechnet, während Someya (d) in ähnlicher Weise wie Schaffrath (c) den Negativbereich der Lösungsfunktion unterdrückt, was die enge Übereinstimmung der Resultate (c) und (d) erklärt³⁾.

Beispiel 3: Kreisschale mit einer Zuführnut (Bild 4.3)

Die Daten dieses Beispiels sind dem Bild 6 aus [2] entnommen. Die Resultate sind auf Bild 4.3 dargestellt und mit den Ergebnissen von Schaffrath verglichen. Da er für dieses Beispiel nicht den dimensionslosen Druck $\hat{\Pi}$ in der Mittelebene, sondern den über die Lagerbreite gemittelten Druck $\bar{\Pi}$ angibt, muss unser Ergebnis von $\hat{\Pi}$ auf $\bar{\Pi}$ umgerechnet werden.

³⁾ Die Öleintrittsbedingungen bei Sassenfeld & Walther [9] und bei Someya [10] entsprechen nicht genau denjenigen des obigen Beispiels, doch ist dieser Einfluss gering.

⁴⁾ mit (T...) werden die Gleichungen aus [1] bezeichnet

Dies geschieht mit der Gleichung (T 4.1)⁴) durch einmalige Integration über die Lagerbreite:

$$(4.1) \quad \bar{\Pi}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 - |\zeta|^m) \hat{\Pi}(\varphi) d\varphi = \frac{m}{m+1} \hat{\Pi}(\varphi)$$

Im vorliegenden Beispiel hat m nach Gleichung (T 4.6) den Wert $m = 2,06$.

Aus Bild 4.3 ist zu ersehen, dass die Druckverteilung, die auf einen Randbedingungsfall b_3 führt, gegenüber Schaffrath nur verhältnismässig geringe Unterschiede ergibt. Die grössten Differenzen treten in der Gegend des engsten Spaltes ($\varphi = \gamma$) auf.

Beispiel 4: Halbkreisschale (Bild 4.4)

In diesem Beispiel wird eine Wellenlage untersucht, wie sie in Oberschalen von Zitronenspiellagern vorkommen kann. Verglichen werden wiederum die Druckverteilung $\hat{\Pi}(\varphi)$ mit den Randbedingungen nach [1] und der Druckverlauf $\hat{\Pi}^*(\varphi)$ mit den Randbedingungen, wie sie Schaffrath verwendet; $\hat{\Pi}^*(\varphi)$ wurde mit einem besonderen, auf [1] beruhenden Rechenprogramm ermittelt.

Aus Bild 4.4 ist ersichtlich, dass der Einfluss der Randbedingungen hier sehr gross ist. Die resultierende Tragkraft ist mit den Randbedingungen, wie sie Schaffrath verwendet, nur etwa halb so gross wie mit den Gumbelschen Randbedingungen, die in [1] verwendet werden. Ferner endet auch hier (wie im Beispiel 1) bei der Lösung mit den Randbedingungen nach Schaffrath der Druckberg vor der engsten Spaltstelle, was der Erfahrung widerspricht.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die nach [1] berechneten Druckverteilungen infolge der unterschiedlichen Randbedingungen teilweise erheblich anders verlaufen als die von Schaffrath in [2] und [3] berechneten. Die Unterschiede in den Druckverläufen sind in jenen Fällen gross, in denen die Grundlösung u^* nach Gleichung (T 9.19) über einen beträchtlichen Teil der Segmentlänge negative Werte annimmt. Dies trifft für Kreisschalen-Segmente häufig zu, und zwar vor allem

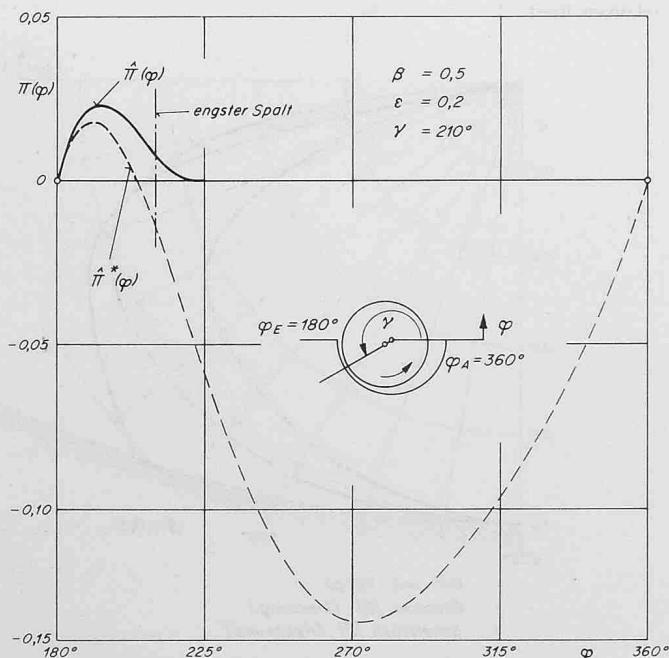


Bild 4.4. Druckverteilung in einem stationär betriebenen Halbkreis-Segment

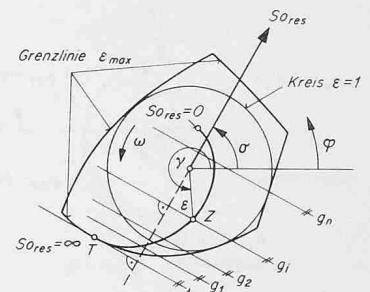


Bild 5.1. Ermittlung der Gumbelkurve für ein segmentiertes Radiallager

dann, wenn solche Segmente einen relativ grossen Teil der Welle umschließen (also z. B. bei 180°-Schalen). Die durch die Randbedingungen bewirkten Unterschiede zwischen der Berechnungsweise nach Schaffrath und der in unserem Verfahren angewandten Methoden verschwinden grundsätzlich ganz, wenn der Druck im ganzen Segment positiv ist.

5. Mehrsegmentige Lager bei stationärem Betrieb

5.1 Ermittlung der Gumbelkurve

Bei stationär betriebenen Lagern ist die Verlagerungs- oder Gleichgewichtskurve wichtig, die man auch als Gumbelkurve bezeichnet. Man versteht darunter den geometrischen Ort aller Punkte, die das Wellenzentrum mit fester Lastrichtung bei Variation der Sommerfeldzahl S_{ores} durchläuft. Gestützt auf [1] lässt sich eine Gumbelkurve für ein beliebiges segmentiertes Lager mit nachstehend beschriebenem Verfahren ermitteln. Man geht vom Bewegungsbereich der Welle in dimensionsloser Darstellung aus (Bild 5.1) und ermittelt zunächst den Randpunkt T der Gumbelkurve, der für $S_{ores} = \infty$ angenommen wird. Er ergibt sich, indem man senkrecht zur Lastrichtung die Tangente t an die Grenzlinie des Bewegungsbereiches des Wellenzentrums zieht. Dann legt man parallel zu t eine Schar von Geraden g_i und sucht durch ein systematisches Iterationsverfahren auf jeder Geraden g_i jene Wellenlage Z , welche eine in der Richtung σ wirkende resultierende Ölkruste auf die Welle ergibt. Die Punkte auf den Geraden g_i müssen durch ihre Polarkoordinaten (ϵ, γ) in die Rechnung eingegeben werden⁵⁾.

5.2 Zitronenspiellager

Das Zitronenspiellager ist ein symmetrisches, aus zwei gegeneinander verschobenen kreiszylindrischen Halbschalen bestehendes Radiallager, das meist senkrecht zur Teilungsebene belastet wird (Bild 5.2). Das Betriebsverhalten eines solchen Lagers (d.h. Wellenlage, Reibung, Schmierstoffdurchsatz) kann mit dem Berechnungsverfahren [1] ermittelt werden.

⁵⁾ Die in der Literatur erwähnte Methode, die iterative Bestimmung von Gumbelkurven-Punkten auf ϵ -Kreisen durchzuführen, ist unzweckmässig, weil es Fälle gibt, in denen auf einer Linie $\epsilon = \text{konst}$ mehr als ein Gumbelpunkt liegt (Beispiel: Zitronenspiellager). Beim oben beschriebenen Verfahren kommen solche Mehrfachlösungen nicht vor.

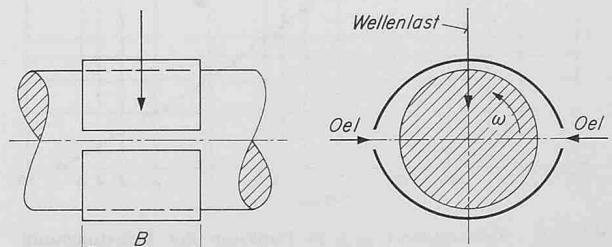


Bild 5.2. Schematischer Aufbau des Zitronenspiel-Lagers

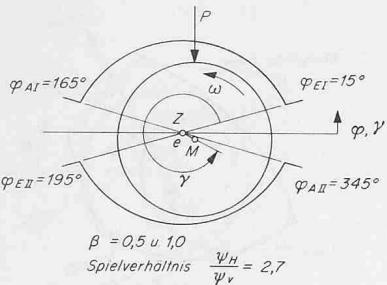


Bild 5.3. Geometrie des Zitronenspiellagers; Definition der Spiele ψ_H (horizontal) und ψ_V (vertikal) siehe [5]

Auf die Wiedergabe der Auswertungsergebnisse wird hier verzichtet, da sie in [5] ausführlich dargestellt sind. Es sei hier lediglich darauf hingewiesen, dass die dimensionslosen Kenngrößen in [5] nicht wie in [1] mit dem minimalen (d.h. dem vertikalen) Spiel, sondern mit dem horizontalen Spiel gebildet sind. Dies ist an sich unwesentlich, muss aber bei praktischen Anwendungen beachtet werden.

Hingegen ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit das spezielle Zitronenspiellager durchgerechnet worden, das J. Glienicke in [8] experimentell untersucht hat und das von Schaffrath in [2] mit seinem Berechnungsverfahren theoretisch berechnet wurde. Eine Gegenüberstellung der Resultate ist deswegen aufschlussreich, weil auch bei einem zusammengesetzten mehrsegmentigen Lager Auswirkungen der Randbedingungen zu erwarten sind.

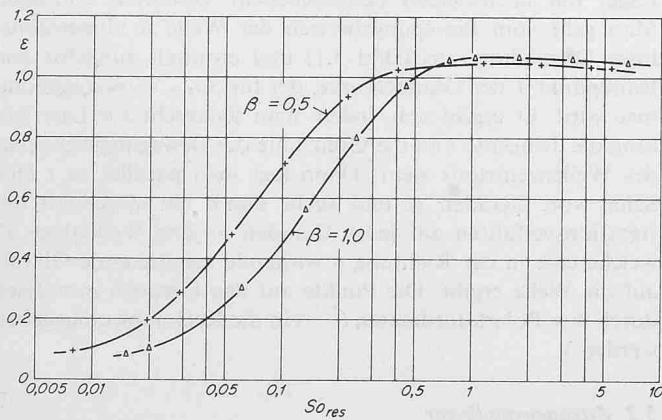


Bild 5.5. Relative Exzentrizität ε in Funktion der Belastungszahl $S_{0, \text{res}}$ für das Zitronenspiellager nach Bild 5.3 mit der relativen Breite β

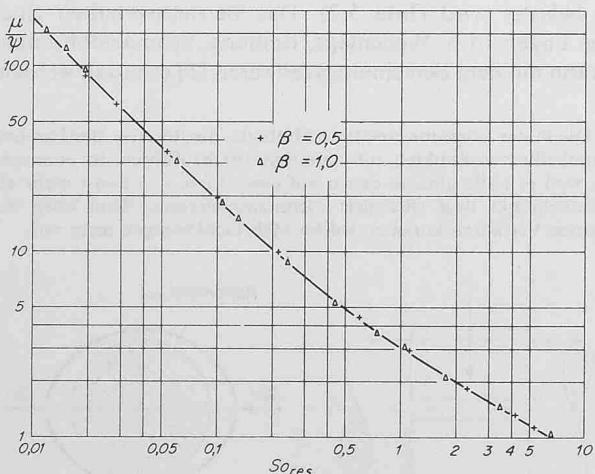


Bild 5.6. Reibungswert μ/ψ in Funktion der Belastungszahl $S_{0, \text{res}}$ für das Zitronenspiellager nach Bild 5.3 mit der relativen Breite β

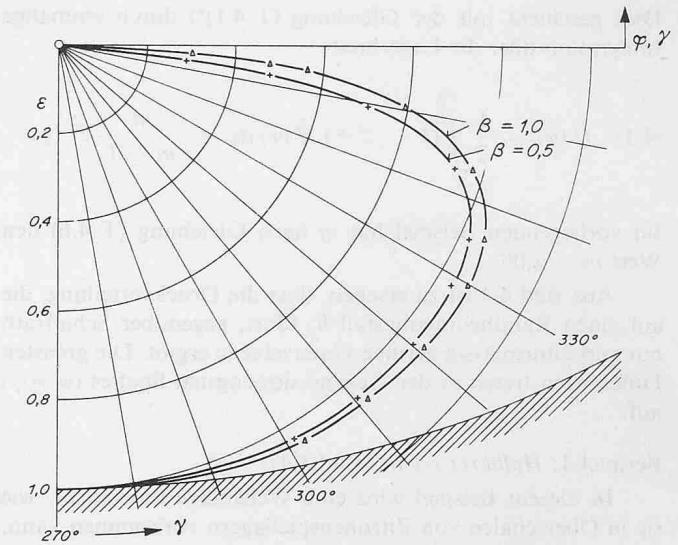


Bild 5.4. Gübelkurven des vertikal belasteten Zitronenspiellagers nach Bild 5.3

Beispiel 5: Zitronenspiellager bei vertikaler Belastung (Bild 5.3)

Die Geometrie des Lagers ist auf Bild 5.3 dargestellt. Seine beiden Schalen erstrecken sich über je 150° .

Die aus unserem Berechnungsverfahren [1] für die relativen Breiten $\beta = 0,5$ und $1,0$ resultierenden Gübelkurven sind auf Bild 5.4 wiedergegeben. Den zugehörigen Zusammenhang zwischen der dimensionslosen Belastung $S_{0, \text{res}}$ und der

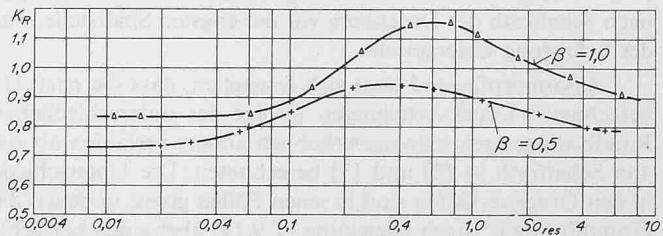


Bild 5.7. Dimensionslose Öldurchsatzzahl K_R in Funktion der Belastungszahl $S_{0, \text{res}}$ für das Zitronenspiellager nach Bild 5.3 mit der relativen Breite β

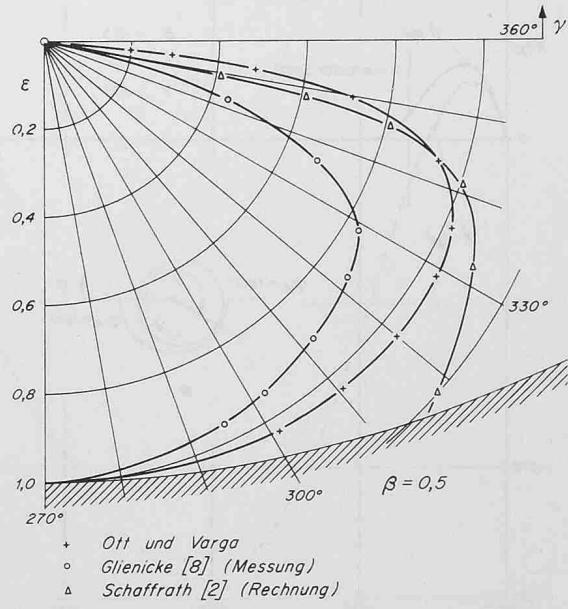


Bild 5.8. Gübelkurve für das Zitronenspiellager nach Bild 5.3 mit der relativen Breite $\beta = 0,5$. Vergleich mit Rechnungen und Messungen anderer Autoren

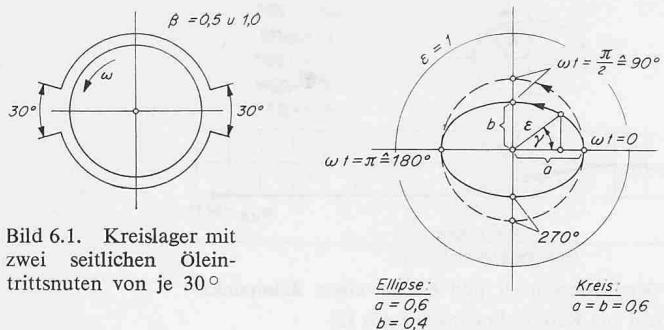


Bild 6.1. Kreislager mit zwei seitlichen Öl eintrittsnuten von je 30°

Bild 6.2. Ellipsen- und Kreisbewegung des Wellenzentrums im Kreislager nach Bild 6.1

relativen Exzentrizität zeigt Bild 5.5, während Bild 5.6 den Reibungswert μ/ψ und Bild 5.7 die dimensionslose Öldurchsatzzahl K_R für die beiden untersuchten Breiten wiedergeben.

Zum Vergleich wird für $\beta = 0,5$ auf Bild 5.8 die mit unserem Berechnungsverfahren [1] erhaltene Gümbelkurve der von Schaffrath [2] berechneten und der von Gienicke [8] gemessenen Verlagerungsbahn gegenübergestellt. Auffällig ist der letzte von Schaffrath gerechnete Punkt, dessen tiefe Lage unerklärlich erscheint.

Für dasselbe Zitronenspiellager (d.h. für $\beta = 0,5$) ist auf Bild 5.9 der dimensionslose engste Spalt in Abhängigkeit von der Belastungszahl S_{ores} aufgetragen, wobei auch hier mit den Ergebnissen der erwähnten anderen Autoren verglichen wird.

5.3 Vierflächenlager nach Frössel

Das Lager setzt sich nach Bild 5.10 aus vier gleichmäßig auf dem Lagerumfang angeordneten Viertelkreisschalen zusammen, zwischen denen je eine Axialnut für die Schmierstoffzufuhr liegt.

Die nach [1] für Lager von der relativen Breite $\beta = 0,5$ und 1,0 berechneten Gümbelkurven und die Kennlinien für Reibung und Öldurchsatz sind in [6] veröffentlicht, so dass auf deren Wiedergabe hier verzichtet wird.

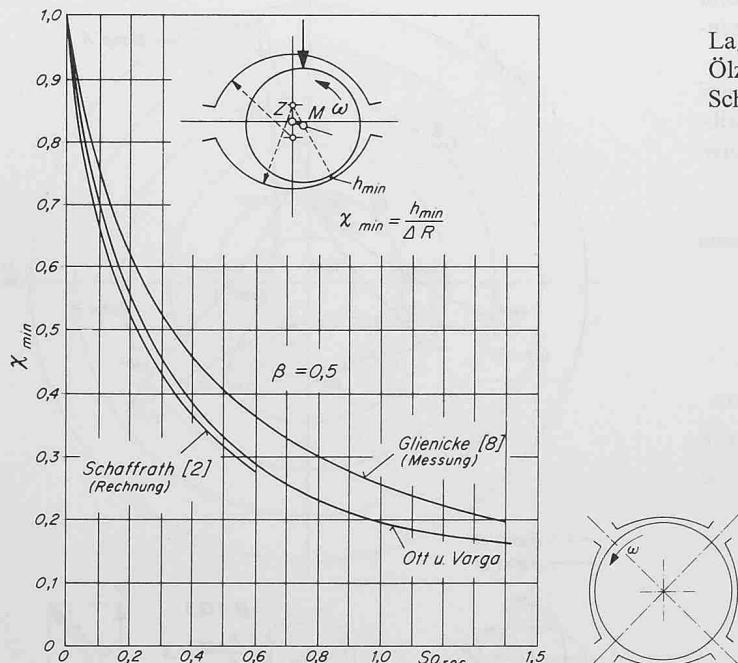


Bild 5.9 (links). Dimensionsloser Minimalspalt in Funktion der Belastungszahl S_{ores} für das Zitronenspiellager nach Bild 5.3 mit der relativen Breite $\beta = 0,5$. Vergleich mit Rechnungen und Messungen anderer Autoren

Bild 5.10 (rechts). Aufbau des Vierflächen-Lagers nach Frössel

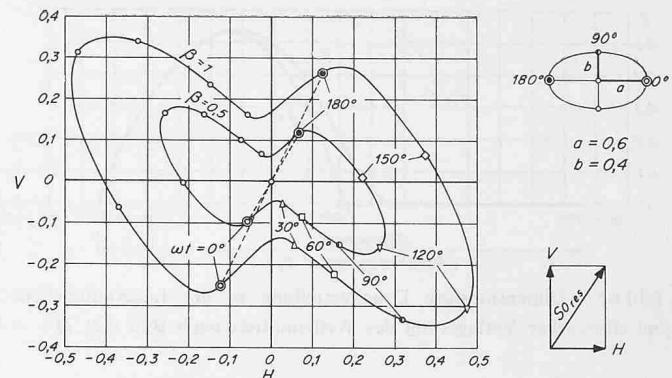


Bild 6.3. Resultierende dimensionslose Ölkräft bei elliptischer Bewegung des Wellenzentrums im zylindrischen Lager nach Bild 6.1

6. Verlauf der resultierenden Kraft bei gegebener Bewegung des Wellenzentrums (instationäre Fälle)

6.1 Kreislager mit elliptischer und kreisförmiger Wellenbewegung

In diesem Abschnitt soll der nach [1], Gleichungen (T 12.17) und (T 12.18), berechnete Verlauf der dimensionslosen resultierenden Kraft für eine kreisförmige und eine elliptische (doppelt harmonische) Bewegung des Wellenzentrums in einem kreiszylindrischen Lager wiedergegeben werden. Die Form des Lagers ist auf Bild 6.1 dargestellt.

Die periodische elliptische Verlagerung der Welle ist nach Bild 6.2 durch die Gleichungen

$$(6.1) \quad \varepsilon \sin \gamma = b \sin \omega t$$

$$(6.2) \quad \varepsilon \cos \gamma = a \cos \omega t$$

gegeben, wobei a und b die Halbachsen der Ellipse bedeuten; für $a = b$ ergibt sich eine gleichförmige Kreisbewegung ($\varepsilon = \text{konst}$; $\gamma = \omega t$).

Aus der Verlagerungsbahn lässt sich nach [1] punktweise die resultierende Ölkräft S_{ores} auf die Welle berechnen. Das Ergebnis ist in Form von Polardiagrammen auf Bild 6.3 für die elliptische ($a = 0,6$; $b = 0,4$) und auf Bild 6.4 für die kreisförmige ($a = b = 0,6$) Wellenverlagerung dargestellt.

Die beiden Bilder zeigen deutlich den Einfluss der relativen Lagerbreite β . Ferner ist in Bild 6.3 der Einfluss der seitlichen Ölzuflurnuten sehr auffällig. Trotz der rein kreisförmigen Schale und der konzentrischen gleichförmigen Kreisbewegung

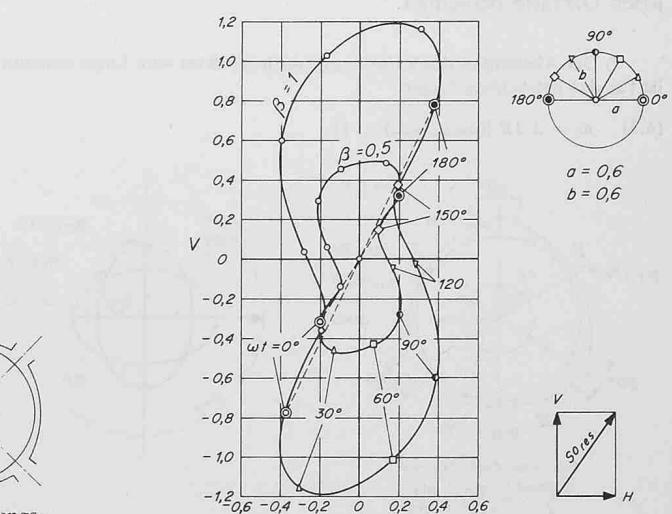


Bild 6.4. Resultierende Ölkräft bei Kreisbewegung des Wellenzentrums im zylindrischen Lager nach Bild 6.1

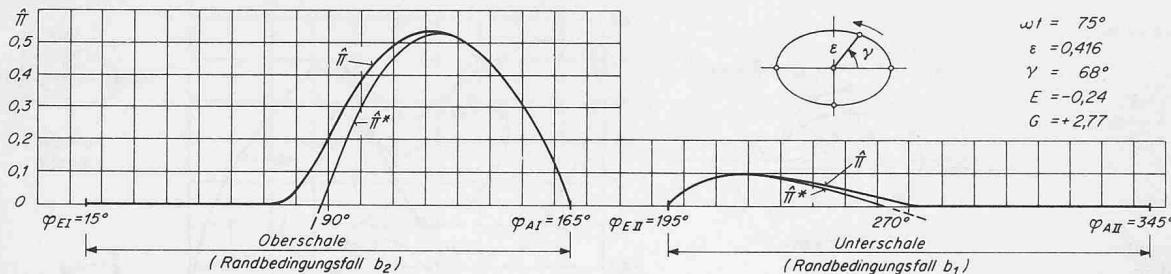


Bild 6.5. Dimensionslose Druckverteilung in der Lagermittelebene des Kreislagers nach Bild 6.1 für einen Bahnpunkt bei elliptischer Verlagerung des Wellenmittels nach Bild 6.2; \hat{H}^* = Verlauf bei Randbedingungen nach [2]

des Wellenmittelpunktes stellt man eine bemerkenswert starke Variation in der Grösse der resultierenden Ölkräft fest.

Als Beispiel für eine Druckverteilung bei instationärem Betrieb des Lagers ist in Bild 6.5 der Druckverlauf im Lager nach Bild 6.1 bei der elliptischen Wellenbewegung nach Bild 6.2 aufgetragen, wobei der Punkt $\omega t = 5/12 \cdot \pi \triangleq 75^\circ$ herausgegriffen wurde. In der Oberschale ergibt sich ein Randbedingungsfall b_2 und in der Unterschale ein Fall b_1 . Der mit \hat{H}^* bezeichnete Druckverlauf in der Mittelebene ergibt sich mit den von Schaffrath verwendeten Randbedingungen.

6.2 Dreiflächenlager

Als weiteres Beispiel wird ein Dreiflächenlager mit elliptischen Wellenbewegungen berechnet, wie sie Schaffrath für dasselbe Lager in [2] untersucht hat. Das Lager weist nach Bild 6.6 drei gleiche kreiszylindrische Schalen auf, die durch Ölzuflührnuten von 20° voneinander getrennt sind. Die relative Breite des Lagers beträgt $\beta = 0,5$.

In [2] sind die Segment-Krümmungsmittelpunkte des Lagers von Bild 6.6 so gewählt, dass $h_{max}/h_{min} = 3$ beträgt⁶⁾. Daraus resultiert als Segment-Vertiefungsfunktion (siehe [1]) für das Segment I

$$(6.1) \Delta\chi_1 = 2 \left(\frac{h_{max}}{h_{min}} - 1 \right) [1 - \cos(\varphi - \varphi_1)]$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die Segmente II und III erhält man, indem man in Gleichung (6.1) den Mittelachsen-Winkel φ_1 durch φ_{II} bzw. φ_{III} ersetzt.

Im vorstehend beschriebenen Lager werden nun für zwei elliptische Wellenbewegungen mit den dimensionslosen Halbachsen 0,4 und 0,6 (Bild 6.7) die resultierenden dimensionslosen Ölkräfte berechnet.

⁶⁾ Der Abstand e_0 des Krümmungsmittelpunktes vom Lagerzentrum ist für das betrachtete Lager

$$(6.2) e_0 = 2 \Delta R [(h_{max}/h_{min}) - 1]$$

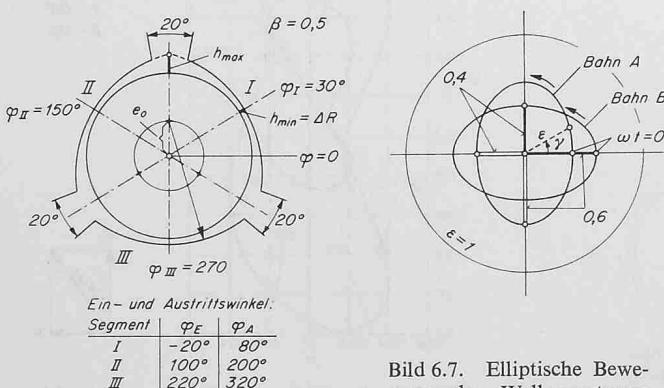


Bild 6.6. Dreiflächenlager mit drei Kreisbogen-Schalen

Die Ergebnisse sind auf Bild 6.8 wiedergegeben. Die beiden Kurven lassen sich direkt mit dem entsprechenden Diagramm von Schaffrath [2, Bild 18] vergleichen.

Da Schaffrath das Lager gegenüber unserer Stellung um 180° gedreht angenommen hat und die äussere Lagerbelastung aufträgt, entstehen gleichliegende Kraftdiagramme. Unterschiedlich ist hingegen die Winkel-Kotierung, was beim Vergleich zu beachten ist. Man stellt eine gute Übereinstimmung der beiden Ergebnisse fest. Für einzelne Kurvenpunkte betragen zwar die Unterschiede in den Sommerfeld-Zahlen bis gegen 20 %, doch sind dies Punkte mit relativ geringer Belastung. Hingegen fallen die Spitzenwerte bis auf ganz geringe Abweichungen zusammen, was für praktische Anwendungen der verglichenen Rechenmethoden wichtig ist. Dieses Ergebnis ist nicht selbstverständlich, weil in den einzelnen Segmenten zufolge der unterschiedlichen Randbedingungen die Druckverläufe nach den beiden verglichenen Rechenverfahren voneinander abweichen. Bild 6.9 zeigt dies an einem Beispiel.

7. Feder- und Dämpfungskonstanten

Für das dynamische Verhalten von Rotoren, die in Gleitlagern laufen, sind beim Auftreten von Störkräften an der Wellenachse die Feder- und Dämpfungskonstanten der Lager wichtig. Solange die Störungen klein sind, spielen sich die

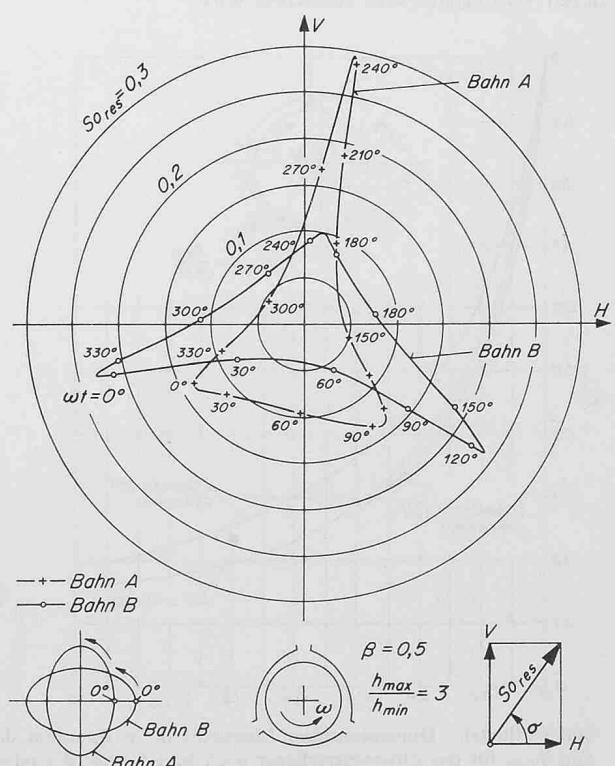


Bild 6.8. Polardiagramm der resultierenden dimensionslosen Ölkräft für die Wellenbewegungen nach Bild 6.7

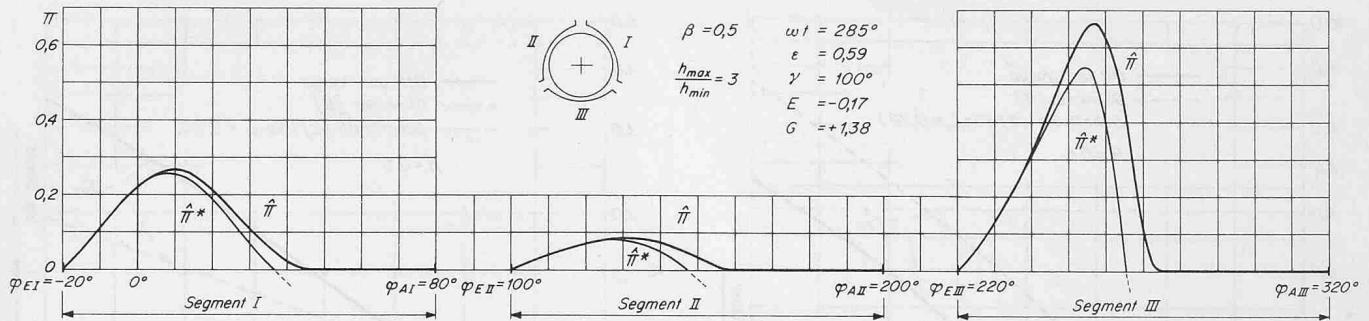


Bild 6.9. Dimensionslose Druckverteilung in der Lagermittelebene des Lagers nach Bild 6.6 für einen Bahnpunkt $\omega t = 285^\circ$ bei elliptischer Bewegung des Wellenmittels nach Bahn A aus Bild 6.7. $\hat{\pi}^*$ = Druckverlauf bei Randbedingungen nach [2] (in allen Segmenten Randbedingungsfälle b_1)

Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslagen der Welle ab, das heisst in der Nähe von Gümbelkurven-Punkten. Bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage lässt sich die resultierende Kraft durch eine lineare Funktion der Auslenkung und der momentanen Geschwindigkeit ausdrücken [8] [10]; diese Darstellung kann als abgebrochene Taylor-Entwicklung aufgefasst werden. Die Koeffizienten in dieser linearen Beziehung sind die vorerwähnten Feder- und Dämpfungskonstanten.

Um die Federungs- und Dämpfungskonstanten zu definieren, führen wir für die Darstellung der Wellenlage nach Bild 7.1 kartesische Koordinaten ein. Es gilt:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \varepsilon \cos \gamma \\ \xi_2 &= \varepsilon \sin \gamma \end{aligned}$$

Die Federkonstanten γ^{+ik} werden durch die Gleichung

$$(7.2) \quad \gamma^{+ik} \equiv \frac{\partial S_i}{\partial \dot{\xi}_k} \quad \left. \begin{aligned} i \\ k \end{aligned} \right\} = 1,2$$

und die Dämpfungskonstanten β^{+ik} durch

$$(7.3) \quad \beta^{+ik} \equiv \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial \dot{\xi}_k} \quad \left. \begin{aligned} i \\ k \end{aligned} \right\} = 1,2$$

definiert, wobei $\dot{\xi}$ die Ableitung von ξ nach der dimensionslosen Zeit ωt bedeutet:

$$(7.4) \quad \dot{\xi} \equiv \frac{1}{\omega} \frac{\partial \xi}{\partial \omega t} = \frac{\partial \xi}{\partial (\omega t)}$$

$\dot{\xi}$ hat somit die Bedeutung der dimensionslosen Geschwindigkeit in Richtung ξ .

Die durch die Gleichungen (7.2) und (7.3) definierten Feder- und Dämpfungskonstanten werden in der Regel für Gleichgewichtslagen mit vertikaler resultierender Ölkrat an der Welle angegeben. Bezeichnet man die auf den Gleichgewichtszustand bezogenen Größen mit dem Index s , so ist die Wellenlage für einen derartigen (auf der Gümbelkurve liegenden) Punkt durch die Polarkoordinaten ε_s und γ_s mit der vertikal nach oben gerichteten Resultierenden

$$(7.5) \quad S_2 \equiv V = S_{ores} \equiv S_{os}$$

charakterisiert. Für eine solche Gleichgewichtslage können die durch die Gleichungen (7.2) und (7.3) definierten Feder- und Dämpfungskonstanten auf S_{os} bezogen werden; diese bezogenen Größen eignen sich für manche Anwendungen besser als die nicht bezogenen, weil sie im allgemeinen im Bereich der praktisch vorkommenden Belastungen mit S_{os} weniger stark variieren. Man definiert so in Anlehnung an (7.2) und (7.3) die relativen Federkonstanten

$$(7.6) \quad \gamma_{ik} = \frac{1}{S_{os}} \frac{\partial S_i}{\partial \dot{\xi}_k} \quad \left. \begin{aligned} i \\ k \end{aligned} \right\} = 1,2$$

und die relativen Dämpfungskonstanten

$$(7.7) \quad \beta_{ik} = \frac{1}{S_{os}} \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial \dot{\xi}_k} \quad \left. \begin{aligned} i \\ k \end{aligned} \right\} = 1,2$$

Die beiden Zeiger i und k können die Werte 1 und 2 annehmen, so dass insgesamt vier Feder- und vier Dämpfungskonstanten bestehen. Da in [1] die ganze Berechnung der resultierenden Ölkrat auf der Polarkoordinaten-Darstellung (ε, γ) beruht, drückt man die für die Feder- und Dämpfungskonstanten notwendigen partiellen Ableitungen durch folgende Transformationen durch die Größen des Polarkoordinaten-systems aus:

$$(7.8) \quad \frac{\partial S_i}{\partial \dot{\xi}_1} = \frac{\partial S_i}{\partial \varepsilon} \cos \gamma_s - \frac{\partial S_i}{\partial \gamma} \frac{\sin \gamma_s}{\varepsilon_s}$$

$$(7.9) \quad \frac{\partial S_i}{\partial \dot{\xi}_2} = \frac{\partial S_i}{\partial \varepsilon} \sin \gamma_s + \frac{\partial S_i}{\partial \gamma} \frac{\cos \gamma_s}{\varepsilon_s}$$

$$(7.10) \quad \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial \dot{\xi}_1} = \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial \dot{\varepsilon}} \cos \gamma_s - \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\sin \gamma_s}{\varepsilon_s}$$

$$(7.11) \quad \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial \dot{\xi}_2} = \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial \dot{\varepsilon}} \sin \gamma_s + \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\cos \gamma_s}{\varepsilon_s}$$

wobei in Anlehnung an die Gleichung (7.4) wegen der Beziehungen (T 6.4) und (T 6.5) aus [1]

$$(7.12) \quad \frac{\partial S_i}{\partial \dot{\varepsilon}} = 2 \frac{\partial S_i}{\partial E} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial \dot{\varepsilon}} = 2 \frac{\partial \dot{S}_i}{\partial G}$$

gilt.

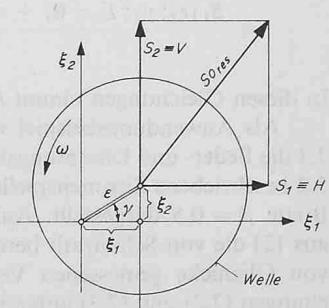


Bild 7.1. Koordinaten-System zur Definition der Feder- und Dämpfungskonstanten

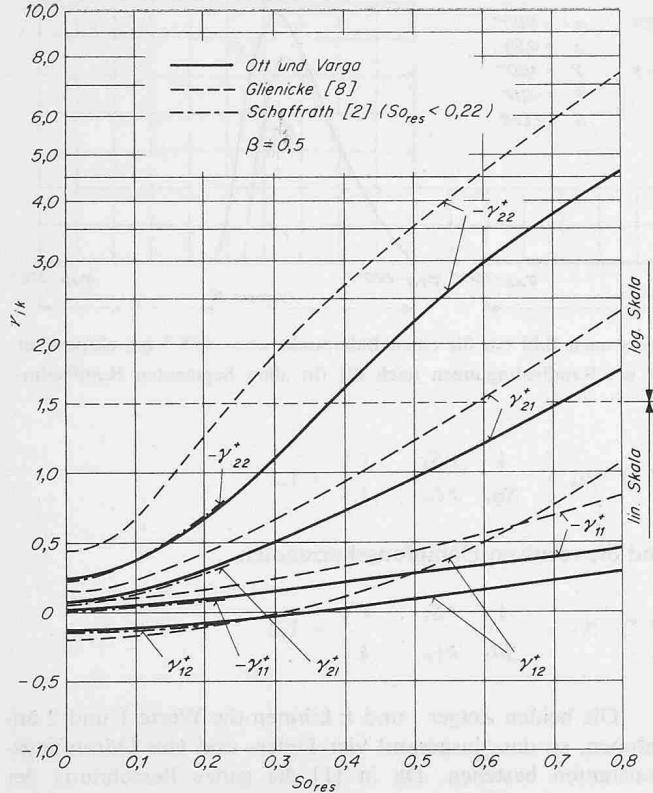


Bild 7.2. Federkonstante γ^* für das Zitronenspiel-Lager nach Bild 5.3; Vergleich mit Berechnungen von Schaffrath [2] und Messungen von Glienicke [8]

Die in den Gleichungen (7.8) bis (7.12) vorkommenden partiellen Ableitungen werden numerisch als Differenzenquotienten ermittelt, die wie folgt zu berechnen sind:

$$(7.13) \frac{\partial S_i}{\partial \varepsilon} \approx \frac{S_i(\varepsilon_s + \Delta \varepsilon; \gamma_s; E=0; G=0) - S_i(\varepsilon_s - \Delta \varepsilon; \gamma_s; E=0; G=0)}{2 \Delta \varepsilon}$$

$$(7.14) \frac{\partial S_i}{\partial \gamma} \approx \frac{S_i(\varepsilon_s; \gamma_s + \Delta \gamma; E=0; G=0) - S_i(\varepsilon_s; \gamma_s - \Delta \gamma; E=0; G=0)}{2 \Delta \gamma}$$

$$(7.15) \frac{\partial S_i}{\partial E} \approx \frac{S_i(\varepsilon_s; \gamma_s; + \Delta E; G=0) - S_i(\varepsilon_s; \gamma_s; - \Delta E; G=0)}{2 \Delta E}$$

$$(7.16) \frac{\partial S_i}{\partial G} \approx \frac{S_i(\varepsilon_s; \gamma_s; E=0; + \Delta G) - S_i(\varepsilon_s; \gamma_s; E=0; - \Delta G)}{2 \Delta G}$$

In diesen Gleichungen nimmt i die Werte 1 und 2 an.

Als Anwendungsbeispiel wurden in den Bildern 7.2 und 7.3 die Feder- und Dämpfungskonstanten für das im Abschnitt 5.2 beschriebene Zitronenspiellager (Bild 5.3) mit der relativen Breite $\beta = 0,5$ dargestellt. Auf den Diagrammen sind auch aus [2] die von Schaffrath berechneten Werte und aus [8] die von Glienicke gemessenen Verläufe in der Form der Gleichungen (7.2) und (7.3) aufgetragen.

Die teilweise beträchtlichen Abweichungen zwischen Messung und Berechnung sind verständlich, wenn in Betracht gezogen wird, dass im Versuch einige wichtige Vorausset-

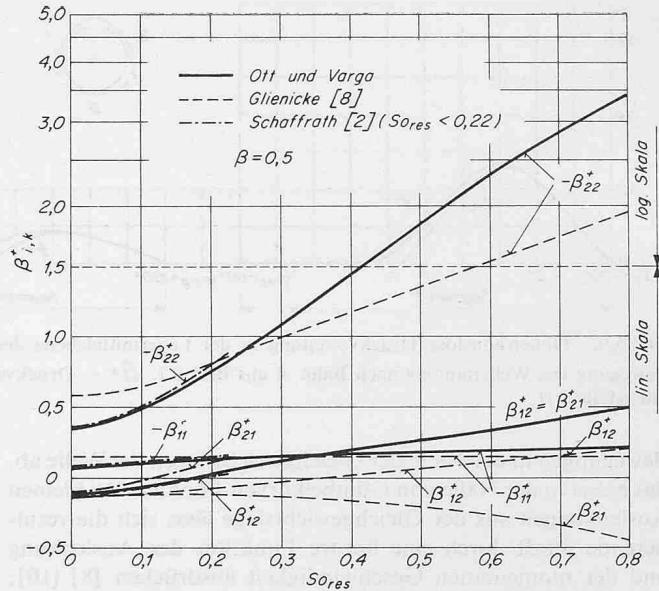


Bild 7.3. Dämpfungskonstante β^+ für das Zitronenspiel-Lager nach Bild 7.2; Vergleich mit Berechnungen von Schaffrath [2] und Messungen von Glienicke [8]

zungen der Rechnung (konstante Schmiermittelzähigkeit, überdruckfreie Zufuhr des Schmiermittels) nicht erfüllt sind.

Die Unterschiede zwischen den hier berechneten Kurven und den Rechnungswerten von Schaffrath, die dieser allerdings nur in einem sehr schmalen So -Bereich angibt, sind relativ gering. Die Ursachen für die Differenzen können entweder bei der Verschiedenheit der Rechnungsverfahren oder bei den Unterschieden in den Randbedingungen liegen.

8. Berechnung der Wellenbewegung bei einer gegebenen instationären Belastung

Die Lösung dieser Aufgabe auf der Grundlage des Berechnungsverfahrens [1] wurde von Z.E. Varga durchgeführt und soll demnächst veröffentlicht werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Ott H.H.: Berechnung segmentierter Radialgleitlager endlicher Breite bei instationärem Betrieb. «Schweiz. Bauzeitung» 88 (1970), H. 21, S. 457–470.
- [2] Schaffrath G.: Das Gleitlager mit beliebiger Schmierspaltform – Verlagerung des Wellenzapfens bei zeitlich veränderlicher Belastung. Diss. TH Karlsruhe 1967.
- [3] Schaffrath G.: Die Bahn des Wellenmittelpunktes im dynamisch belasteten Radial-Gleitlager beliebigen Querschnittes. «Konstruktion» 21 (1969), Heft 3.
- [4] Schaffrath G.: Ein Verfahren zum Berechnen der vier Feder- und der vier Dämpfungskoeffizienten von Radialgleitlagern. «Forsch. Ing.-Wes.» 35 (1969), Nr. 6.
- [5] Ott H.H., Buchter J.E. und Frey U.: Wellenlage, Reibung und Öldurchsatz von Radial-Gleitlagern mit zwei zusammengeschobenen Kreisschalen (Zitronenspiellager). «Schweiz. Bauzeitung» 87 (1969), H. 12, S. 207–212.
- [6] Ott H.H.: Radiale Mehrflächen-Gleitlager bei stationärem Betrieb. Düsseldorf 1970, VDI-Berichte Nr. 141.
- [7] Carl Th.E.: Das zylindrische Gleitlager unter konstanter und sinusförmiger Belastung (eine experimentelle Untersuchung). Diss. TH Karlsruhe 1962.
- [8] Glienicke J.: Feder- und Dämpfungskonstanten von Gleitlagern für Turbomaschinen und deren Einfluss auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Rotors. Diss. TH Karlsruhe 1966.
- [9] Sassenfeld H. und A. Walther: Gleitlagerberechnungen. Düsseldorf 1954, VDI-Forschungsheft 441.
- [10] Someya T.: Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden unwuchtfreien Welle. Diss. TH Karlsruhe 1962.

Adresse der Verfasser: Prof. Dr. H.H. Ott und Z.E. Varga, dipl. Ing., Institut für Grundlagen der Maschinenkonstruktion der ETH Zürich, Leonhardstrasse 33, 8006 Zürich.