

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 89 (1971)  
**Heft:** 11: 2. Sonderheft zum 70. Geburtstag von Prof. Dr. F. Stüssi

**Artikel:** Zur Algebraisierung von Spannungs- und Verformungsfunktionen  
**Autor:** Dimitrov, Nikola S.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84797>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zweites Sonderheft zum 70. Geburtstag von Prof. Dr. F. Stüssi

Das erste Sonderheft erschien als Heft 1 dieses Jahrgangs am 7. Januar 1971

## Zur Algebraisierung von Spannungs- und Verformungsfunktionen

Von Prof. Dr.-Ing. Nikola S. Dimitrov, Universität (TH) Karlsruhe und Universität (TH) Stuttgart

DK 539.31

## 1. Einleitung

Mit der Operatorenrechnung im Sinne von Mikusinski [1] ist eine Entwicklung möglich, die selbst dem Computer etwas voraus hat, da die Lösungen von Anfangs- und Randwertproblemen ganz einfach kalkülmässig und symbolisch durch Operatoren gegeben sind. Als Nebenprodukt dieser Rechnung werden die Funktionen im stetigen oder im diskreten Bereich durch gemeinsame Operatoren dargestellt. Insbesondere in der Balken- und Plattentheorie können ohne die Operatorschreibweise Einzelkräfte, Einzelmomente oder Querkraftsprünge nicht durch gewöhnliche Funktionen beschrieben werden, es sei denn, man benütze die schwerfällige Fourier-Analyse. Bis vor kurzem war noch die Laplace-Transformation das einzige Mittel, um partielle Differentialgleichungen exakt kalkülmässig zu lösen.

Einer der vielen Vorteile des Mikusinski-Kalküls ist die Fundierung der Lösung auf algebraischem und symbolischem Wege. Nichtlineare Differentialgleichungen werden numerisch gelöst. Besonders leistungsfähig ist dabei das Mehrstellenprinzip des Differenzenverfahrens. Im Grad der Genauigkeit unterscheiden sich die Verfahren von Collatz [2], Stüssi [3] und [4], Falk [5] und Gurr [6] wenig voneinander. Allen diesen Verfahren liegt die Tendenz zugrunde, das engmaschige Gittermodell der gewöhnlichen Differenzen durch wirksamere grössere Teilbereiche als endliche Elemente zu überdecken, Bild 1. Die erreichte Genauigkeit ist dabei gegenüber den einfachen Methoden weit überlegen. In diesem Sinne werden wir auch die massgebenden Gleichungen algebraisieren und die dazugehörigen Rekursionsformeln mit Hilfe der Operatoren schneller und allgemeiner lösen. In [7] bis [11] wurden bereits einige neue Grundlagen der Statik und Festigkeitslehre angegeben. In [12] bis [20] sind weitere Anwendungen des neuen Kalküls aufgeführt.

## 2. Grundlagen

Fastet man die Funktionen als unendliche Menge auf, dann kann man sie je nach ihrer Dichte und Mächtigkeit in zwei Arten unterteilen: *Abzählbare Mengen* oder diskrete Funktionen im numerischen Bereich  $0 \leq n < \infty$ , wenn  $n$  eine ganze Zahl  $0, 1, 2, \dots$  bedeutet. *Kontinuierliche Mengen* oder stetige und unstetige Funktionen im Kontinuum  $0 \leq x < \infty$ , wenn  $x$  eine beliebige Zahl ist.

Die Darstellung dieser Mengen wird durch abstrakte Summen vorgenommen, bei denen das *Einheitselement* eine abstrakte Zahl  $h^v$  ist. Man nennt  $h$  auch einen *Verschiebungsoperator*.

Hierin bedeutet  $v$  nicht nur eine Potenz, sondern auch den Ort, wo die Einheit ( $h \equiv 1$ ) steht, siehe Bild 2a. Die diskrete Funktion  $f(n)$  ist im Bild 2b angegeben. Die Menge der Koeffizienten erhält einen Rang und eine Ordnung, wenn man sie

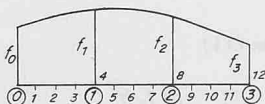


Bild 1. Überdeckung der engen Gitterabstände durch grössere Maschenweiten (Zahlen in Kreisen) und endliche Elemente

in Form einer Summe nach den entsprechenden Einheitselementen aufzählt. Diese Summe

$$(1) \quad f = f_0 h^0 + f_1 h^1 + f_2 h^2 + \dots + f_v h^v + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n h^n$$

ist abstrakt, weil man sie nie ausführen kann. Sie hat aber die grossen Vorteile der Potenzreihen, die immer konvergieren. Man kann natürlich für  $h^0 = 1$  und für  $h^1 = h$  schreiben, wie es bei Potenzen sein muss. Die unendliche Reihe (1) ist bereits die Operatorform der Funktion  $f(n)$ , die mit  $f = \{f(n)\}$  gekennzeichnet wird und die sehr häufig durch eine einfache Summenformel charakterisiert ist.

Eine Funktion  $f(x)$  im stetigen Bereich hat analog die Operatorform

$$(2) \quad f = \{f(x)\} = \int_0^{\infty} h^{\xi} f(\xi) d\xi$$

Setzt man  $h = e^{-s}$ , dann geht Gl. (2) rein formal in die Laplace-Transformation über. Das Integral ist im Sinne von Mikusinski abstrakt, denn  $s$  ist eine *abstrakte Zahl* und bedeutet den *Differentialoperator*. Ist  $s$  eine komplexe Zahl, dann hat man es mit der Funktionentheorie, mit einem gewöhnlichen Integral, das konvergieren muss, kurz, man hat es mit der Laplace-Transformation zu tun. Dagegen hat das Integral in der Operatorenrechnung immer einen Sinn, wenn  $f$  ein Element eines *Ringes* ist. Eine Menge heisst ein Ring, wenn für irgend zwei Elemente eine Verknüpfung der Addition und eine zweite der Multiplikation gegeben sind:

Für die Numerik (diskreter Bereich)

$$(3) \quad f + g = \sum (f_n + g_n) h^n$$

$$(4) \quad fg = \sum f_n h^n \sum g_n h^n = c$$

Für das Kontinuum (stetiger Bereich)

$$(3a) \quad f + g = \{f(x) + g(x)\}$$

$$(4a) \quad fg = \left\{ \int_0^x f(\xi) g(x - \xi) d\xi \right\} = c$$

Bei allen diesen Verknüpfungen gelten die kommutativen, assoziativen und distributiven algebraischen Gesetze. Das Produkt (4) bzw. (4a) nennt man *Faltung*

$$(5) \quad fg = c$$

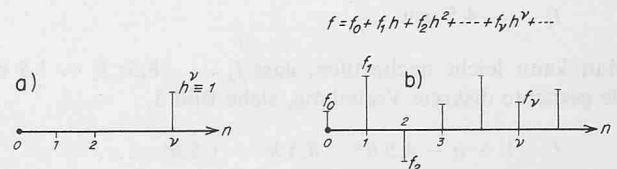


Bild 2. Einheitselemente an der Stelle  $v$  und diskrete Funktion  $f$

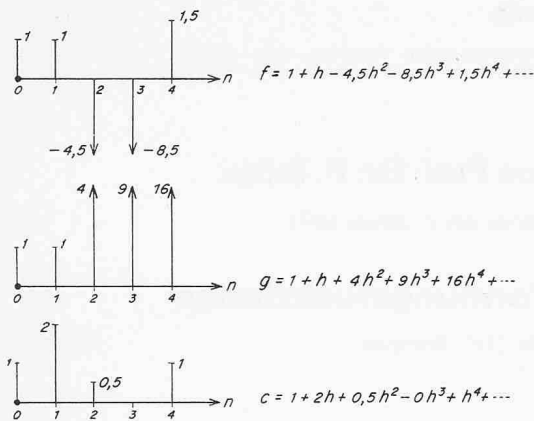


Bild 3. Produkt zweier diskreter Funktionen  $fg = c$

Das allgemeine Glied  $c_n$  erhält man aus der Multiplikation zweier Potenzreihen, wenn es sich um Funktionen im diskreten Bereich handelt:

$$(5a) \quad c_n = f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + \dots + f_{n-1} g_1 + f_n g_0$$

Für das Kontinuum ist das Faltungsintegral (4a) durch das Produkt  $fg$  der beiden Operatorfunktionen zu ersetzen

$$(5b) \quad fg = \{c(x)\}$$

Ist eine der beiden Funktionen, zum Beispiel  $f$ , unbekannt, so dient Gl. (5) zur unmittelbaren Ermittlung. Für den diskreten Bereich, beispielsweise, kann man die unbekannten Koeffizienten  $f_n$  durch Koeffizientenvergleich unmittelbar bekommen. Dabei ist das *Dividieren*

$$(6) \quad f = \frac{c}{g} = \frac{\sum c_n h^n}{\sum g_n h^n} = \sum f_n h^n$$

gegenüber der Matrizenrechnung bedeutend einfacher. Der Nenner  $g$  in (6) kann nie Null werden. Man hat in der Operatorenrechnung die Vorteile einer *Null-Teiler-freien Algebra*.

**Beispiel:** Gesucht wird die diskrete Verteilung  $f(n)$ , die multipliziert mit  $g$

$$g = h^0 + \{n^2\} = 1 + h + 4h^2 + 9h^3 + 16h^4 + \dots$$

die bekannte Funktion  $c(n)$

$$c = 1 + 2h + 0.5h^2 + 0h^3 + h^4$$

ergibt. Aus Gl. (5) hat man sofort

$$f = \frac{c}{g} = \frac{1 + 2h + 0.5h^2 + h^4}{1 + h + 4h^2 + 9h^3 + 16h^4 + \dots} = \frac{c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots}{g_0 + g_1 h + g_2 h^2 + \dots} = f_0 + f_1 h + f_2 h^2 + \dots$$

Gl. (5a) ergibt unmittelbar

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 = f_0 g_0 = f_0; & f_0 &= 1 \\ c_1 &= 2 = f_0 g_1 + f_1 g_0 = 1 + f_1; & f_1 &= 1 \\ c_2 &= 0.5 = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 = 4 + 1 + f_2; \\ f_2 &= -4.5 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Man kann leicht nachprüfen, dass  $f_3 = -8.5$ ;  $f_4 = 1.5$  und die gesuchte diskrete Verteilung, siehe Bild 3,

$$f = 1 + h - 4.5h^2 - 8.5h^3 + 1.5h^4 + \dots$$

lauten würde.

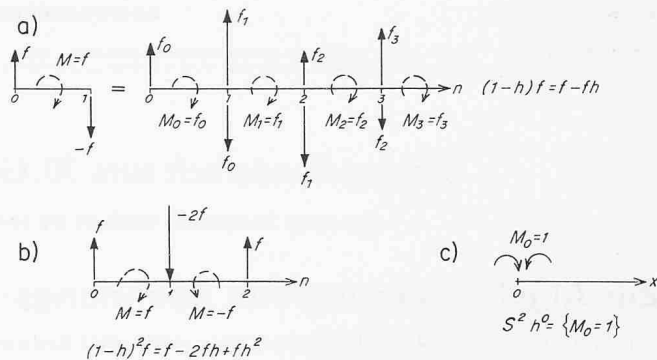


Bild 4.

- a) Mechanische Deutung des ersten Differenzenoperators  $(1 - h)f$  als einfaches Drehmoment
- b) zweiter Differenzenoperator  $(1 - h)^2$  als Doppelmoment
- c) Doppelmoment  $M_0 = 1$  mit dem Operator  $s^2$

## 2.1 Differentialoperator $s$ und Differenzenoperator $(1 - h)$

Definitionsgemäss erhält man aus der Beziehung

$$(7) \quad sf = f' + f_0 h^0$$

den Differentialoperator  $s$ . Die Gleichung (7) besagt, dass das Produkt  $sf$  den Differentialquotienten  $f'$  ersetzt. Dabei bedeutet  $f$  die Operatorform der Funktion  $f(x)$ .  $f'$  ist der Operator für die erste Ableitung  $f'(x)$  und  $f_0 h^0$  den Anfangswert an der Stelle  $x = 0$ .

Für die zweite Differentiation hat man entsprechend

$$(8) \quad s^2 f = f'' + f'_0 h^0 + s f_0 h^0.$$

$f'_0$  und  $s f_0$  bedeuten Anfangswerte an der Stelle  $x = 0$ . Ganz allgemein ist:

$$(9) \quad s^n f = f^{(n)} + f_0^{(n-1)} + s f_0^{(n-2)} + \dots + s^{n-1} f_0 h^0$$

Dieser Kalkül rechtfertigt in einem gewissen Sinne den *Heaviside-Kalkül* um die Jahrhundertwende. Jene Beziehungen lauten, beispielsweise für die zweite Differentiation:

$$D^2 f(x) = f''(x)$$

Hier bedeutet  $D$  den Differentialoperator im Sinne von Heaviside. Man hat zwar die Anfangswerte vergessen, aber die damalige Operatorenrechnung hat für die rasche Entwicklung der Elektrotechnik sehr viel beigetragen.

Die diskreten Funktionen haben analoge Beziehungen, siehe auch [8]. Definiert man die erste Differenz mit

$$(10) \quad \Delta f = f_{n+1} - f_n$$

und die zweite mit

$$(11) \quad \Delta^2 f = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n,$$

dann hat man für die diskreten Verteilungen die Operatoren

$$(12), (13) \quad \{f_{n+1}\} = \frac{f - f_0 h^0}{h} \text{ bzw. } \{f_n\} = f$$

und Gl. (10) lautet jetzt

$$(14) \quad (1 - h)f = \{\Delta f\} h + f_0 h^0$$

Der Differenzenoperator heisst  $(1 - h)$ , der Anfangswert ist  $f_0$  an der Stelle  $n = 0$ .

Für die zweite Differenz folgt aus (11)

$$(15) \quad (1 - h)^2 f = \{\Delta^2 f\} h^2 + \Delta f_0 h + (1 - h) f_0 h^0$$

mit den Anfangswerten  $\Delta f_0 = f_1 - f_0$  an der Stelle  $n = 1$  und  $f_0$  an der Stelle  $n = 0$ .

Ganz allgemein ist:

$$(16) \quad (1-h)^n f = \{\Delta^n f\} h^n + \Delta^{n-1} f_0 h^{n-1} + \dots + (1-h)^{n-1} \Delta f_0 h^0$$

Die Analogie zwischen den Gleichungen (7), (8), (9) und (14), (15), (16) ist offensichtlich. Im Bild 4 ist eine mechanische Deutung der Differenz- und Differentialoperatoren gegeben. Bild 4a zeigt die erste Differenz als ein einfaches Drehmoment eines fiktiven Kräftepaars  $f$ . Wird der Gitterabstand unendlich klein, dann geht  $(1-h)$  in  $s$  über. Bild 4b gibt die zweite Differenz als Doppelmoment wieder und Bild 4c zeigt das Doppelmoment  $M_0 = 1$  an der Stelle  $x = 0$ , wenn man die zweite Differenz durch den zweiten Differentialoperator  $s^2$  ersetzt.

## 2.2 Beispiele zur Ermittlung der Operatoren

### 2.2.1 Konstante diskrete Funktion $\alpha$

$$\alpha \{1\} = \alpha (1 + h + h^2 + h^3 + \dots) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} h^n$$

Sie kann gemäss Gl. (14) in eine geschlossene Formel gebracht werden:

$$(1-h) \alpha \{1\} = 0 + \alpha h^0,$$

oder

$$(17) \quad \{\alpha\} = \frac{\alpha}{1-h} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} h^n$$

Diese Beziehung hätte man auch aus der Eigenschaft der geometrischen Reihe ohne weiteres erhalten können.

2.2.1a Ist die konstante Funktion im stetigen Bereich gegeben, dann hat man aus (7)

$$s \{\alpha\} = 0 + \alpha h^0$$

oder

$$(17a) \quad \{\alpha\} = \frac{\alpha}{s}$$

Beide Formen (17) und (17a) sind typisch für die Symbolik dieser Rechnung. Die inverse Form des Differenzenoperators  $1/(1-h)$  bedeutet Summieren und die Reziproke von  $s$ , das heisst  $1/s$ , heisst Integrieren. Im Falle der Gl. (17) bzw. (17a) besagt die Formel: Summiere bzw. Integriere den Anfangswert  $\alpha h^0$ .

### 2.2.2 Diskrete trigonometrische Funktion $\sin(\alpha n)$

Aus Gl. (15) folgt

$$(1-h)^2 \{\sin(\alpha n)\} = \{\sin \alpha(n+2) - 2 \sin \alpha(n+1) + \sin \alpha n\} h^2 + h \sin \alpha$$

Mit

$$\sin \alpha(n+2) + \sin \alpha n = 2 \sin \alpha(n+1) \cos \alpha$$

und

$$\{\sin \alpha(n+1)\} = \frac{\sin \alpha n}{h}$$

folgt

$$(18) \quad \{\sin \alpha n\} = \frac{h \sin \alpha}{1 - 2h \cos \alpha + h^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha n) h^n$$

Den Beweis, dass diese Formel stimmt, erhält man aus der Division der beiden Reihen  $h \sin \alpha$  und  $1 - 2h \cos \alpha + h^2$ .

2.2.2a Die kontinuierliche trigonometrische Funktion  $\sin(\alpha x)$  wird durch Gl. (8) in Operatorform gebracht:

$$s^2 \{\sin(\alpha x)\} = \{-\alpha^2 \sin(\alpha x)\} + \alpha h^0$$

oder

$$(18a) \quad \{\sin(\alpha x)\} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

Dabei bedeuten  $\alpha^2$  im Nenner und  $\alpha$  im Zähler Zahlenoperatoren, das heisst Einzelwerte an der Stelle  $x = 0$ .

### 2.2.3 Diskrete hyperbolische Funktion $\text{Sin}(\alpha n)$

Man kann wieder gemäss Gl. (15) nachweisen, dass

$$(19) \quad \{\text{Sin}(\alpha n)\} = \frac{h \text{Sin} \alpha}{1 - 2h \cos \alpha + h^2}$$

Eine Auswahl von Funktionen, deren Operatoren aus den Gleichungen (7) und (8) bzw. (14) und (15) ermittelt sind, werden in Tabelle 1 am Schluss angegeben. Für  $\alpha = 1$  sind einige im Bild 5a aufgetragen.

## 2.3 Integrations- und Summierungsoperator

Die Integration der Funktionen im stetigen Bereich wird durch den Operator

$$(20) \quad 1/s$$

definiert:

$$(21) \quad \frac{1}{s} f = \left\{ \int_0^x f(\xi) d\xi \right\}$$

Mit  $f = h^0 = 1$  geht Gl. (21) in die Gl. (20) über. Diese Funktion ist die Konstante  $\{1\}$  im ganzen stetigen Bereich, siehe Bild 5a. Gl. (21) ist ein Sonderfall der Faltung (4a).

Jede diskrete Funktion  $f(n)$  mit dem Summierungsoperator

$$(20a) \quad \frac{1}{1-h}$$

multipliziert, bedeutet Summieren:

$$(22) \quad \frac{f}{1-h} = f_0 + (f_0 + f_1)h + (f_0 + f_1 + f_2)h^2 + \dots = c = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n$$

Dies ist ein Sonderfall der Faltung (4). Gl. (20a) bedeutet den konstanten Wert  $\{1\}$  an den diskreten Stellen 0, 1, 2, usw.

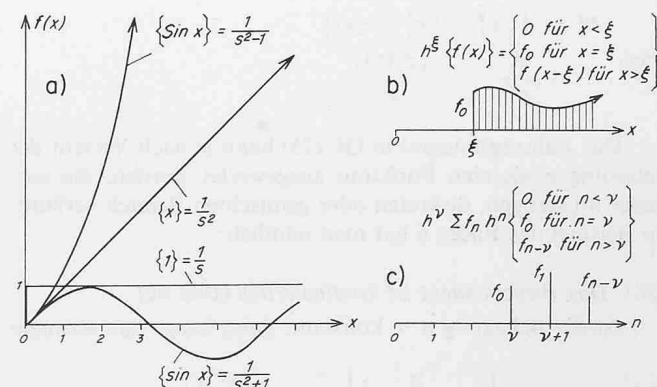


Bild 5. Integration der Einzellast  $\alpha h^0$

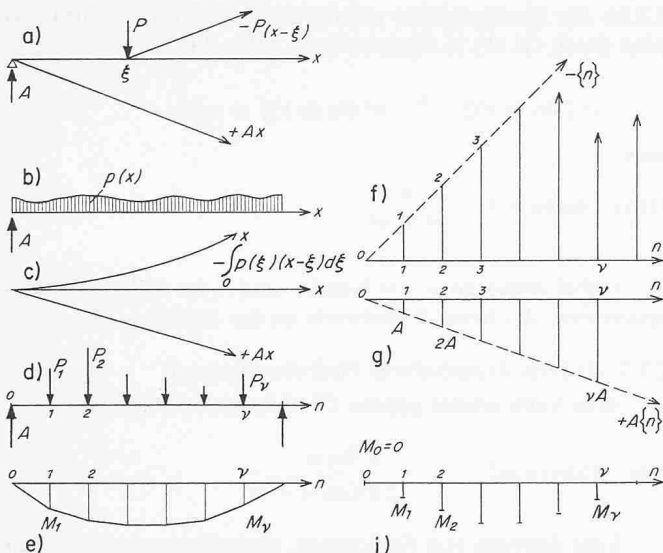


Bild 6. Biegemomente als kontinuierliche und diskrete Funktionen

## 2.4 Anwendungen

Die Ermittlung der Balkenmomente soll als Beispiel für die Anwendung der Operatorenrechnung dienen. Dabei werden Funktionen im diskreten und im kontinuierlichen Bereich verwendet.

Das Biegemoment  $M(x)$  kann unmittelbar als Integralgleichung geschrieben werden. Das Moment im Bild 6a infolge der beiden Einzelkräfte  $A$  und  $P$  wird wie gewöhnlich

$$(23) \quad M(x) = A x - P(x - \xi)$$

geschrieben.

In Operatoren hat man jedoch die Beziehung

$$(24) \quad M = A h^0 \{x\} - P h^\xi \{x\}$$

Beachten muss man dabei die grosse Bedeutung des Verschiebungsoperators  $h$  mit der Eigenschaft, die im Bild 5b für den stetigen und im Bild 5c im diskreten Bereich gezeigt ist. In Gl. (24) ist durch die Multiplikation von  $h^\xi \{x\}$  die Funktion  $f(x) = x$  um die Strecke  $\xi$  verschoben, siehe Gl. (23). In der Matrizenrechnung wird diese Übertragung mühsam mit Hilfe der Transfer- oder Übertragungsmatrize erreicht.

Für eine Belastung im stetigen Bereich, Bilder 6b und 6c, geht das letzte Glied der Gl. (23) in ein Integral über:

$$(25) \quad M(x) = A x - \int_0^x (x - \xi) p(\xi) d\xi$$

und als Operatorgleichung, siehe auch Gl. (4a),

$$(25a) \quad M = A \{x\} - \{x\} \{p(x)\} = \frac{A}{s^2} - \frac{\{p(x)\}}{s^2}$$

Das Faltungsintegral in Gl. (25) kann je nach Verlauf der Belastung  $p$  als eine Funktion ausgewertet werden, die entweder im stetigen, diskreten oder gemischten Bereich verläuft. Im Beispiel des Bildes 6 hat man nämlich:

### 2.4.1 Das Biegemoment ist kontinuierlich (Bild 6c)

Ist die Belastung  $p = \text{konstant}$ , dann lautet das Moment

$$(26) \quad M = A \frac{1}{s^2} - \frac{p}{s^3} = \left\{ A x - p \frac{x^2}{2} \right\}$$

2.4.2 Ist die Belastung  $p$  diskret (Bild 6d), dann hat man

$$(27) \quad M = \frac{A h^0}{s^2} - \frac{\{P_n\}}{s^2} = \frac{1}{s^2} [A h^0 - (P_1 h + P_2 h^2 + \dots)]$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bedeutet eine zweifache Integration der Einzellasten, die natürlich zum Polygonzug führt.

2.4.3 Die gesuchte Funktion  $M(x)$  wird als diskreter Verlauf  $M(n)$  ermittelt (Bild 6i).

Gl. (27) stellt eine Funktion im diskreten Bereich dar, wenn für die kontinuierliche Funktion

$$\{x\} = \frac{1}{s^2}$$

die diskrete Verteilung, siehe Nr. 4 der Tabelle 1,

$$\{n\} = \frac{h}{(1-h)^2}$$

und die diskrete Belastung  $P(n)$  eingeführt wird. Die Lösung lautet:

$$(28) \quad \{M(n)\} = A \{n\} - \{n\} \{P_n\} = \frac{A h}{(1-h)^2} - \frac{h \sum P_n h^n}{(1-h)^2}$$

Den ersten Teil der rechten Seite zeigt Bild 6g bzw. Bild 6f. Unter Beachtung der Regel (5a) hat man:

$$\begin{aligned} M_1 &= A \\ M_2 &= 2A - P_1 \\ M_3 &= 3A - (2P_1 + P_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(28a) \quad M_v = v A - P_1(v-1) + P_2(v-2) + \dots + P_{v-1}$$

## 3. Lösung von Differentialgleichungen der Balkenbiegung

### 3.1 Die Operatorform der Balkenbiegung

Die massgebenden Gleichungen lauten:

$$(29) \quad M''(x) = -p(x)$$

$$(30) \quad y''(x) = -\frac{M(x)}{EJ(x)}$$

oder zusammengefasst

$$(31) \quad [EJ(x) y(x)']' = p(x)$$

Die Lösungen von (29) und (30) können als Integralgleichung (25) geschrieben werden, wenn man die Anfangswerte  $M_0$  und  $M'_0$  bzw.  $y_0$  und  $y'_0$  berücksichtigt;

$$(32) \quad M(x) = M_0 + M'_0 x - \int_0^x (x - \xi) p(\xi) d\xi$$

bzw.

$$(33) \quad y(x) = y_0 + y'_0 x - \int_0^x (x - \xi) \frac{M(\xi)}{EJ(\xi)} d\xi$$

Algebraisch sehr übersichtlich ist ihre Operatorform, siehe auch (4a) und (8),

$$(29a) \quad s^2 M = -\{p(x)\} + M'_0 h^0 + s M_0 h^0$$

$$(30a) \quad s^2 y = - \left\{ \frac{M(x)}{EJ(x)} \right\} + y'_0 h^0 + s y_0 h^0$$

$$(32a) \quad M = \frac{M_0 h^0}{s} + \frac{M'_0 h^0}{s^2} - \frac{1}{s^2} \{ p(x) \}$$

$$(33a) \quad y = \frac{y_0 h^0}{s} + \frac{y'_0 h^0}{s^2} - \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{M(x)}{EJ(x)} \right\}$$

Kalkülmässig sind das die Spannungs- und Verformungsfunktionen der Balkenbiegung in neuer Form. In Operator-schreibweise ist die Identität zwischen Differential- und Integralgleichungen (29a), (30a), (32a) und (33a) offensichtlich.

### 3.2 Durchlaufträger mit konstanter Biegesteifigkeit $EJ$ und mit gleichen Spannweiten

Man braucht die Einteilung der Tragsysteme in statisch bestimmte und statisch unbestimmte nicht mehr, wenn die Durchbiegung des Tragsystems berechnet wird. Das Tragwerk gemäss Bild 7 wird durch die Differentialgleichung (30) oder Integralgleichung (33) gelöst. Ihre gemeinsame Operatorgleichung (33a) lautet mit  $y_0 = 0$

$$y = \frac{1}{s^2} \left[ y'_0 h^0 - \left\{ \frac{M_F(x) + M_{St}(x)}{EJ} \right\} \right] = \{ x \} \left\{ y'_0 h^0 - \frac{M_F(x) + M_{St}(x)}{EJ} \right\}$$

oder in üblicher Schreibweise

$$y(x) = y'_0 x - \int_0^x (x - \xi) \frac{M_F(\xi) + M_{St}(\xi)}{EJ} d\xi$$

$M(x)$  ist in den beiden Anteilen  $M_F(x)$  und  $M_{St}(x)$  zerlegt, siehe Bild 7. Will man die Werte nur an den Stützstellen  $n = 0, 1, 2, \dots$  ermitteln, so muss das obige Produkt bzw. Integral für den diskreten Bereich berechnet werden, indem die reduzierte Belastung  $M(x)/EJ$  durch Knotenlasten  $K_n$  ersetzt wird. Man erhält die Bestimmungsgleichung aus der Bedingung, dass die Biegeordinaten an den Stützen  $n$  verschwinden muss:

$$(34) \quad y_n = 0 = \{ n \} \left[ y'_0 h^0 - K_n \left( \frac{M_F + M_{St}}{EJ} \right) \right]$$

Abgesehen vom trivialen Fall  $n = 0$ , verschwindet die eckige Klammer für  $n \neq 0$ , das heisst

$$(35) \quad K_{n+1} \left( \frac{M_{St}}{EJ} \right) + K_{n+1} \left( \frac{M_F}{EJ} \right) = 0$$

Diese Aussage ist auf anderem Wege mehrmals bewiesen. So bedeutet sie nach *Mohr* Gleichheit der Drehwinkel links und rechts des Auflagers ( $n+1$ ). Infolge der Analogie zwischen Moment und Durchbiegung ist die Knotenlast  $K_{n+1}$  die Auflagerkraft der reduzierten Belastung  $M/EJ$ , die identisch mit dem Drehwinkel ist.

Die Stützmomente  $M_n$  sind zwar noch unbestimmt, aber ihre trapezförmige Verteilung ist bekannt. Nach der Trapezregel hat man

$$(36) \quad K_{n+1} \left( \frac{M_{St}}{EJ} \right) = \frac{l}{6EJ} [M_n + 4M_{n+1} + M_{n+2}]$$

Die Knotenlasten des bekannten Feldmomentes sind die üblichen Belastungsglieder, wenn bei jenen links mit rechts vertauscht wird:

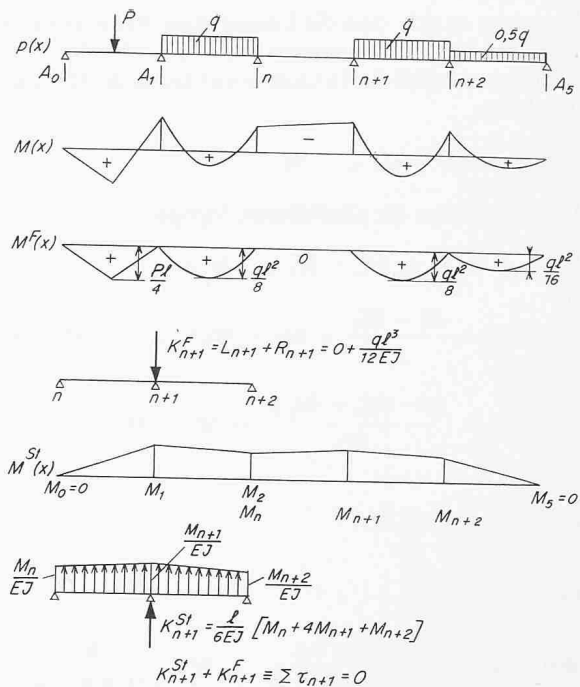


Bild 7. Durchlaufträger-Berechnung durch diskrete Verteilungsfunktionen; Summe der Knotenlasten gleich Null ist identisch mit Summe der Tangendrehwinkel  $\tau$  gleich Null

$$(37) \quad K_{n+1} \left( \frac{M_F}{EJ} \right) = L_{n+1} + R_{n+1}$$

Gleichung (35) ergibt nun die übliche Dreimomentengleichung

$$(38) \quad M_n + 4M_{n+1} + M_{n+2} = - \frac{6EJ}{l} \left[ K_{n+1} \left( \frac{M_F}{EJ} \right) \right] = -k_{n+1}$$

Gemäss Bild 7 lauten die Lastglieder:

$$K \left( \frac{M_F}{EJ} \right) = K_0 + K_1 h + K_2 h^2 + \dots$$

Mit

$$K_0 = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

$$K_1 = Pl^2/16EJ + q \frac{l^3}{24EJ} = L_1 + R_1$$

$$K_2 = q \frac{l^3}{24EJ} = L_2$$

$$K_3 = q \frac{l^3}{24EJ} = R_3$$

$$K_4 = q \frac{l^3}{24EJ} + q \frac{l^3}{48EJ} = L_4 + R_4$$

Für die  $6EJ/l$ -fachen Lastglieder hat man die Reihe

$$k = k_0 + k_1 h + k_2 h^2 + \dots$$

$$(39) \quad k_0 = \frac{3}{8} Pl; \quad k_1 = \frac{3}{8} Pl + q \frac{l^2}{4}; \quad k_2 = q \frac{l^2}{4};$$

$$k_3 = q \frac{l^2}{4}; \quad k_4 = q \frac{l^2}{4} + q \frac{l^2}{8} = \frac{3}{8} q l^2;$$

$$k_5 = \frac{1}{8} q l^2.$$



Nun zeigt es sich, dass die Lösung einer Rekursionsformel mit Hilfe des Verschiebungsoperators  $h$  sehr übersichtlich und geschlossen möglich ist. In Operatoren lautet die Dreimomentengleichung

$$(40) \quad M_n + 4 M_{n+1} + M_{n+2} = -k_{n+1}$$

Dabei bedeuten die abzählbaren Mengen

$$\{M_n\} = M = M_0 + M_1 h + M_2 h^2 + \dots$$

$$\{M_{n+1}\} = \frac{M - M_0}{h} = M_1 + M_2 h + \dots + M_{n+1} h^n + \dots$$

$$\{M_{n+2}\} = \frac{M - M_0 - M_1 h}{h^2} = M_2 + M_3 h + \dots + M_{n+2} h^n + \dots$$

$$\{k_{n+1}\} = \frac{k - k_0}{h}$$

Es folgt aus (40)

$$(40a) \quad M = M_0 \frac{1 + 4h}{1 + 4h + h^2} + M_1 \frac{h}{1 + 4h + h^2} - (k - k_0) \frac{h}{1 + 4h + h^2}$$

Mit den Anfangswerten  $M_0 = 0$  und  $M_1$  als Parameter, den man aus der Endbedingung  $M_v = 0$  ermitteln kann, bedeutet die Gl. (40a) die geschlossene Lösung der Dreimomentengleichung für die diskrete Verteilung der Stützmomente  $M_{st}$  an den Stellen  $n = 1, 2, \dots$

Die Grundlösung der Operatorgleichung (40a) lautet, siehe auch Nr. 3 der Tabelle,

$$(41) \quad \frac{h}{1 + 4h + h^2} = \frac{h}{1 + 2h \cos \alpha + h^2} = U = \{(-1)^{n-1} \sin(\alpha n) / \sin \alpha\}$$

Sie ist eine alternierende diskrete hyperbolische Sinusfunktion. Mit  $\cos \alpha = 2$  erhält man

$$(41a) \quad U_1 = 1; U_2 = -4; U_3 = 15; U_4 = -56; U_5 = 209 \text{ usw.}$$

die sogenannten *Tschebischeffschen* Polynome. Gl. (40a) lautet

$$(42) \quad M = M_1 U - (k - k_0) U = M_1 U - Y$$

Mit dem allgemeinen Glied

$$(42a) \quad M_n = M_1 U_n - Y_n$$

Es bedeutet:

$$(k - k_0) = k_1 h + k_2 h^2 + \dots, \text{ siehe Gl. (39),} \\ U = U_1 h + U_2 h^2 + \dots, \text{ siehe Gl. (41a)}$$

$$(43) \quad Y = (k - k_0) U = (k_1 h + k_2 h^2 + \dots)(U_1 h + U_2 h^2 + \dots) = h^2(k_1 U_1) + h^3(k_1 U_2 + k_2 U_1) + \dots$$

Aus der Endbedingung

$$M_v = M_5 = 0$$

folgt die Bestimmungsgleichung für  $M_1$

$$(44) \quad M_1 = \frac{Y_5}{U_5}$$

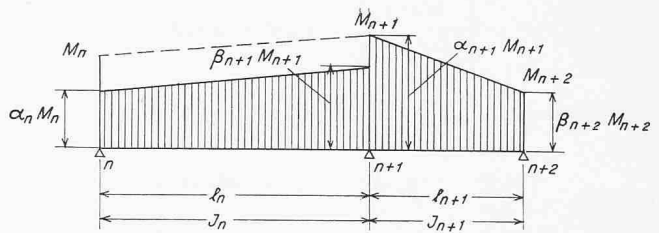


Bild 8. Durchlaufträger mit veränderlicher Spannweite und Biegefestigkeit

Gemäss Gl. (43) hat man für

$$Y_5 = k_1 U_4 + k_2 U_3 + k_3 U_2 + k_4 U_1$$

Die Unbekannte  $M_1$  erhält man aus

$$M_1 = \frac{Y_5}{U_5} = \frac{1}{209} \left[ -56 \left( \frac{3}{8} Pl + q \frac{l^2}{4} \right) + 15 \left( q \frac{l^2}{4} \right) - 4 \left( q \frac{l^2}{4} \right) + \left( \frac{3}{8} q l^2 \right) \right] \\ = -\frac{21}{209} Pl - \frac{q l^2}{4} \frac{56 - 15 + 4 - 1,5}{209} \\ = -0,10048 Pl - 0,05203 q l^2$$

Aus Gl. (42a) folgt mit  $Y_2 = k_1 U_1$

$$M_2 = M_1 U_2 - Y_2 = -4 M_1 - k_1 = 0,40192 Pl + 0,20812 q l^2 - 0,375 Pl - \frac{q l^2}{4} = 0,02692 Pl - 0,04188 q l^2$$

usw.

### 3.3 Durchlaufträger mit feldweise veränderlicher Steifigkeit und ungleichen Spannweiten

Die massgebende Differenzengleichung lautet:

$$(45) \quad \alpha_n M_n + 2(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) M_{n+1} + \beta_{n+2} M_{n+2} = -\beta_{n+1} k_{n+1}^L - \alpha_{n+1} k_{n+1}^R$$

Hierbei bedeuten die Koeffizienten  $\alpha$  (rechts) und  $\beta$  (links) Abminderungsfaktoren der Stützmomente, Bild 8,

$$\alpha_n = \frac{l_n J_c}{l_c J_{n+1}^r} \quad \beta_{n+1} = \frac{l_n J_c}{l_c J_{n+1}^l} \\ \alpha_{n+1} = \frac{l_{n+1} J_c}{l_c J_{n+2}^r} \quad \beta_{n+2} = \frac{l_{n+1} J_c}{l_c J_{n+2}^l}$$

$l_c$  und  $J_c$  sind Bezugswerte für Spannweite und Trägheitsmoment.

Eine Operatorpotenzenreihe mit veränderlichen Koeffizienten

$$\{\alpha_n M_n\} = \sum_0^\infty \alpha_n M_n h^n = [\alpha] M$$

kann man als einfaches Produkt kennzeichnen:

$$[\alpha] M = \alpha_0 M_0 h^0 + \alpha_1 M_1 h + \alpha_2 M_2 h^2 + \dots$$

Die Operatorform der Gl. (45) lautet, wenn  $M_1 = 0$

$$(46) \quad M = \frac{\beta_1 M_1 h}{[\beta] + 2h[\alpha + \beta] + [\alpha]h^2} - h \frac{[\beta]k^L + [\alpha]k^R - \alpha_0 k^R_0}{[\beta] + 2h[\alpha + \beta] + [\alpha]h^2}$$

Ein Zahlenbeispiel ist in [8] angegeben. Zur Abkürzung gilt nach wie vor

$$M = M_1 U - Y$$

Die Koeffizienten  $U_n$  erhält man aus

$$\{U_n\} = \frac{\beta_1 h}{[\beta] + 2h[\alpha + \beta] + [\alpha]h^2}$$

Unter Beachtung der Eigenschaft des Verschiebungsoperators in Bild 5c werden die Werte  $U_n$  aus der Gleichung durch Koeffizientenvergleich ermittelt:

$$(47) \quad \beta_1 h = \sum_1 U_n \beta_n h^n + 2 \sum_2 U_{n-1} (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) h^n + \sum_3 U_{n-2} \alpha_{n-2} h^n$$

Für  $n = 1$  erhält man

$$\beta_1 = U_1 \beta_1 + 2 U_0 (\alpha_0 + \beta_0)$$

Mit  $U_0 = 0$  ist  $U_1 = 1$ . Für  $n = 2$  ist

$$0 = U_2 \beta_2 + 2 (U_1 \alpha_1 + \beta_0 U_1)$$

oder

$$U_2 = - \frac{2 \alpha_1 + \beta_1}{\beta_2}$$

usw.

Hier ist eine Möglichkeit zur Lösung von nichtlinearen Rekursionsformeln gegeben. Man erhält beispielsweise für die veränderlichen Koeffizienten neue erweiterte *Tschebischeffsche* Polynomwerte  $U$ . Für den Sonderfall  $\alpha = \beta = 1$  hat man wieder die alten Werte gemäss Gl. (41a).

### 3.4 Die Knickung als nichtlineares Spannungsproblem

Der Gleichgewichtswechsel kann vom Augenblick der lawinenartigen Ausbiegung als ein Spannungsproblem betrachtet werden. Für den einfach gelagerten Stab auf zwei Stützen ist gemäss Bild 9

$$(48) \quad M(x) = H y(x)$$

oder

$$(49) \quad M''(x) = H y''(x) = - \frac{H}{EJ} M(x) = - p(x)$$

Die Lösung folgt aus der Integralgleichung

$$(50) \quad M(x) = M'_0 x - H \int_0^x (x - \xi) \frac{M(\xi)}{EJ(\xi)} d\xi$$

Das ist aber die bekannte Gleichung (25), nur steckt die Unbekannte Funktion  $M(x)$  auch unter dem Integral. Ihren Verlauf kann man durch verschiedene Kurven approximieren, siehe [9]. Eine Lösung im diskreten Bereich erhält man, wenn die stetigen Lasten in «massengleiche» Einzellasten verwandelt werden. Sehr anschaulich ist dabei die baustatische Methode, die sich durch die Konstruktion von Haupt- und Nebenträger für die Übertragung von diskreten Knotenlasten ausgezeichnet

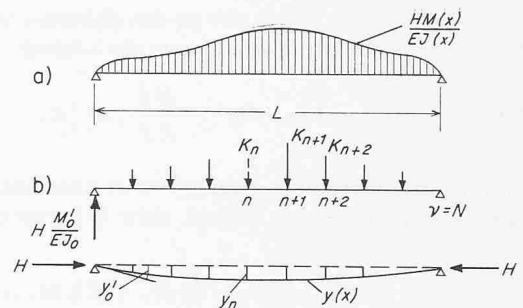


Bild 9. Knickaufgabe als Spannungsproblem

a) kontinuierliche Last  $HM(x)/EJ(x)$

b) diskrete Knotenlast  $K_{n+1} (HM/EJ)$  als Ersatzlast

eignet und die zuerst von *Stüssi* für die numerischen Lösungen angewendet wurde.

Werden die Knotenlasten  $K_n$  aus einfachen Treppenfunktionen berechnet, dann muss der Approximationsbereich, Bild 1, sehr eng gewählt sein, um eine gewisse Genauigkeit zu erzielen. Benützt man den Trapez- oder Parabelverlauf, dann zeigt es sich, dass nur wenige Gitterpunkte nötig sind, um eine ausreichende Genauigkeit zu bekommen. Als Vergleich soll die genaue Lösung für die Eulerlast  $H_k$  dienen. Das gesuchte Moment liegt vorerst im stetigen Bereich.

#### 3.4.1 Genaue Lösung im stetigen Bereich

Die Operatorgleichung von (50) lautet für  $EJ = \text{konstant}$

$$(51) \quad M = M'_0 \frac{1}{s^2} - M \frac{1}{s^2}$$

oder

$$M = M'_0 \frac{1}{s^2 + H/EJ}$$

Nach Tabelle 1, Nr. 2 folgt die Lösung

$$(52) \quad M(x) = M'_0 \sqrt{EJ/H} \sin x \sqrt{EJ/H}$$

Diese Funktion muss an der Stelle  $x = L$  verschwinden. Die Bestimmungsgleichung für  $H_k$  lautet dann

$$L \sqrt{H_k/EJ} = \pi$$

oder

$$(53) \quad H_k = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$$

#### 3.4.2 Numerische Lösungen

Ähnlich dem Beispiel im Bild 6 wird die stetige Last  $M(x)/EJ$  durch Einzellasten  $K_n$  ersetzt. Die Integralgleichung lautet jetzt

$$(54) \quad M(x) = M'_0 x - H \int_0^x (x - \xi) K_{n+1} \left( \frac{M}{EJ} \right) d\xi$$

Mit dem Operator

$$\{K_{n+1}\} = \frac{K - K_0}{h} = K_1 + K_2 h + K_3 h^2 + \dots$$

lautet die Operatorlösung

$$(54a) \quad M = \frac{1}{s^2} M'_0 - \frac{1}{s^2} \frac{H}{EJ} \{K_{n+1}(M)\}$$



Will man die Werte nur an den diskreten Stellen  $l, 2l, \dots, n l, \dots, N l$  bekommen, dann lautet die Lösung

$$(54b) \quad \{M(n)\} = l \{n\} M_0' - \frac{H l}{E J} \{n\} \{K_{n+1}\}$$

Für die Knotenlast  $K_{n+1}$  kann je nach Annahme der Approximation die allgemeine Formel, siehe [9], angegeben werden:

$$(55) \quad K_{n+1} = \frac{l}{a + 2b + c} [a M_n + 2b M_{n+1} + c M_{n+2}]$$

Die Treppenfunktion als Approximation mit  $a = c = 0$  und  $b \neq 0$  ergibt

$$(56) \quad K_{n+1} = l M_{n+1}$$

Die Trapezformel erhält man für  $a = c = 1$  und  $b = 2$

$$(57) \quad K_{n+1} = \frac{l}{6} [M_n + 4 M_{n+1} + M_{n+2}]$$

Die Stüssische Parabelformel erhält man dann aus  $a = c = 1$  und  $b = 5$

$$(58) \quad K_{n+1} = \frac{l}{12} [M_n + 10 M_{n+1} + M_{n+2}]$$

Die Lösung von (54b) ergibt für  $M_0' = M_1/l$ , siehe auch [9],

$$(59) \quad M = \frac{M_1 h}{1 - 2 h \gamma + h^2}$$

mit

$$(60) \quad \gamma = \cos \alpha = \frac{1 - \frac{H l^2 b}{2 E J (a + b)}}{1 + \frac{H l^2 a}{2 E J (a + b)}}$$

Gl. (59) bedeutet nach Nr. 2 in Tabelle 1 die diskrete Funktion

$$(61) \quad M(n) = M_1 \frac{\sin(\alpha n)}{\sin \alpha},$$

wobei  $\alpha$  über  $\cos \alpha$  aus Gl. (60) ermittelt wird. Die Randbedingung  $M(L) = 0 = \sin \alpha N = \sin \pi$  ergibt

$$\alpha = \frac{\pi}{N}$$

und die kritische Last aus Gl. (60)

$$\cos \frac{\pi}{N} = \frac{1 - \frac{H_k^* l^2 b}{2 E J (a + b)}}{1 + \frac{H_k^* l^2 a}{2 E J (a + b)}}$$

oder

$$(62) \quad H_k^* = 2 N^2 (a + b) \frac{1 - \cos \pi/N}{b + a \cos \pi/N} \frac{E J}{L^2}$$

Einfache Differenzen (Treppenfunktion):  $a = 0$

$$(62a) \quad H_k^* = 2 N^2 (1 - \cos \pi/N) \frac{E J}{L^2}$$

Trapezformel:  $a = 1; b = 2$

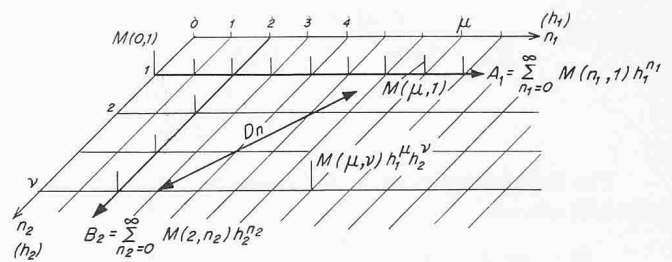


Bild 10. Diskrete Flächenfunktion

$$\text{Summieren nach Zeilen } A_\nu: M = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu h_2^\nu$$

$$\text{Summieren nach Spalten } B_\mu: M = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu h_1^\mu$$

$$\text{Summieren nach Diagonalen } D_n: M = \sum_{n=0}^{\infty} D_n$$

$$\text{Summieren nach Matrizen: } M = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} M(n_1, n_2) h_1^{n_1} h_2^{n_2}$$

$$(62b) \quad H_k^* = 6 N^2 \frac{1 - \cos \pi/N}{2 + \cos \pi/N} \frac{E J}{L^2}$$

Parabelformel:  $a = 1; b = 5$

$$(62c) \quad H_k^* = 12 N^2 \frac{1 - \cos \pi/N}{5 + \cos \pi/N} \frac{E J}{L^2}$$

Der Genauigkeitsgrad wird an die Zahl  $\pi^2 = 9,87$  gemessen.

Für  $N = 10$  ergibt die Methode der einfachen Differenzen (62a) den Koeffizienten 9,78. Schon bei  $N = 4$  ergibt die Parabelformel die sehr gute Approximation 9,85. Auch mit  $N = 3$  hat man die gute Annäherung von 9,82.

#### 4. Flächenfunktionen

Als Differentialoperatoren werden entsprechend  $s_1$  und  $s_2$  und als Verschiebungsoperatoren  $h_1$  und  $h_2$  für die stetigen Bereiche  $x_1$  und  $x_2$  sowie für die diskreten Bereiche  $n_1$  und  $n_2$  eingesetzt. Die konstante Funktion  $p_0$  lautet als Operator im kontinuierlichen Bereich  $0 \leq x_1 < \infty; 0 \leq x_2 < \infty$ :

$$(63) \quad \{p_0\} = p_0 \{1\} = \frac{p_0}{s_1 s_2}$$

und im diskreten Bereich

$$0 \leq n_1 < \infty; 0 \leq n_2 < \infty$$

$$(64) \quad \{p_0\} = p_0 \{1\} = \frac{p_0}{(1 - h_1)(1 - h_2)} = p_0 \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} h_1^{n_1} h_2^{n_2}$$

Hier hat man für die diskrete Verteilung eine unendliche Doppelreihe, die auf verschiedenem Wege summiert (natürlich nur symbolisch) werden kann. Im Bild 10 ist schematisch die Summation nach Zeilen, Spalten, Diagonalen und quadratischen Matrizen für eine diskrete Verteilung der Funktion  $M(n_1, n_2)$  angegeben:

$$(65) \quad M = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} M(n_1, n_2) h_1^{n_1} h_2^{n_2}$$

$$(66) \quad M = \sum_{n_1} \left[ \sum_{n_2} M(n_1, n_2) h_2^{n_2} \right] h_1^{n_1}$$

$$(67) \quad M = \sum_{n_2} \left[ \sum_{n_1} M(n_1, n_2) h_1^{n_1} \right] h_2^{n_2}$$

Eine wichtige Rekursionsformel für die Knotenlast der parabolischen Approximation, siehe Stüssi [3] und Dubas [21], lautet:

Tabelle 1. Operatoren für diskrete und kontinuierliche Funktionen

| Nr. | Diskrete Funktionen  | Kontinuierliche Funktionen                                 |
|-----|--|--|
| 1   | $\{\alpha\} = \alpha \sum_0^{\infty} h^n = \frac{\alpha}{1-h}$                                 | $\{\alpha\} = \text{konst.} = \frac{\alpha}{s}$            |
| 2   | $\{\sin \alpha n\} = \frac{h \sin \alpha}{1 - 2 h \cos \alpha + h^2}$                          | $\{\sin \alpha x\} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$        |
| 3   | $\{\text{Sin } \alpha n\} = \frac{h \text{Sin } \alpha}{1 - 2 h \text{Cos } \alpha + h^2}$     | $\{\text{Sin } \alpha x\} = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$ |
| 4   | $\{n\} = \sum_1^{\infty} n h^n = \frac{h}{(1-h)^2}$  | $\{x\} = \frac{1}{s^2}$                                    |
| 5   | $\{\cos \alpha n\} = \frac{1 - h \cos \alpha}{1 - 2 h \cos \alpha + h^2}$                      | $\{\cos \alpha x\} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$             |
| 6   | $\{\text{Cos } \alpha n\} = \frac{1 - h \text{Cos } \alpha}{1 - 2 h \text{Cos } \alpha + h^2}$ | $\{\text{Cos } \alpha x\} = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}$      |
| 7   | $\frac{1}{2} \{n^2\} = \frac{h(1+h)}{2(1-h)^3}$  | $\frac{1}{2} \{x^2\} = \frac{1}{s^3}$                      |
| 8   | $\frac{1}{6} \{n^3\} = \frac{(1+4h+h^2)h}{6(1-h)^4}$   | $\frac{1}{6} \{x^3\} = \frac{1}{s^4}$                      |
| 9   | $\frac{1}{24} \{n^4\} = \frac{(1+11h+11h^2+h^3)h}{24(1-h)^5}$                                  | $\frac{1}{24} \{x^4\} = \frac{1}{s^5}$                     |
| 10  | $\{e^{\alpha n}\} = \frac{1}{1 - e^{\alpha} h}$  | $\{e^{\alpha x}\} = \frac{1}{s - \alpha}$                  |

$$(68) \quad \{K[(n_1+1), (n_2+1)]\} = \frac{l_1 l_2}{144} \{M[n_1, n_2] + \\ + 10 M[(n_1+1), n_2] + M[(n_1+2), n_2] + \\ + 10 [M[n_1, (n_2+1)] + 10 M[(n_1+1), (n_2+1)] + \\ + M[(n_1+2), (n_2+1)] + M[n_1, (n_2+2)] + \\ + 10 M[(n_1+1), (n_2+2)] + M[(n_1+2), (n_2+2)]\}$$

Mit der Abkürzung nach Gl. (65) und wegen der Übersicht mit den Anfangswerten

$$M(0,0) = M(n_1, 0) = M(0, n_2) = 0; \\ M(1, n_2) \neq 0 \text{ und } M(n_1, 1) \neq 0$$

folgt für die allgemeine Formel (68) die Operatorschreibweise

$$(69) \quad \frac{K - K(0, n_2) - K(n_1, 0)}{h_1 h_2} = \\ = \frac{l_1 l_2}{144} \left[ \frac{M}{h_1^2 h_2^2} (1 + 10 h_1 + h_1^2) (1 + 10 h_2 + h_2^2) - \right. \\ \left. - \frac{M(1, n_2)}{h_1 h_2^2} (1 + 10 h_2 + h_2^2) - \right. \\ \left. - \frac{M(n_1, 1)}{h_1^2 h_2} (1 + 10 h_1 + h_1^2) \right]$$

Die Potenzreihen der diskreten Funktionen können sehr einfach die vektoriellen Produkte ausdrücken. Unbekannte Funktionen werden analog den Gleichungen (5, 5a und 6) durch Koeffizientenvergleich ermittelt. Der Ausdruck für das Produkt  $fg$  lautet:

$$(70) \quad fg = c = \sum c(n_1, n_2) h_1^{n_1} h_2^{n_2} \\ \text{mit dem allgemeinen Glied}$$

$$(71) \quad c(n_1, n_2) = f(0,0)g(n_1, n_2) + f(0,1)g(n_1, n_2-1) + \dots + \\ + f(1, n_2-2)g(n_1-1, 2) + \dots + f(n_1, n_2)g(0,0)$$

Auch die Erweiterung der diskreten Mengen im Raum ist ohne weiteres möglich; so lautet die konstante Funktion im Raum

$$\{p_0\} = \frac{p_0}{(1-h_1)(1-h_2)(1-h_3)}$$

Eine  $\mu$ - und  $\nu$ -fache Summierung in den Gitterrichtungen  $n_1$  und  $n_2$  wird durch die Inversen der Differenzenoperatoren  $(1-h_1)$  und  $(1-h_2)$  gegeben, [22],

$$(72) \quad \frac{1}{(1-h_1)^\mu (1-h_2)^\nu} = \\ = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \binom{n_1+\mu-1}{\mu-1} \binom{n_2+\nu-1}{\nu-1} h_1^{n_1} h_2^{n_2}$$

mit

$$\binom{n_1+\mu-1}{\mu-1} = \frac{(n_1+1)(n_1+2)\dots(n_1+\mu-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1)}$$

Für das Kontinuum gilt die Formel

$$(73) \quad \frac{1}{s^\mu s^\nu} = \left\{ \int_0^{x_1} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_1} d\xi_1 \right\} \left\{ \int_0^{x_2} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_2} d\xi_2 \right\} \\ \left| \longleftarrow \mu\text{-fach} \longrightarrow \right| \left| \longleftarrow \nu\text{-fach} \longrightarrow \right|$$

Wir haben versucht mit Hilfe der Mengenlehre die Funktionen im stetigen und diskreten Bereich neu zu definieren. Dabei ergaben sich interessante symbolische Vereinfachungen, die dazu führen, hochgradig statisch unbestimmte Systeme durch geschlossene Funktionen zu lösen. Auch die Flächen-tragwerke können durch Spannungs- und Verformungs-funktionen sowohl im stetigen als auch im diskreten Bereich gelöst werden.

## Literaturverzeichnis

- [1] Mikusinski, Jan: Operatorenrechnung. Berlin 1957, Deutscher Verlag der Wissenschaft (VEB). Engl. Ausgabe: Operational Calculus. London 1960, Perg. Press.
- [2] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955, J. Springer.
- [3] Stüssi, F.: Entwurf und Berechnung von Stahlbauten. Bd. 1. Grundlagen des Stahlbaues. Berlin 1958, J. Springer, S. 168/226.
- [4] Stüssi, F.: Die verbesserte Seilpolygonmethode zur Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. «Abh. IVBH» 29 (1969) Nr. 2, S. 201/216.
- [5] Falk, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. «Ing. Arch.» 24 (1956) S. 216/232.
- [6] Gurr, S.: Beitrag zur Anwendung des Differenzenverfahrens bei linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben zweiter Ordnung. «Ing. Arch.» 35 (1966) S. 248/261.
- [7] Dimitrov, N.: Operatorenrechnung und ihre Anwendung auf die Baustatik. «Abh. IVBH» 24 (1964) S. 31/60.
- [8] Dimitrov, N.: Operatorenstatik. Fortschr.-Bericht der VDI-Z. Reihe 4, Nr. 4, Düsseldorf 1968.
- [9] Dimitrov, N.: Die baustatische Methode in Operatorenform. Mitt. des Instituts für Stahl- und Leichtmetallbau. Karlsruhe 1969.
- [10] Dimitrov, N.: The Application of the Operational Calculus to Frames. Int. Symp. Univ. of Newcastle upon Tyne 1966.
- [11] Eisenbiegler, G.: Operatorenkalkül zur Berechnung von Stab- und Flächentragwerken. Diss. Univ. Karlsruhe (TH) 1969.
- [12] Butzer, P.L.: Die Anwendung des Operatorenkalküls von Jan Mikusinski auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus. Arch. f. Rat. Mech. and Anal. 2 (1958) Nr. 2, S. 114/120.
- [13] Butzer, P.L.: Singular Integral Equations of Volterra Type and the Finite Part of Divergent Integrals. Arch. f. Rat. Mech. and Anal. 3 (1959) Nr. 3, S. 194/205.
- [14] Butzer, P.L., und H. Schulte: Ein Operatorenkalkül zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzengleichungssysteme von Funktionen diskreter Veränderlicher und seine Anwendungen. Forsch. Bericht des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 1557. Köln und Opladen 1965.
- [15] Schulte, H.: Ein diskreter zweidimensionaler Operatorenkalkül zur Lösung partieller Differenzengleichungen und seine Anwendung bei der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Diss. Aachen 1966.
- [16] Wloka, J.: Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Diss. Heidelberg 1958.
- [17] Erdélyi, A.: Lectures on Mikusinski's Theory of Operational Calculus and generalized Functions. Pasadena 1959; Holt, Rinehart and Wilson, N.Y. 1962.
- [18] Berg, L.: Einführung in die Operatorenrechnung. Berlin 1962, VEB-Verlag.
- [19] Elias, I.: Über eine Operatorenmethode zur Lösung von Differenzengleichungen. Mat. Fys. Casopis. Slovenska Akademia, Bratislava 1958, S. 203/226.
- [20] Fenyő, J.: Eine neue Methode zur Lösung von Differenzengleichungen nebst Anwendungen. «Periodica Politechnica, Budapest» 3 (1959) S. 135/151.
- [21] Dubas, P.: Calcul numérique des plaques et des parois minces. Schweiz. Bauzeitung 79 (1961) Nr. 17, S. 280/288.
- [22] Dimitrov, N. und W. Herberg: Festigkeitslehre. 2. Bd. Sammlung Göschen, Berlin 1971 (Erscheint demnächst).

## Numerische Auswertung von unendlichen alternierenden Lösungsreihen mit schlechter Konvergenz

DK 517.52

Von Dr.-Ing. Günter Eisenbiegler, wissenschaftlichem Assistenten am «Institut für Baustatik und Messtechnik» (Direktor Prof. Dr.-Ing. B. Fritz), Universität Karlsruhe (TH)

### 1. Problemstellung

Bei der Berechnung von Stab- und vor allem von Flächen-tragwerken lassen sich die gesuchten Lösungen oft in der Form von einfachen, unendlichen Reihen darstellen. Konvergieren diese Reihen allerdings nur sehr schleppend, so ist ihre Aufsummierung mühsam und zeitraubend. Selbst mit dem Einsatz von Elektronenrechnern kann vielfach die gewünschte Genauigkeit des Summenwertes nicht erreicht werden, wenn beispielsweise die auftretenden Rundungsfehler die höheren Reihenglieder zu stark verfälschen, oder wenn die Ermittlung einer sehr grossen Anzahl von erforderlichen Gliedern zu aufwendig wird. Im folgenden wird nun für unendliche, alternierende Reihen mit langsamer Konvergenz eine einfache Methode angegeben, die nur wenige Anfangsglieder einer solchen Reihe benötigt, um deren Summenwert mit einer hohen Genauigkeit zu berechnen. Im Bauwesen ist diese Methode bislang wenig bekannt geworden.

### 2. Mathematische Grundlagen

Die beliebige, konvergente Reihe

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_n = V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + V_4 - \dots$$

lässt sich mit Hilfe der Eulerschen Reihentransformation (vgl. [1], [2]) wie folgt umformen:

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_n = \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{4} \Delta V_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 V_0 + \dots + \frac{1}{16} \Delta^3 V_0 + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \Delta^k V_0 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k V_0}{2^{k+1}}$$

Dabei bedeuten allgemein  $\Delta V_n = V_n - V_{n+1}$  die ersten und  $\Delta^k V_n = \Delta^{(k-1)} V_n - \Delta^{(k-1)} V_{n+1}$  die höheren Differenzen der Gliederfolge ( $V_n$ ).

Diese Umformung bewirkt bei schlecht konvergierenden,

alternierenden Reihen eine wesentliche Konvergenzbeschleunigung, und zwar konvergiert die transformierte Reihe umso schneller, je schleppender die Konvergenz der vorgelegten Reihe ist. Für die Abschätzung der Restsumme

$$R_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Delta^k V_0}{2^{k+1}}$$

nach  $p$  Gliedern der Reihe (2) gilt die kurze Beziehung

$$(3) \quad |R_p| < \frac{|\Delta^p V_0|}{2^p},$$

an die jedoch die Bedingung geknüpft ist, dass nicht nur die Glieder  $V_n$  sondern auch die  $p$ -ten Differenzen  $\Delta^p V_n$  eine positive, monotone Nullfolge bilden müssen.

Es ist natürlich ebenso möglich, mit der gezeigten Umformung erst bei einem bestimmten Reihenglied  $V_i$  zu beginnen. Man erhält dann

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_n = V_0 - V_1 + V_2 - V_3 \dots \mp V_{i-1} \pm \frac{1}{2} V_i \pm \frac{1}{4} \Delta V_i \pm \frac{1}{8} \Delta^2 V_i \dots = V_0 - V_1 + V_2 - V_3 \dots \mp V_{i-1} \pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k V_i}{2^{k+1}}.$$

Von dieser Möglichkeit wird man mit Vorteil immer dann Gebrauch machen, wenn die Konvergenzgeschwindigkeit nach einer gewissen Gliederanzahl merklich zurückgeht, oder wenn eine monotone Nullfolge der  $V_n$  überhaupt erst vom  $i$ -ten Gliede an vorhanden ist.

Abschliessend sei vermerkt, dass man in vielen, praktisch wichtigen Fällen auf Reihen folgender Bauart stösst: