

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 89 (1971)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Theorie des Reibungseinflusses beim Druckstoss  
**Autor:** Raabe, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84801>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Prof. Dr. Charles Jaeger zum 70. Geburtstag

Zahlreich sind die Freunde, welche mit Charles Jaeger persönlich verbunden sind und ihm hiermit ihre besten Wünsche zum 70. Geburtstag übermitteln! Aber noch viel zahlreicher sind die Ingenieure, die dem Jubilar nie begegnet sind und denen er dennoch ein guter Bekannter ist; auch sie ergreifen mit Freunden die Gelegenheit, ihn zu grüssen und zu ehren!

Charles Louis M. Jaeger wurde am 26. März 1901 als Bürger von Auboranges FR geboren. Von 1919 bis 1923 studierte er an der Abteilung für Bauingenieurwesen an der ETH Zürich und arbeitete anschliessend drei Jahre in einem Ingenieurbüro in Genf, bevor ihn eine schwere Krankheit zu einem ebenso langen Kuraufenthalt zwang. Vielleicht war es aber gerade diese Zeit, die ihn seiner Bestimmung entgegenreisen liess. Denn er trat nachher als Privatassistent in die Dienste von Prof. Dr. Eugen Meyer-Peter, schloss bei diesem 1933 mit einer Dissertation über die «Théorie générale du coup de bâlier» (Druckstoss) ab und wurde damit zu einem wegweisenden Forscher und Fachmann auf dem Gebiet der Hydraulik. Von 1934 bis 1937 wirkte er zunächst als beratender Ingenieur, um dann von 1938 bis 1946 als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Versuchsanstalt für Wasserbau an der ETH-Zürich wiederum an die Seite von Prof. Meyer-Peter zu treten. Von 1943 an lehrte er als Privatdozent an der ETH Hydraulik und begann mit der Abfassung seines bekannten Buches über «Technische Hydraulik».

«Von der Theorie zur Praxis» könnte man seinen 1946 erfolgten Sprung über den Aermelkanal nach England betrachten. Denn von diesem Zeitpunkt an wirkte Charles Jaeger bis 1965 als «Consulting Engineer to the English Electric Co. Ltd» in Rugby und bearbeitete dabei eine grosse Anzahl von Projekten im In- und Ausland. Viele Reisen brachten ihn schon kurz nach dem Krieg in mehrere überseeische Länder, wo ihm insbesondere die Beurteilung von Wasserkraftanlagen übertragen wurde. Daneben

fand er aber noch Zeit, sein ständig aufgefrischtes Wissen als Lektor am Imperial College in London sowie in Vorträgen weiterzugeben. 1966 war er Gastprofessor an der Colorado State University in den Vereinigten Staaten und 1967 Experte der UNESCO in Indien.

Wenn Charles Jaeger für viele Schweizer Ingenieure der unbekannte Bekannte ist, so röhrt das daher, dass er zwar 1946 für mehr als 20 Jahre ins Ausland zog, aber in seiner Heimat dennoch durch seine zahlreichen Veröffentlichungen gegenwärtig blieb. Am meisten trug hierzu das bereits erwähnte Buch über «Technische Hydraulik» bei, das 1949 in deutscher, 1953 in französischer und 1955 in englischer Sprache erschien und weite Verbreitung fand; es gehört heute noch zu den klassischen Werken der Hydraulik. Darauf hinaus zeugen aber noch viele Zeitschriftenaufsätze für Charles Jaegers vielfältige Interessen. Mit meisterhafter Klarheit behandelte er die Theorie des Abflusses im Grundwasser und in offenen Gerinnen, der Wasserschlossschwingungen und des Druckstosses in Drucksystemen, der Ähnlichkeitsgesetze bei Modellversuchen usw. Und mit seinem ausgeprägten Sinn für das Grundsätzliche vermittelte er treffende Einblicke in den Bau von Wasserkraftanlagen, insbesondere von Druckleitungen, Druckschächten, Kavernen, Talsperren usw. Letzteres führte ihn dann schliesslich auch zu seinen beachteten Aufsätzen über die Grundzüge der Felsmechanik.

Charles Jaeger hat also für seine Heimat und seine Hochschule viel Ehre eingelegt! Es ist ihm deshalb zu gönnen, dass er sich, seit 1968 im Ruhestand, nun in Pully der lieblichen Genferseegegend erfreuen darf. Möge ihm und seiner Gemahlin sowie seinen beiden Kindern — der Sohn ist Physiker und die Tochter Mathematikerin (jetzt verheiratet) — noch eine glückliche Zeit beschieden sein! Prof. Dr. D. Vischer, ETH Zürich

## Theorie des Reibungseinflusses beim Druckstoss

DK 532.595

Von Prof. Dr. J. Raabe, München, Inhaber des Lehrstuhls und Direktor des Instituts für hydraulische Maschinen und Anlagen der Technischen Universität München (TH)

Inhaltsangabe: Aufgrund von Bewegungsgleichung und Kontinuität wird zunächst die analytische Behandlung des beliebig instationär strömenden, idealen elastischen Fluids im geraden Kreisrohr in Erinnerung gebracht. In Anlehnung hieran werden die Grundlagen für die radiale Verteilung der Geschwindigkeit bei instationärer Strömung eines realen elastischen Fluids abgeleitet.

### 1. Einleitung

Die Staudruckverteilung über den Radius des harmonisch schwingenden unelastischen, jedoch viskosen Fluids im geraden Kreisrohr im laminaren Bereich wurde zuerst von E. G. Richardson und E. Tyler [1] beobachtet. Eine theoretische Erklärung für das hierbei beobachtete Geschwindigkeitsmaximum nahe der Rohrwand gab als erster Th. Sexl im Jahre 1930 [2]. Die radiale Geschwindigkeitsverteilung und deren zeitliche Phasenlage beim viskosen unelastischen Fluid wurden 1952 erstmals von Lambossy berechnet [3]. Die trägeheitsfreie Messung der mittleren Geschwindigkeit einer solchen Strömung durch elektrische Impulse mit einem Gerät, das nach dem Prinzip des «Strompendels» arbeitet, wurde erstmals 1952 von H. Pieper und E. Wetterer angegeben [4]. Ein verfeinertes,

elektrisch registrierendes Strompendel verwendete W. Vogel 1958 [5] zur Messung des zeitlichen Verlaufs der radialen Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Strömung in verschiedenen Querschnitten einer einseitig offenen Rohrleitung, deren Fluid durch einen Kolben in harmonische Schwingungen versetzt wurde. Hierbei hat man die in den einzelnen Querschnitten unterschiedliche Phasenlage von Rand- und Kernströmung in Abhängigkeit von der Kolbenstellung beobachtet.

Der vorliegende Aufsatz setzt sich zum Ziel, unter Vernachlässigung der Rohranlaufstrecke eine strenge Theorie der radialen Geschwindigkeitsverteilung im waagrechten geraden Kreisrohr bei beliebiger instationärer Strömung zu geben für den Fall, dass die Leitung einem Behälter konstanten Druckes entspringt und einen veränderlichen Ausflussquerschnitt besitzt. Dabei werden innere Reibung und Kompressibilität des Fluids berücksichtigt und die Fälle der laminaren und turbulenten Strömung gesondert betrachtet. Zunächst werden die Vorgänge nach erfolgtem Abschluss des einen Rohrendes und sodann die bei noch vorhandenem Durchfluss untersucht. In den Endergebnissen wird durchwegs eine im Verhältnis zur Druckwellengeschwindigkeit vernachlässigbare Strömungsgeschwindigkeit angenommen.

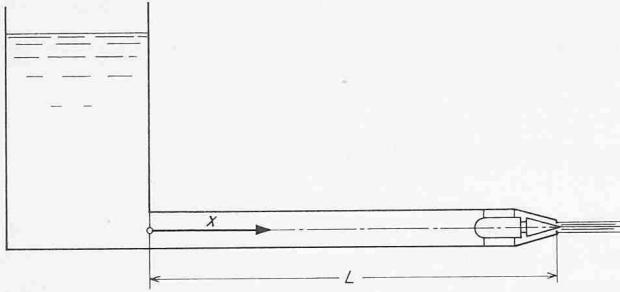


Bild 1. Ausfluss aus einem unendlich gross angenommenen Freispiegelbehälter über waagrechte Rohrleitung mit Kreisquerschnitt durch ein regelbares, axialsymmetrisches Verschlussorgan (Nadeldüse)

## 2. Aufstellung der Grundgleichung beim idealen elastischen Fluid, Einschränkungen, allgemeine Lösung

Im folgenden werden die für die Bewegung eines kompressiblen idealen Fluids in einer geraden, waagrechten Rohrleitung konstanten Querschnittes massgebenden Grundgleichungen, nämlich Bewegungsgleichung und Kontinuität, sowie deren allgemeine Lösung in Erinnerung gebracht. Dabei wird auf einzelne Annahmen eingegangen.

Die betrachtete instationäre Bewegung soll sich dadurch einstellen, dass Fluid aus einer von einem Behälter konstanten Druckes  $p_\infty$  gespeisten Rohrleitung gemäß Bild 1 zeitlich gedrosselt ausfließt oder der Durchfluss abgesperrt worden ist. Der zeitlich konstante statische Druck  $p_\infty$  überlagert sich dem im folgenden für sich betrachteten zeitlich veränderlichen Druck  $p$  in der Rohrleitung. Der resultierende statische Druck ist also

$$(1) \quad p_{\text{res}} = p_\infty + p$$

Unter der Annahme, dass der Druck  $p$  und die Geschwindigkeit  $c$  über den Rohrquerschnitt konstant seien, lautet die Bewegungsgleichung am idealen Fluidelement in Rohrachsenrichtung ( $x$ -Richtung)

$$(2) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + c \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0$$

Die örtliche Änderung der Geschwindigkeit ist bei dem angenommenen konstanten Rohrquerschnitt nur infolge Druckwellen und damit verbundenen Geschwindigkeitswellen möglich. Wandert die Stufe einer Geschwindigkeitswelle mit dem Anstieg  $\partial c / \partial x \cdot dx$  längs der Strecke  $dx$  mit der Wellengeschwindigkeit  $a$  in  $x$ -Richtung, dann gilt für die Strecke  $dx$ , die der Wellenausschlag in der Zeit  $dt$  zurücklegt, gemäß Bild 2

$$(3) \quad dx = a dt$$

Damit wird die partielle örtliche Geschwindigkeitsänderung

$$(4) \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial c}{\partial t}$$

und das zweite Glied in der Bewegungsgleichung (2)

$$(5) \quad c \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c}{a} \frac{\partial c}{\partial t}$$

Hiermit lautet die Bewegungsgleichung bei idealem, elastischem Fluid

$$(6) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(1 + \frac{c}{a}\right) \frac{\partial c}{\partial t} = 0$$

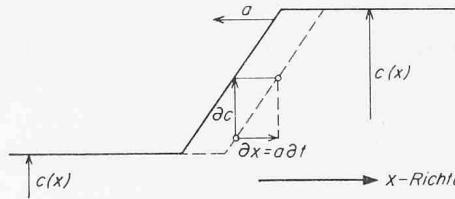


Bild 2. Zur Fortpflanzung einer zur Druckwelle gehörigen schrägen Geschwindigkeitsstufe in  $x$ -Richtung  
— Geschwindigkeitsverlauf über  $x$  zur Zeit  $t$   
— dasselbe zur Zeit  $t + \delta t$

Bei konstanter Dichte über den Querschnitt ergibt die Kontinuitätsbedingung

$$(7) \quad \varrho \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial x} c + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

Da bei dem angenommenen konstanten Rohrquerschnitt eine örtliche Dichteänderung  $\partial \varrho / \partial x$  nur von den mit Druckwellen einherlaufenden Dichtewellen stammt, gilt analog Gl. 5

$$(8) \quad c \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{c}{a} \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

Damit lautet die Kontinuität

$$(9) \quad \varrho \frac{\partial c}{\partial x} + \left(1 + \frac{c}{a}\right) \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

Die Gleichungen (6) und (9) trügen für den Fall, dass  $\partial c / \partial x$  und  $\partial \varrho / \partial x$  von Wellen in positiver  $x$ -Richtung stammen, vor  $c/a$  ein negatives Vorzeichen. Im Folgenden wollen wir annehmen, dass der Wirklichkeit entsprechend

$$(10) \quad |c/a| \ll 1$$

sei. Damit lauten Bewegungsgleichung und Kontinuität

$$(11) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0$$

$$(12) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

Die im allgemeinen mit der absoluten Kleinheit von  $c$  begründete Fortlassung der konvektiven Beschleunigung in der Bewegungsgleichung und die zumeist vergessene Erwähnung von  $\partial \varrho / \partial x$  ist also nur bei gegenüber der Einheit kleinem Wert von  $|c/a|$  zulässig.

Um diese Gleichungen mit ihren drei Unbekannten lösen zu können, ist noch eine «Zustandsgleichung» des Fluids notwendig, die  $p$  und  $\varrho$  miteinander verbindet. Sie ist durch das «Hooke'sche Gesetz» gegeben

$$(13) \quad \Delta V/V_0 = -p/E_l$$

mit  $V_0$  als einem Bezugsvolumen,  $\Delta V$  als dessen Änderung unter  $p$  und  $E_l$  dem Volumenelastizitätsmodul des Fluids. In  $E_l$  sei zur Vereinfachung genähert auch eine etwaige Elastizität der Rohrwandung mitenthalten. Bei konstantem  $E_l$  gilt

$$(14) \quad \partial \Delta V/V_0 = -\partial p/E_l$$

Wegen

$$(15) \quad \partial \Delta V/V_0 = \partial V/V_0$$

und

$$(16) \quad \partial V/V_0 \approx \partial v/v$$

kann Gl. 14 durch

$$(17) \quad \partial v/v = - \partial p/E_l$$

angenähert werden mit  $v$  als spezifischem Volumen. Wegen

$$(18) \quad \partial v/v = - \partial \varrho/\varrho$$

wird Gl. (17)

$$(19) \quad \partial \varrho/\varrho = \partial p/E_l$$

Hiermit lautet die Kontinuitätsgleichung (12)

$$(20) \quad \frac{1}{E_l} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

Bedenken wir, dass annahmegemäß  $E_l$  die wirkliche (gemessene) Druckwellengeschwindigkeit  $a$  beinhaltet, dann gilt

$$(21) \quad E_l = a^2 \varrho$$

Damit lauten Bewegungsgleichung und Kontinuität

$$(22) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0$$

$$(23) \quad \frac{1}{a^2 \varrho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

$\partial (22)/\partial x - \partial (23)/\partial t$  ergibt in bekannter Weise die Wellengleichung

$$(24) \quad a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

Bekanntlich befriedigt jede beliebige stetige und differenzierbare Funktion  $f$  der Argumente  $x + at$  und  $x - at$  diese Gleichung, gemäß

$$(25) \quad p = f(x \pm at)$$

Die Lösung entspricht einer beliebigen Druckverteilung längs der Rohrachse zu einem bestimmten Zeitpunkt, die sich ohne Verformung mit Wellengeschwindigkeit  $a$  in Rohrachsrichtung fortbewegt. Dabei gehört das positive Vorzeichen vor  $at$  zu einer Bewegung in  $+x$ -Richtung und das negative Vorzeichen vor  $at$  zu einer solchen in  $-x$ -Richtung. Setzen wir die Druckverteilung aus Gl. (25) in die Bewegungsgleichung (22) ein, dann ergibt sich als zugehörige Geschwindigkeitsverteilung

$$(26) \quad c = - \frac{1}{\varrho} \int \frac{\partial p}{\partial x} \partial t = - \frac{1}{\varrho} \int f'(x \pm at) \partial t$$

$$(27) \quad c = \mp \frac{1}{\varrho a} f'(x \pm at)$$

Hierin gilt das negative Vorzeichen für die sich in  $+x$ -Richtung mit  $a$  bewegende Verteilung  $f(x + at)$  und das positive Vorzeichen für die sich in  $-x$ -Richtung bewegende Verteilung  $f(x - at)$ .

### 3. Anwendung der Lösung auf harmonische Wellen

Der instationäre Druckanteil  $p$  kann beispielsweise aus zwei gegenläufigen harmonischen Wellenzügen zusammengesetzt werden gemäß

$$(28) \quad p = p_0 [\sin k(x + at) + \sin k(x - at)]$$

Hierin sind  $p_0$  und  $k$  zunächst Freiwerte. Mit dem Additionstheorem wird

$$(29) \quad p = 2 p_0 \sin k x \cos k a t$$

Die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung wird nach Gl. (27)

$$(30) \quad c = \frac{p_0}{\varrho a} [-\sin k(x + at) + \sin k(x - at)]$$

was mittels Additionstheorem auf

$$(31) \quad c = - \frac{2 p_0}{\varrho a} \cos k x \sin k a t$$

führt.

### 4. Bestimmung der Freiwerte $p_0$ und $k$ aus Anfangs- und Randbedingungen

Nach dem in Bild 1 dargestellten, hier betrachteten Problem muss für  $x = 0$ , wo die Rohrleitung in den unendlich gross angenommenen Behälter mit konstantem Freispiegel mündet, für alle Zeiten  $p = 0$  sein. Das ist durch den Ansatz von Gl. (29) erfüllt. Zur Bestimmung des Eigenwertes  $k$  wird zunächst angenommen, dass am rechten Ende der Rohrleitung  $x = L$  der Durchfluss abgesperrt worden sei. Es muss also bei axial starr gedachter Leitung zu jeder Zeit

$$(32) \quad \cos k L \sin k a t = 0$$

sein. Das ist nur möglich für folgende Eigenwerte

$$(33) \quad k = m \pi/(2 L),$$

worin  $m$  gemäß

$$(34) \quad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

die Reihe der ungeraden Zahlen durchläuft. Zur Bestimmung des Anfangswertes  $p_0$  setzen wir

$$(35) \quad 2 p_0 = p_m$$

Wegen der Linearität der Wellengleichung (24) kann der allgemeine Druckverlauf  $p(x, t)$  im Hinblick auf die Gl. (29) und (35) angesetzt werden als

$$(36) \quad p = \sum_m p_m \sin \left( \frac{m \pi}{2 L} x \right) \cos \left( \frac{m \pi}{2 L} a t \right)$$

Für einen bestimmten Zeitpunkt  $t = t_0$  sei der Verlauf von  $p = p_{\text{res}} - p_{\infty}$  über der Rohrachse gemäß Bild 3 gegeben. Dies führt auf

$$(37) \quad p(x, t_0) = \sum_m p_m \sin \left( \frac{m \pi}{2 L} x \right) \cos \left( \frac{m \pi}{2 L} a t_0 \right)$$

Hier empfiehlt sich die Substitution

$$(38) \quad p_m \cos \left( \frac{m \pi}{2 L} a t_0 \right) = a_m$$

womit  $p$  als harmonische Reihe vorliegt

$$(39) \quad p(x, t_0) = \sum_m a_m \sin \left( \frac{m \pi}{2 L} x \right)$$

Die Werte  $a_m$  folgen hierin aus einer Fourieranalyse zu

$$(40) \quad a_m = \frac{1}{2 L} \int_0^L p(x, t_0) \sin \left( \frac{m \pi}{2 L} x \right) dx$$

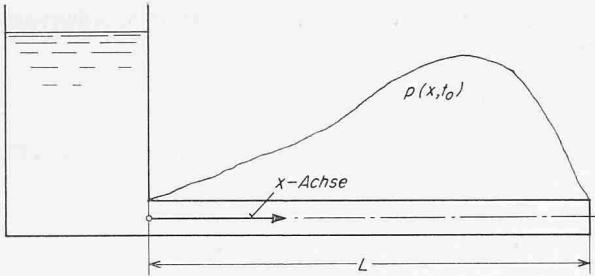


Bild 3. Augenblicklicher, zur Zeit  $t = t_0$  gemessener instationärer Druckverlauf  $p(x, t_0)$  nach Abschluss des rechten Endes einer aus unendlich gross angenommenem Freispiegelbehälter gespeisten, waagerechten Leitung

wobei die  $m$  durch Gl. (34) festgelegt sind. Für einen gemessenen momentanen Verlauf von  $p(x, t_0)$  ist das Integral nur grafisch oder numerisch auswertbar. Mit den  $a_m$  sind die Druckamplituden  $p_m$  in Gl. (36) über Gl. (38) festgelegt.

## 5. Die Strömung ohne Durchfluss beim wirklichen Fluid

### 5.1 Allgemeines

Den durch Gl. (36) für das ideale Fluid gegebenen Druckverlauf wollen wir auch genähert für die beliebig schwingende Strömung eines idealen Fluids zu Grunde legen. Innerhalb des betrachteten Zeitraums werden die Druckamplituden genähert als konstant vorausgesetzt. Sieht man davon ab, dass beim wirklichen Fluid der das Element elastisch zusammendrückende Druckgradient vom resultierenden Druckgradienten um einen Druckgradient infolge innerer Reibung abweicht, dann bleibt die Kontinuitätsgleichung (20) hierbei erhalten. Der statische Druck werde über den Querschnitt als konstant angenommen. Infolge fehlender Querbewegung gilt dies allerdings nur exakt für laminare Strömung. Mit dem Druck ist auch die Dichte  $\varrho$  über den Querschnitt konstant. Konstanter Druck über den Querschnitt ergibt für jedes Fluidteilchen innerhalb desselben gleiche Druckwellengeschwindigkeit  $a$ . Ausserdem folgt aus dem über den Querschnitt gleichbleibenden Druck eine über den Querschnitt konstante zeitliche Druckänderung  $\partial p / \partial t$ . Bei konstantem  $a^2 \varrho$  und  $\partial p / \partial t$  muss infolge der Kontinuitätsgleichung (23) auch  $\partial c / \partial x$  innerhalb eines Querschnitts konstant sein. Hiernach ergibt sich als einziger Unterschied zum idealen Fluid beim wirklichen Fluid ein hinsichtlich Amplitude und Phasenlage vom Rohrachsabstand  $r$  abhängiger zeitlicher Geschwindigkeitsverlauf.

Man erkennt dies überschlägig wie folgt: In der Rohrachse halten wegen verschwindenden Geschwindigkeitsanstieges über dem Radius nur Druckanstieg und Trägheitskraft in Rohrachsrichtung einander das Gleichgewicht. Das führt zu der zum Beispiel durch die Gl. (29) und (31) ausgedrückten, 90grädigem zeitlichen Phasenverschiebung im zeitlichen Verlauf von Druck und Geschwindigkeit. An der Rohrwand hingegen halten Druckanstieg in Rohrachsrichtung und radialem Anstieg der Schubspannung einander das Gleichgewicht. Bei laminarer Strömung ist daher der Druckanstieg der Krümmung des Geschwindigkeitsprofils proportional. Wegen fehlender zeitlicher Ableitung hierbei sind hiernach an der Wand der zeitliche Verlauf von Druck und Geschwindigkeit phasengleich.

### 5.2 Verhältnisse bei laminarer Strömung

Bei laminarer Strömung viskosen Fluids wirken im Rohrquerschnitt viskose Normalspannungen  $\sigma_{xx}$  und im koaxialen Zylinderschnitt viskose Schubspannungen  $\tau$ . Das Gleichgewicht am flüssigen Ringelement gemäß Bild 4 ergibt in  $x$ -Richtung unter der Annahme  $|c/a| \ll 1$

$$(41) \quad \varrho \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (\tau r)}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

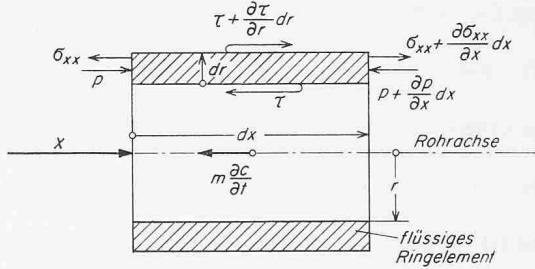


Bild 4. Ringförmiges Fluidelement einer waagerechten Rohrleitung bei laminar strömendem Fluid mit seinen Oberflächenkräften je Flächeneinheit und seiner d'Alembertschen Trägheitskraft

Nimmt man Newtonisches Fluid an, dann hängen die Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\tau$  gemäß der Navierschen Annahme<sup>1</sup> (wie folgt mit den Änderungen der Geschwindigkeit  $c$  und der dynamischen Viskosität zusammen:

$$(42) \quad \sigma_{xx} = 2 \eta \left( \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} c \right)$$

$$(43) \quad \tau = \eta \frac{\partial c}{\partial r}$$

Die Berücksichtigung von  $\sigma_{xx}$  ist notwendig, da die für die Wellenfortpflanzung massgebende Kontinuitätsgleichung des elastischen Fluids entscheidend durch das auch mit  $\sigma_{xx}$  zusammenhängende Glied  $\partial c / \partial x$  geprägt wird. Bei der vorliegenden eindimensionalen Strömung ist

$$(44) \quad \operatorname{div} c = \frac{\partial c}{\partial x}$$

Nach Einführung der kinematischen Viskosität

$$(45) \quad v = \eta / \varrho$$

und mit den Gl. (42) bis (45) lautet die Bewegungsgleichung (41)

$$(46) \quad \frac{\partial c}{\partial t} - v \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Nimmt man genähert an, dass die einzelne harmonische Druckwelle hier auch derjenigen des idealen Fluids gehorcht, dann wird mit  $2 p_0 = p_m$  und Gl. (29) die Bewegungsgleichung hierfür

$$(47) \quad \frac{\partial c}{\partial t} - v \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) = - \frac{p_m k}{\varrho} \cos k x \cos k a t$$

Nach der unter 5.1 angestellten Überlegung erscheint es sinnvoll, für die Geschwindigkeit folgenden Ansatz zu machen:

$$(48) \quad c = c_m \cos k x [f_1(r) \sin k a t + f_2(r) \cos k a t]$$

mit  $f_1(r)$  und  $f_2(r)$  als zwei noch zu bestimmenden Funktionen für die radiale Verteilung der Geschwindigkeit. Setzt man Gl. (48) in Gl. (47) ein, dann folgt mit  $f_1(r) = f_1$  und  $f_2(r) = f_2$

<sup>1</sup>) Siehe etwa J. Raabe: Hydraulische Maschinen und Anlagen, Teil 1: Grundlagen der hydraulischen Strömungsmaschinen, Düsseldorf 1968, VDI Verlag.

$$(49) \quad \cos k a t \left( k a f_1 + \frac{4}{3} \nu k^2 f_2 - \nu \frac{1}{r} f_2' - \nu f_2'' + \frac{k p_m}{\eta c_m} \right) + \sin k a t \left( -k a f_2 + \frac{4}{3} \nu k^2 f_1 - \nu \frac{1}{r} f_1' - \nu f_1'' \right) = 0$$

Diese Gleichung kann zu beliebiger Zeit  $t$  nur erfüllt sein, wenn die Beiwerte von  $\cos k a t$  und  $\sin k a t$  gleichzeitig verschwinden. Dies führt mit dem Differentialoperator

$$(50) \quad L(f) = f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{4}{3} k^2 f$$

auf die beiden simultanen Differentialgleichungen für  $f_1$  und  $f_2$

$$(51) \quad -\frac{k a}{\nu} f_1 + L(f_2) - \frac{k p_m}{\eta c_m} = 0$$

$$(52) \quad \frac{k a}{\nu} f_2 + L(f_1) = 0$$

Die Anwendung des Operators auf Gl. (51) führt auf

$$(53) \quad -\frac{k a}{\nu} L f_1 + L L f_2 - L \frac{k p_m}{\eta c_m} = 0$$

Drückt man hierin  $L f_1$  gemäß Gl. (52) durch  $f_2$  aus, dann wird mit Beachtung von Gl. (50) die Differentialgleichung für  $f_2$

$$(54) \quad L L f_2 + \frac{k^2 a^2}{\nu^2} f_2 = -\frac{4}{3} \frac{k^3}{\eta} \frac{p_m}{c_m}$$

Wendet man den Operator  $L$  auf Gl. (52) an und führt sodann  $L f_2$  mittels Gl. (51) auf  $f_1$  zurück, dann bekommt man für  $f_1$  die Differentialgleichung

$$(55) \quad L L f_1 + \frac{k^2 a^2}{\nu^2} f_1 = -\frac{k^2 a p_m}{\nu \eta c_m}$$

Die zu lösenden Differentialgleichungen für  $f_1$  und  $f_2$  sind also vom Typus

$$(56) \quad L L f_i + \frac{k^2 a^2}{\nu^2} f_i = -C_i$$

wobei für  $i = 1$

$$(57) \quad C_1 = \frac{k^2 a p_m}{\nu \eta c_m}$$

und für  $i = 2$

$$(58) \quad C_2 = \frac{4}{3} \frac{k^3}{\eta} \frac{p_m}{c_m}$$

Die Ausführung des Operators  $LL f$  ergibt für Gl. (56) den Aufbau

$$(59) \quad f_i^{(4)} + \frac{2}{r} f_i^{(3)} - \left( \frac{1}{r^2} + \frac{8}{3} k^2 \right) f_i'' + \left( \frac{1}{r^3} - \frac{8}{3} \frac{k^2}{r} \right) f_i + \left( \frac{16}{9} k^4 + \frac{k^2 a^2}{\nu^2} \right) f_i = -C_i$$

Eine Lösung mittels des Reihenansatzes

$$(60) \quad f_i = \sum_n a_m r^n,$$

wobei  $n$  eine noch zu bestimmende Reihe von Zahlen durchläuft, ergibt

$$(61) \quad \sum_n [a_n n(n-1)(n-2)(n-3) r^{n-4} + a_n 2n(n-1)(n-2) r^{n-4} - a_n n(n-1) r^{n-4} - a_n \frac{8}{3} k^2 n(n-1) r^{n-2} + a_n n r^{n-4} - a_n \frac{8}{3} k^2 n r^{n-2} + \left( \frac{16}{9} k^4 + \frac{k^2 a^2}{\nu^2} \right) a_n r^n] + C_i = 0$$

Fasst man Glieder gleicher Potenzen, zum Beispiel diejenigen mit  $r^{n-4}$ , zusammen, dann folgt

$$(62) \quad \sum_n \left\{ a_n [n(n-1)(n-2)(n-3) + 2n(n-1)(n-2) - n(n-1) + n] - a_{n-2} \frac{8}{3} k^2 [(n-2)(n-3) + 1] + a_{n-4} \left( \frac{16}{9} k^4 + \frac{k^2 a^2}{\nu^2} \right) \right\} r^{n-4} + C_i = 0$$

Die Gleichung ist für jedes beliebige  $r$  erfüllt, wenn die Koeffizienten einer jeden Potenz von  $r$  zu Null werden. Das führt bei gehöriger Zusammenfassung auf die folgende Rekursionsformel für die Größen  $a_n$

$$(63) \quad a_n n^2 (n-2)^2 - a_{n-2} \frac{8}{3} k^2 [(n-2)(n-3) + 1] + a_{n-4} \left( \frac{16}{9} k^4 + \frac{k^2 a^2}{\nu^2} \right) + C_i = 0$$

Für die weitere Rechnung kann angenommen werden

$$(64) \quad \frac{k^2 a^2}{\nu^2} \gg \frac{16}{9} k^4$$

$$(65) \quad \left( \frac{16 k^4}{9} + \frac{k^2 a^2}{\nu^2} \right) a_{n-4} \gg \frac{8}{3} k^2 [(n-2)(n-3) + 1] a_{n-2}$$

Damit verkürzt sich die Rekursionsformel (63) für die Beiwerte  $a_n$  auf

$$(66) \quad a_n n^2 (n-2)^2 + a_{n-4} \frac{k^2 a^2}{\nu^2} + C_i = 0$$

Hierin wird  $C_i$  zur Ermittlung des Beiwertes  $a_n$  mit der niedrigsten Potenz benötigt. Diese ist  $r^4$ . Damit wird die Reihe

$$(67) \quad f_i \equiv f_i \text{ inhom} = a_4 r^4 + a_8 r^8 + a_{12} r^{12} + \dots a_n r^n$$

Mit  $n = 4$  wird

$$(68) \quad a_4 = -\frac{1}{2^2 4^2} C_i = -\frac{1}{64} C_i$$

Mit  $n = 8$  folgt

$$(69) \quad a_8 = -\frac{1}{(6 \cdot 8)^2} a_4 = \frac{1}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} \left( \frac{k a}{\nu} \right)^2 C_i$$

Mit  $n = 12$  wird

$$(70) \quad a_{12} = -\frac{1}{(10 \cdot 12)^2} a_8 = -\frac{1}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12)^2} \left( \frac{k a}{\nu} \right)^4 C_i$$

Allgemein lauten die Beiwerte

$$(71) \quad a_n = (-1)^{n/4} \frac{C_i}{2^n} \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right]^2 \left( \frac{k a}{\nu} \right)^{n/2-2}$$

Die alternierende Reihe für  $f_i$  konvergiert, wenn

$$(72) \quad \left| \frac{a_{n+4}}{a_n} \right| < 1$$

oder wenn

$$(73) \quad \left( \frac{k a}{\nu} \right)^2 \frac{1}{[(n+2)(n+4)]^2} < 1$$

Um die Bedingung der Wandhaftung zu erfüllen, bedarf Gl. (59) noch einer zweiten Lösung, die durch das allgemeine Integral der homogenen Gleichung, also bei  $C_i = 0$ , gegeben ist. Man erhält es durch den Reihenansatz

$$(74) \quad f_{i \text{ hom}} = B_{mi} f_{i \text{ hom}}^* = B_{mi} (r^2 + a_6 r^6 + a_{10} r^{10} + \dots)$$

Diese Lösung bietet sich deswegen an, weil bei  $n = 2$  der Beiwert von  $a_2$  gemäß Gl. (66) verschwindet und man daher  $a_2$  durch den Freiwert  $B_{mi}$  ersetzen kann. Der Zeiger  $m$  weist darauf hin, dass die einzelnen zusammenhängenden Lösungen von inhomogener und homogener Gl. (59) bestimmten Harmonischen gemäß den Gln. (33) und (34) sowie bestimmten Druckamplituden gemäß Gl. (36) und zugehörigen Geschwindigkeitsamplituden gemäß Gl. (31) zugeordnet sind. Die  $a_n$  ergeben sich für Gl. (74) mit dem willkürlichen  $a_2 = 1$  über die Rekursionsformel (66) zu

$$(75) \quad a_n = (-1)^{\frac{n+2}{4}} \frac{2^2}{2^n} \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right]^2 \left( \frac{k a}{\nu} \right)^{n/2-1}$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (59) wird mit den Gln. (67) und (74)

$$(76) \quad f_i = \sum_m (f_{i \text{ inhom}} + f_{i \text{ hom}}) = \sum_m (f_{i \text{ inhom}} + B_{mi} f_{i \text{ hom}}^*)$$

Damit die Wandhaftung erfüllt ist, muss für jeden Wert  $m$  oder  $k$  nach den Gln. (33) und (34) für  $i = 1$  und  $i = 2$  das  $f_i$  an der Wand ( $r = R$ ) verschwinden, gemäß

$$(77) \quad f_1(R) = 0$$

$$(78) \quad f_2(R) = 0$$

Damit werden die Freiwerte

$$(79) \quad B_{mi} = - \frac{f_{i \text{ inhom}}(R)}{f_{i \text{ hom}}^*(R)}$$

Klammert man in der Lösung Gl. (48) für die Geschwindigkeit den Beiwert  $C_1$  nach Gl. (57) aus, dann ist der mit dem zeitlichen Druckverlauf phasengleiche, viskositätsbedingte Geschwindigkeitsanteil mit dem Faktor  $C_2/C_1$  behaftet, der sich nach den Gln. (57) und (58) zu

$$(80) \quad C_2/C_1 = 4 \frac{k \nu}{3 a}$$

ergibt.

Die Lösung (76) der Differentialgleichung (59) konvergiert nur für hohe kinematische Viskositäten, wie Gl. (73) zeigt. Für niedrige Werte von  $\nu$  wählt man den folgenden Lösungsweg, den man natürlich auch für hohe kinematische Viskosität be-

schreiten kann: In Gl. (59) als einer Differentialgleichung vierter Ordnung sind die Werte  $f_i^{(3)}, f_i'', f_i', f_i$  an einer beliebigen Stelle  $r = r_0$  willkürlich wählbar. Damit ist nach Gl. (59)  $f_i^{(4)}(r_0)$  eine lineare Funktion von diesen vier Größen. Die Freistellung von  $f_i^{(4)}$  in Gl. (59) ermöglicht eine Zurückführung aller höheren als der vierten Ableitung auf die vier Größen  $f_i^{(3)}, f_i'', f_i', f_i$  und damit die Darstellung von  $f_i^{(n)}(r_0)$  als eine durch willkürlich vorgebbare Werte  $f_i^{(3)}(r_0), f_i''(r_0), f_i'(r_0), f_i(r_0)$  bestimmte Größe. Damit kann  $f_i(r)$  als Taylorsche Reihe um eine beliebige Stelle  $r = r_0$  entwickelt werden gemäß

$$(81) \quad f_i = \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)}(r_0) \cdot \frac{(r - r_0)^n}{n!} + R_n$$

wobei der Rest  $R_n$  für ausreichend hohes  $n$  verschwinden dürfte. Da bei diesem Lösungsansatz durch die willkürlichen Werte  $f_i^{(3)}, f_i'', f_i'$  und  $f_i$  für  $r_0 = R$  auch die Wandhaftung erfüllt werden kann, soll auf eine besondere Lösung der homogenen Differentialgleichung von Gl. (59) verzichtet werden.

### 5.3 Verhältnisse bei turbulenter Strömung

Ein massgebender Einfluss des für turbulente Strömung gültigen Zusammenhangs der Spannungen aus Impuls austausch durch Querbewegung besteht, wenn die Zeitspanne, innerhalb der ein Teilchen den laminaren Bereich durchläuft, vernachlässigbar ist. Sieht man von der dünnen laminaren Unterschicht in unmittelbarer Wandnähe ab, dann treten bei turbulenter Strömung die viskositätsbedingten Spannungen nahezu vollständig hinter denen durch Impuls austausch zurück. Unter Annahme eines über den Querschnitt konstanten Druckes  $p$  lautet die Gleichgewichtsbedingung am flüssigen Ringelement

$$(82) \quad \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{\varrho r} \frac{\partial (\tau r)}{\partial r} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Für die turbulente Scheinschubspannung infolge Impuls austausches werde auf Grund der Hypothese des Prandtlschen Mischungsweges in bekannter Weise angesetzt [6]

$$(83) \quad \tau = \varrho \varkappa^2 (R - r)^2 \left( \frac{\partial c}{\partial r} \right)^2$$

wobei  $R$  den Rohrhalbmesser bezeichnet und  $\varkappa$  einen konstanten Beiwert, der sich nach H. Schlichting [6] bei stationärer Strömung im Bereich hoher Reynolds-Zahlen zum Beispiel zu 0,4 ergibt. Dieser Wert werde genähert auch für instationäre Strömung übernommen.

An Stelle von  $r$  führt man zweckmäßig den Wandabstand  $y$  ein

$$(84) \quad y = R - r$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung (82)

$$(85) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + 2 \varkappa^2 y \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 - \frac{\varkappa^2 y^2}{R - y} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 + 2 \varkappa^2 y^2 \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Für den Druckgradienten werde genähert der aus Gl. (29) für das ideale Fluid zu einer Harmonischen gehörige Ausdruck eingesetzt. Zweckmäßig wählt man an Stelle von  $p$  einen komplexen Druck  $p^*$ , so dass die rechte Seite der letzten Gleichung wie folgt lautet:

$$(86) \quad - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p^*}{\partial x} = K e^{ikat} \cos kx \equiv - \frac{1}{\varrho} p_m k e^{ikat} \cos kx$$

Die zu  $p^*$  gehörige komplexe Geschwindigkeit  $c^*$  werde als Produkt von Funktionen je einer Veränderlichen angesetzt gemäss

$$(87) \quad c^* = c_m f(y) e^{ikat} \cos kx$$

mit  $c_m$  als Geschwindigkeitsamplitude der betrachteten Harmonischen. Setzt man die Ausdrücke (86) und (87) in Gl. (85) ein, dann erhält man nach Kürzung mit  $\cos kx$  und  $e^{ikat}$  die folgende quadratische Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion  $f(y) = f$

$$(88) \quad \varkappa^2 y f' \left( 2f' - \frac{y}{R-y} f' + 2y f'' \right) e^{ikat} \cos kx + \\ + Af - \frac{K}{c_m^2} = 0$$

mit der Abkürzung

$$(89) \quad A = ik a/c_m$$

Gl. (88) ist erfüllt, wenn einmal der Beiwert der zeitlich veränderlichen Funktion  $e^{ikat} \cos kx$  verschwindet und ausserdem die hierdurch in Gl. (88) verbleibenden Restglieder sich zu Null ergänzen. Damit zerfällt Gl. (88) in die beiden folgenden Aussagen über  $f$

$$(90) \quad f'' = \frac{f'}{2y} \left( \frac{y}{R-y} - 2 \right)$$

$$(91) \quad f = K/A c_m^2$$

Gl. (90) gilt unter der selbstverständlichen Voraussetzung, dass

$$(92) \quad \varkappa \neq 0$$

und der weiteren Voraussetzung, dass

$$(93) \quad f'(y) \neq 0$$

Die letzte Aussage trifft zu mit Ausnahme der Rohrachse. Stellt man Gl. (90) wie folgt um

$$(94) \quad f'' \cdot (R-y) \cdot 2y = f'(3y-2R),$$

dann erkennt man, dass auf der Rohrachse, also für  $y = R$ , auch

$$(95) \quad f'(R) = 0$$

sein muss. Das Geschwindigkeitsprofil hat hiermit sein auf der Rohrachse erwartetes Extremum.

Die genäherte Lösung der beiden Gln. (90) und (91) ergibt sich folgendermassen. Da  $K$  gemäss Gl. (86) nicht von  $x$  abhängt und  $A$  gemäss Gl. (89) weder von  $x$  noch  $y$ , so ist  $f$  nach Gl. (91) weder von  $x$  noch  $y$  abhängig. Diese zweifellos grobe Näherung sichert jedoch, dass die die Gl. (91) erfüllende Lösung auch der Gl. (90) genügt, insofern  $0 = 0$  ist.

Die eigentliche hier verwendete Lösung werde als eine Taylorsche Reihe um die Koordinate  $y_0$  angesetzt

$$(96) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(y_0) \frac{(y-y_0)^n}{n!} + R_n$$

deren Restglied  $R_n$  hier verschwindend angenommen werde.

Die für diese Reihe benötigten Ableitungen kann man dann, wenn man von der ersten  $f'$  ausgeht, mit der Rekursionsformel Gl. (90) gewinnen und so als lineare Funktionen von  $f'$  erhalten.

Bei der in Gl. (88) vorliegenden Differentialgleichung

zweiter Ordnung kann  $f'(y_0)$ , wie noch gezeigt werden wird, vorgegeben werden. Damit sind auf Grund von Gl. (90) auch die  $n$ -ten Ableitungen bekannt. Wegen des besonderen Aufbaues von Gl. (90) fehlt in ihr allerdings der für die Reihe ebenfalls benötigte Freiwert  $f(y_0)$ . Diesen Mangel kann man genähert beheben, indem man aus Gl. (91) ansetzt

$$(97) \quad f(y_0) = k/(A c_m^2)$$

Der Ansatz stellt sicher, dass die Taylorsche Reihe wenigstens mit ihrem konstanten Glied auch die zweite Gleichung für  $f$ , nämlich Gl. (91), in erster Näherung befriedigt. Gleichzeitig enthebt er der Sorge, um welches Argument denn nun zweckmässig die Reihenentwicklung vorzunehmen sei.

Um schliesslich den für die Reihenentwicklung erforderlichen Wert  $f'(y_0)$  zu erhalten, werde angenommen, dass der Geschwindigkeitsverlauf auch bei instationärer turbulenter Strömung dem zunächst nur bei stationärer turbulenter Strömung beobachteten 1/7-Potenz-Gesetz gemäss

$$(98) \quad c = c_m \left( \frac{y}{R} \right)^{1/7}$$

gehorche. Hierin gleiche  $c_m$  der gemäss Gl. (87) für eine Harmonische angesetzten Geschwindigkeitsamplitude. Aus Gl. (98) folgt die Neigung des Geschwindigkeitsprofils zu

$$(99) \quad \frac{dc}{dy} = \frac{1}{7} \frac{c_m}{R} \left( \frac{R}{y} \right)^{6/7}$$

Für einen Punkt  $y_0$  entspreche dieser Geschwindigkeitsgradient dem Betrag des zeitlichen und räumlichen Mittelwertes über eine Periode vom Geschwindigkeitsgradienten einer Harmonischen gemäss Ansatz (87). Da die interessierende Geschwindigkeit den Realteil von  $c^*$  ausmacht, gilt

$$(100) \quad \overline{Re(c_m f'(y_0) e^{ikat} \cos kx)} = \frac{dc}{dy}(y_0)$$

Hierin deutet der Überstrich den räumlichen und zeitlichen Mittelwert des Betrages der harmonischen Funktion über eine Periode an. Die mittlere Ordinate des Betrages einer harmonischen Funktion  $h$  über eine Periode folgt aus

$$(101) \quad h_{\text{Mittel}} \cdot 2\pi = \int_0^{2\pi} |\cos \varphi| d\varphi = 4$$

zu

$$(102) \quad h_{\text{Mittel}} = \frac{2}{\pi}$$

Verwendet man dieses Resultat zweimal in der linken Seite von Gl. (100) zur Mittelwertbildung und ersetzt die rechte Seite von Gl. (100) durch Gl. (99), dann folgt

$$(103) \quad c_m \overline{f'(y_0)} \frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{7} \frac{c_m}{R} \left( \frac{R}{y_0} \right)^{6/7}$$

Damit wird die gesuchte Ableitung mit  $\overline{f'(y_0)} = f'(y_0)$

$$(104) \quad f'(y_0) = \frac{\pi^2}{28} \left( \frac{R}{y_0} \right)^{6/7} \frac{1}{R}$$

Man ersieht hieraus, dass hierbei die Funktion  $f(x)$  entgegen der zuvor gemachten Annahme auf der Rohrachse nicht verschwindet. Indessen ist sie klein. Ausserdem beschreibt das 1/7-Potenz-Gesetz nur die Vorgänge in Wandnähe etwas genauer.

Um die prägnanten Vorgänge zu erfassen, sollte  $y_0$  in Wandnähe liegen. Die Wandhaftung ist wegen des Ansatzes Gl. (83) nicht erfüllbar.

## 6. Die instationäre Strömung im geraden Rohr mit Durchfluss

### 6.1 Strömung des idealen Fluids

Für den in Bild 1 dargestellten Fall kann bei nunmehr geöffnetem Rohrverschluss am rechten Rohrende für die Druckverteilung entsprechend Gl. (29) angesetzt werden

$$(105) \quad p = p_m \sin k x \cos k a t$$

Die aus der Bewegungsgleichung (22) folgende Geschwindigkeit enthält hier noch ein Durchflussglied  $c_{om}$ , so dass

$$(106) \quad c = - \frac{p_m}{\varrho a} \cos k x \sin k a t + c_{om}$$

Bei einem konstanten Behälterüberdruck  $p_\infty$  gemäß Bild 1 wird der resultierende Druck in waagrechter Leitung

$$(107) \quad p_{res} = p_\infty + p_m \sin k x \cos k a t$$

Am rechten Ende der Rohrleitung befindet sich als Rohrverschlussorgan eine Nadeldüse, die dort die Geschwindigkeit um das  $\varphi$ -fache erhöht

$$(108) \quad c_{(x=L)} = - \frac{p_m}{\varrho a} \varphi \cos k L \sin k a t + \varphi c_{om}$$

Nach der Ausflussformel für ideales Fluid gilt am Rohrende

$$(109) \quad \frac{c^2}{2} \Big|_{(x=L)} = \frac{p_{res}}{\varrho} \Big|_{(x=L)}$$

Ausgeführt ergibt dies

$$(110) \quad \frac{1}{2} \frac{p_m^2 \varphi^2}{\varrho^2 a^2} \cos^2 k L \sin^2 k a t - \frac{p_m \varphi^2}{\varrho a} c_{om} \cos k L \sin k a t + \frac{c_{om}^2 \varphi^2}{2} = \frac{p_\infty}{\varrho} + \frac{p_m}{\varrho} \sin k L \cos k a t$$

Dies stellt eine Gleichung vierten Grades für  $\sin(k a t)$  dar. Durch eine ihrer reellen Wurzeln ist

$$(111) \quad k t = f_2(k, L, p_m, p_\infty, c_{om}, \varphi, \varrho, a)$$

wobei  $f_2$  über  $k$  als arcsin-Funktion mehrdeutig verläuft. Jedem Zeitpunkt  $t$  entspricht eine Gerade  $t k$  über  $k$ . Dort, wo diese die Kurve  $f_2(k, \dots)$  schneidet, liegt der zu  $t$  gehörige Eigenwert von  $k$ . Da diese Eigenwerte sicher nicht als Vielfache ineinander enthalten sind, ist eine Fourieranalyse einer momentanen Druckverteilung wie im Fall der durchflussfreien Strömung eines idealen Fluids nicht mehr möglich.

Wir wollen stattdessen einen Näherungsweg beschreiten. Hierbei wird von Gl. (110) über eine ganze Zahl von Schwingungen der zeitliche Mittelwert gebildet. Dabei gilt der Zusammenhang

$$(112) \quad \frac{p_m^2 \varphi^2}{4 \varrho a^2} \cos^2 k l = \frac{p_\infty}{\varrho} - \frac{c_{om}^2}{2} \varphi^2$$

Diese Mittelwertbildung hat natürlich nur einen Sinn, wenn sich in dem betrachteten Zeitintervall die Nadelöffnung am rechten Rohrende nicht wesentlich ändert. Damit ist die weitere Rechnung auf einen vorhergegangenen teilweisen Schliessvor-

gang anwendbar. Gl. (112) wird in einfacher Weise durch  $\cos^2 k l = 1$  erfüllt, wenn

$$(113) \quad k = m \pi / L$$

$$(114) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

wobei  $m$  die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft.

Die Druckamplitude  $p_m$  kann man wie bei der Strömung ohne Durchfluss dadurch bestimmen, dass der Druckverlauf  $p(x)$  längs der Rohrachse zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  vorgegeben ist, gemäß

$$(115) \quad p(x) = \sum p_m \cos \left( \frac{m \pi}{L} a t_0 \right) \sin \left( m \frac{\pi}{L} x \right)$$

Durchläuft  $m$  die Reihe der ganzen Zahlen gemäß Gl. (114), dann lautet Gl. (112)

$$(116) \quad \frac{\varphi^2}{4 \varrho^2 a^2} \sum p_m^2 = \frac{p_\infty}{\varrho} - \sum \frac{c_{om}^2}{2} \varphi^2$$

wobei  $\sum \varphi^2 c_{om}^2 / 2$  für den weiteren Verlauf der Rechnung bedeutungslos ist. Setzt man

$$(117) \quad a_m = p_m \cos \left( m \frac{\pi}{L} a t_0 \right),$$

dann ist  $p$  nach Gl. (115) durch die nachstehende harmonische Reihe gegeben

$$(118) \quad p(x) = \sum_m a_m \sin \left( m \frac{\pi}{L} x \right)$$

Hieraus folgen die Werte  $a_m$  nach den Regeln der Fourieranalyse zu

$$(119) \quad a_m = \frac{1}{L} \int_0^{2L} p(x, t_0) \sin \left( \frac{m \pi}{L} x \right) dx$$

$m$  durchläuft gemäß Gl. (114) die Reihen der ganzen Zahlen. Zur Auswertung des Integrals hat man von dem gemessenen Druckverlauf  $p(x)_{res}$  den konstanten Behälterdruck  $p_\infty$  abzuziehen, da unter  $p$  definitionsgemäß der instationäre Druckanteil zu verstehen ist. Mit den Werten  $a_m$  folgen dann über Gl. (117) die Druckamplituden  $p_m$ .

### 6.2 Laminare Strömung

Die allein interessierende Gleichgewichtsbedingung lautet hierbei unter Einbeziehung der Kontinuität genau so wie Gl. (46). Hierin drückt sich eine zusätzliche zeitlich und über der Rohrachse unveränderliche Durchflussgeschwindigkeit darin aus, dass der Druckgradient  $-1/\varrho \cdot \partial p / \partial x \cdot (t, x)$  gegenüber der in 5.2 behandelten, schwingenden Strömung zu vermehren ist um einen Druckgradienten infolge laminarer Durchflusströmung. Sieht man von der Rohrlaufstrecke zur Ausbildung der Grenzschicht ab, dann ist der aus dem Durchfluss stammende Geschwindigkeitsanteil  $c_0'$  unter der vor Gl. (112) gemachten Annahme von der Zeit  $t$  unabhängig.  $c_0'$  ändert sich außerordentlich nicht in Richtung der Rohrachse ( $x$ -Achse), so dass auch  $\partial^2 c_0' / \partial x^2$  verschwindet. Wegen der Linearität von Gl. (46) kann man in ihr den Durchflusanteil der Geschwindigkeit  $c_0'$  und seinen Druckgradienten  $1/\varrho \cdot \partial p_Q / \partial x$  abspalten. Mit obigen Annahmen gilt gemäß Gl. (46) für  $c_0'$  und  $p_Q$  die Gleichgewichtsbedingung in der Form

$$(120) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_Q}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 c_0'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_0'}{\partial r} \right)$$

Mit dem Hagen-Poisseuilleschen Gesetz verteilt sich  $c'_0$  hiernach parabolisch über den Rohrhalbmesser. Dabei ist

$$(121) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_Q}{\partial x} = - \frac{8 \nu c_0}{R^2}$$

mit  $R$  als Rohrhalbmesser und  $c_0$  als mittlerer aus dem Durchfluss gemessener Geschwindigkeit. Um den Druckabfall  $p_Q = - 8 \eta c_0 x / R^2$  muss eine zum Zeitpunkt  $t_0$  gemessene Verteilung des instationären Druckanteils vermindert werden, um damit genähert zu einer gemäss Gl. (115) aus ihren Harmonischen zusammengesetzten Druckverteilung  $p(x)$  des idealen Fluids zu gelangen.

Wir nehmen an, dass der so erhaltene Druckgradient mit seinen räumlichen Harmonischen angenähert dem Verlauf eines idealen Fluids entspricht und außerdem die Gleichgewichtsbedingung (46) mit ihrer in Abschnitt 5.1 abgeleiteten Geschwindigkeitsverteilung erfüllt. Für die Eigenwerte  $k$  gelten hierbei jedoch die Beziehungen (113) und (114). Wegen der Linearität von Gl. (46) überlagert sich die so erhaltene Geschwindigkeitsverteilung mit der aus dem Durchfluss kommenden Parabel.

### 6.3 Turbulente Strömung

Bei turbulenter Strömung mit Durchfluss gilt ebenfalls die Bewegungsgleichung in der Form von Gl. (85). Der dort auf der rechten Seite stehende Druckgradient enthält den Druckgradienten infolge Durchfluss

$$(122) \quad \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_Q = \frac{\lambda}{d} \frac{c^2}{2}$$

mit  $\lambda$  als der genähert im stationären Versuch bestimmten Rohrverlustzahl. Eine Arbeit von *W. Vogel* [5] zeigt, dass man dies bis zu einer Pulsationskennzahl von

$$(123) \quad \Gamma = \Omega Re^{1/4} < 13$$

tun kann. Hierin ist der Beiwert  $\Omega$  definiert durch

$$(124) \quad \Omega = \frac{\Delta c}{T} \frac{d}{\bar{c}^2}$$

mit  $\Delta c$  als Geschwindigkeitsamplitude,  $d$  als Rohrdurchmesser,  $T$  als Schwingungsdauer und  $\bar{c}$  als zeitlicher Mittelwert der Geschwindigkeit. Zieht man  $(1/\varrho \cdot \partial p/\partial x)_Q$  gemäss Gl. (122) vom Druckgradienten der rechten Seite von Gl. (85) ab, dann gilt

$$(125) \quad \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\lambda}{d} \frac{c^2}{2} + 2 \kappa^2 y \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 - \frac{\kappa^2 y^2}{R-y} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 - 2 \kappa^2 y^2 \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = - \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{id}$$

Hierin bedeutet der Zeiger  $id$  beim Druckgradienten, dass dieser genähert dem in verlustloser Strömung mit dem durch Gl. (118) beschriebenen Druckverlauf angehört. Die Geschwindigkeit werde aufgegliedert in einen Durchflussanteil  $c_0$ , der sich zeitlich kaum ändert, und einen den zeitlichen Druckschwankungen nach Gl. (118) zugeordneten Anteil, gemäss

$$(126) \quad c = c_0 + c'$$

Zur weiteren formalen Behandlung werde die Bewegungsgleichung linearisiert. Hierzu werden folgende Annahmen getroffen:

$$(127) \quad \frac{\partial c'}{\partial t} \gg \frac{\partial c_0}{\partial t}$$

$$(128) \quad \frac{c'}{c_0} \ll 1$$

$$(129) \quad \frac{\partial c'}{\partial y} / \frac{\partial c_0}{\partial y} \ll 1$$

$$(130) \quad \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} / \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} \ll 1$$

Damit kann die Bewegungsgleichung zerlegt werden in eine Aussage über den zeitlich praktisch unveränderlichen Anteil  $c_0$

$$(131) \quad - \frac{\lambda}{2d} c_0^2 + 2 \kappa^2 y \left( \frac{\partial c_0}{\partial y} \right)^2 - \frac{\kappa^2 y^2}{R-y} \left( \frac{\partial c_0}{\partial y} \right)^2 - 2 \kappa^2 y^2 \frac{\partial c_0}{\partial y} \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} = \sigma$$

und in eine Aussage über den hier allein im weiteren interessierenden zeitlich veränderlichen Anteil

$$(132) \quad \frac{\partial c'}{\partial t} - \lambda \frac{c_0}{d} c' + 4 \kappa^2 y \frac{\partial c_0}{\partial y} \frac{\partial c'}{\partial y} - \frac{2 \kappa^2 y}{R-y} \left( \frac{\partial c_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial c'}{\partial y} \right) - 2 \kappa^2 y^2 \frac{\partial c_0}{\partial y} \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} - 2 \kappa^2 y^2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} \frac{\partial c'}{\partial y} = - \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{id}$$

Unter Annahme langsamen Schliessens können  $c_0$  und seine Ableitungen nach  $y$  angenähert unabhängig von der Zeit angenommen werden. Der Druckverlauf wird angenähert Gl. (118) entnommen. Die Verteilung des Druckes über der Rohrachse ( $x$ -Achse) ist dabei belanglos. Zur formalen Behandlung setzen wir nach dem Vorbild von Gl. (87)

$$(133) \quad - \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{id}^* = K e^{ikat} \cos(kx)$$

wobei  $k$  den Gl. (103) und (104) genügen muss. Die Geschwindigkeit  $c'$  wird hierbei formal komplex angesetzt als Produkt einer von  $y$  und einer von  $t$  abhängigen Funktion gemäss

$$(134) \quad c^* = c_m f(y) e^{ikat} \cos(kx)$$

Die wirkliche Geschwindigkeit ist hiervon der Realteil. Setzt man  $c^*$  an Stelle von  $c$  und  $-(1/\varrho \cdot \partial p/\partial x)^*_{id}$  an Stelle von  $-(1/\varrho \partial p/\partial x)_{id}$  in die Bewegungsgleichung ein, dann erhält man für die gesuchte radiale Verteilungsfunktion  $f$  der Geschwindigkeit folgende Differentialgleichung:

$$(135) \quad i k a f - \lambda \frac{c_0}{d} f + 4 \kappa^2 y \frac{\partial c_0}{\partial y} f' - \frac{2 \kappa^2 y^2}{R-y} \frac{\partial c_0}{\partial y} f' - 2 \kappa^2 y^2 \frac{\partial c_0}{\partial y} f'' - 2 \kappa^2 y^2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} f' + \frac{K}{c_m} = 0$$

Die Größen  $\partial c_0 / \partial y$ ,  $\partial^2 c_0 / \partial y^2$  werden aus dem genähert stationären Geschwindigkeitsverlauf der Durchflussströmung nur als Funktion vom Wandabstand  $y$  angenommen. Mit  $f'(y=R) = 0$  sichert die vorstehende Gleichung das aus Gründen der Axialsymmetrie erforderliche Extremum der Geschwindigkeit auf der Rohrachse. Mit den Abkürzungen

$$(136) \quad i k a - \lambda \frac{c_0}{d} = A$$

$$(137) \quad 2 \kappa^2 = E$$

wird die zweite Ableitung  $f$  aus Gl. (135) in Abhängigkeit von  $f'$  und  $f$

$$(138) \quad f'' = \frac{1}{E y^2 \frac{\partial c_0}{\partial y}} \left[ \frac{K}{c_m} + A f + 2 E y \frac{\partial c_0}{\partial y} f' - \frac{E y^2}{R - y} \frac{\partial c_0}{\partial y} f' - E y^2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} f' \right]$$

Diese Rekursionsformel ermöglicht es, durch weitere Differentiation jede beliebige Ableitung  $f^{(n)}$  durch  $f'$  und  $f$  auszudrücken. Beides sind Größen, die in einer Differentialgleichung zweiter Ordnung an einer beliebigen Stelle vorgegeben werden können. Da hiermit die Ableitungen  $f^{(n)}(y_0)$  bekannt sind, kann  $f$  analog den Gln. (90) und (96) in eine Taylorsche Reihe um den Punkt  $y_0$  entwickelt werden.

Die Wandhaftung kann hier wegen des Schubspannungsansatzes Gl. (83) wiederum nicht erfüllt werden. Um die Freiwerte  $f(y_0)$  und  $f'(y_0)$  zu bestimmen, werde wie in Abschnitt 5.3 angenommen, die Geschwindigkeitsverteilung gehorche auch bei instationärer turbulenter Strömung dem 1/7-Potenz-Gesetz. Damit ist  $f'(y_0)$  analog Gl. (104) bestimmbar. Auch  $f(y_0)$  kann auf diese Weise aus dem Geschwindigkeitsverlauf des 1/7-Potenz-Gesetzes bestimmt werden, indem man festlegt, dass der reelle Mittelwert der aus Gl. (132) folgenden Geschwindigkeit an einer Stelle  $y_0$  der Geschwindigkeit auf Grund des Gesetzes nach Gl. (98) entspricht. Hiermit wird

$$(139) \quad f(y_0) = \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{y_0}{R} \right)^{1/7}$$

Da die Taylorsche Reihe gemäß Gl. (136) komplexe Beiwerte enthält und der Ansatz für die Geschwindigkeit gemäß Gl. (134) ebenfalls komplex ist, sei hier nochmals betont, dass die tatsächliche Geschwindigkeit sich als Realteil von  $c^*$  ergibt.

#### Verzeichnis der verwendeten Symbole

$a$	Druckwellengeschwindigkeit	$L T^{-1}$
$a_n$	Koeffizient	$L^{-2n+2}$
$a_m$	Fourierkoeffizient	$L^{-1} M T^{-2}$
$A$	Abkürzung	$T^{-1}$
$B$	Zahl	1
$B_{mi}$	Koeffizient	$L^{-2}$
$c$	Geschwindigkeit längs der Rohrachse	$L T^{-1}$
$c'$	zeitlich veränderlicher Geschwindigkeitsanteil	$L T^{-1}$
$c_0$	mit Durchfluss verbundenen Geschwindigkeit	$L T^{-1}$
$c_m$	Geschwindigkeitsamplitude, zu $m$ gehörig	$L T^{-1}$
$C_1$	def. in Gl. (57)	$L^{-4}$
$C_2$	def. in Gl. (58)	$L^{-4}$
$C_i$	allgemeiner Ausdruck für $C_1$ oder $C_2$	$L^{-4}$
$\Delta c$	Geschwindigkeitsschwankung	$L T^{-1}$
$\bar{c}$	mittlere Geschwindigkeit	$L T^{-1}$
$c^*$	komplexe Geschwindigkeit	$L T^{-1}$
$c^{**}$	Wandschubspannungsgeschwindigkeit	$L T^{-1}$
$d$	Rohrdurchmesser	$L$
$E_l$	Volumenelastizitätszahl (modul)	$M L^{-1} T^{-2}$
$f = f(y)$	dimensionslose Funktion der radialen Geschwindigkeitsverteilung, abhängig vom Wandabstand	1
$f_i = f_i(r)$	dasselbe, abhängig vom Achsabstand $r$ für $f_1$ oder $f_2$	1
$f_1 = f_1(r)$	dimensionslose Funktion der radialen Geschwindigkeitsverteilung für den gegenüber dem Druckgradienten um $90^\circ$ zeitlich voreilenden Geschwindigkeitsanteil	1

$f_2 = f_2(r)$	dasselbe für den mit dem Druckgradienten phasengleichen Geschwindigkeitsanteil	1
$f_{i \text{ hom}}$	Lösung der homogenen Differentialgleichung (56)	1
$f_{i \text{ inhom}}$	Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (56)	1
$i$	Differentialgleichung (56)	1
$k$	imaginäre Einheit	1
	Eigenwert, definiert in Gl. (33) oder in Gl. (113)	$L^{-1}$
$K$	definiert in Gl. (86)	$L T^{-2}$
$L$	Operator definiert in Gl. (50)	$L^{-2}$
$L$	Länge der Rohrleitung	$L$
$m$	Ordnung einer Harmonischen, definiert in Gl. (34) oder Gl. (114)	1
$p$	Druck, Druckschwankungsanteil	$M L^{-1} T^{-2}$
$p_m, p_0$	Druckamplitude	$M L^{-1} T^{-2}$
$p_\infty$	Druck im unendlich gross angenommenen Freispiegelbehälter	$M L^{-1} T^{-2}$
$p_{\text{res}}$	resultierender Druck aus $p$ und $p_\infty$	$M L^{-1} T^{-2}$
$R$	Rohrhalbmesser	$L$
$r$	Abstand von der Rohrachse	$L$
$Re$	Realteil, Reynoldszahl	1
$r_0$	bestimmte Stelle von $r$	$L$
$t$	laufende Zeit	$T$
$t_0$	Zeitpunkt	$T$
$v$	spezifisches Volumen	$L^3 M^{-1}$
$V$	Volumen	$L^3$
$V_0$	Volumen konstanter Grösse	$L^3$
$x$	Koordinate in Richtung der Rohrachse	$L$
$y$	Wandabstand	$L$
$y_0$	bestimmter Wandabstand (etwa Dicke der laminaren Unterschicht)	$L$

#### Griechische Buchstaben

$\Gamma$	Pulsationskennzahl, definiert in Gl. (123)	1
$\delta$	Dicke der laminaren Unterschicht	$L$
$\eta$	dynamische Viskosität	$L^{-1} M T^{-1}$
$\zeta$	= 0,4 Beiwert für die turbulente Scheinschubspannung	1
$\lambda$	Rohrverlustzahl, definiert in Gl. (122)	1
$\nu$	kinematische Viskosität	$L^2 T^{-1}$
$\pi$	Ludolphsche Zahl	1
$\varrho$	Dichte	$M L^{-3}$
$\sigma_{xx}$	Normalspannung im Rohrquerschnitt	$L^{-1} M T^{-2}$
$\tau$	Schubspannung in Rohrachsrichtung am flüssigen Zylinderelement	$L^{-1} M T^{-2}$
$\varphi$	Querschnittsverhältnis	1
<i>Indices</i>		
$id$	zum idealen Fluid gehörig	
$m$	zum Eigenwert $m$ gehörig	
$n$	zum $n$ -ten Glied einer Potenzreihe gehörig	
$v$	zu verlustbehafteter Strömung gehörig	

#### Literaturverzeichnis

- [1] E. G. Richardson and E. Tyler: Proc. Phys. Soc. London 42, 1 (1929).
- [2] Th. Sextl: Über den von E. G. Richardson entdeckten Annulareffekt «Z. Phys.» 61 (1930) S. 349.
- [3] P. Lambosy: Oscillations forcées d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube rigide et horizontal. Calcul de la force de frottement. «Helv. Physica Acta» 25 (1952) S. 371.
- [4] H. Pieper und E. Wetterer: Strompendel für elektrische Registrierung der Blutstromgeschwindigkeit. «Z. f. Biologie» 105 (1952) Nr. 3, S. 214.
- [5] W. Vogel: Druck- und Geschwindigkeitsmessung in pulsierender Strömung. Dissertation TH München 1958.
- [6] H. Schlichting: Grenzschichttheorie. Karlsruhe 1964, Verlag Braun