

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 89 (1971)  
**Heft:** 1: 1. Sonderheft zum 70. Geburtstag von Prof. Dr. F. Stüssi

**Artikel:** Zum Beulverhalten von Kreiszyinderschalen  
**Autor:** Steinhardt, O. / Schulz, U.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84725>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Prof. Dr. Fritz Stüssi zum 70. Geburtstag

*In dieser Sondernummer der auch ausserhalb der Schweiz von den Ingenieuren sehr geschätzten Schweizerischen Bauzeitung wurde seitens ihrer Herausgeber in dankenswerter Weise einigen von F. Stüssis Fachkollegen und Freunden die Möglichkeit eingeräumt, ihrer Verbundenheit mit dem international bedeutenden wissenschaftlich-technischen Werk des Jubilars und mit seiner wegweisenden Persönlichkeit Ausdruck zu verleihen. Es soll hierbei nicht erneut versucht werden, die wissenschaftlichen Veröffentlichungen F. Stüssis aufzuzählen, das ist in vorbildlicher, umfassender Weise zuletzt in der S.B.Z. 84 (1966), H.1, S.42 und 43; sowie ferner in den IVBH-Abhandlungen, V.26 (1966) Leemann-Verlag, Zürich, S.627-637, geschehen. Auch auf mehrere in Deutschland erschienene ausführliche Würdigungen seiner Persönlichkeit (z.B. «Der Bauingenieur», H. 1 (1966); «Der Stahlbau», H.1 (1961); «Die Bautechnik», H.3 (1966) u.a.m.) mag nur beiläufig hingewiesen sein. Nachfolgend soll in einer Reihe von wissenschaftlichen Beiträgen, zu denen grösstenteils F. Stüssis Wirken Anregung gab, ein dankbarer Gruss zum 3. Januar 1971 zum Ausdruck kommen.*

O. Steinhardt

## Zum Beulverhalten von Kreiszylinderschalen

DK 531.223.001.5

Von Prof. Dr.-Ing. O. Steinhardt und Dr.-Ing. U. Schulz

### 1. Einführung

Das Beulverhalten dünnwandiger Kreiszylinderschalen ist seit langem Gegenstand der Forschung. Besonders in den letzten Jahren ist man wegen der Fortschritte im Leichtbau bemüht, für diese Frage eine zufriedenstellende Antwort zu finden. Die ersten Ansätze zur Lösung des Lastfalls Axialdruck stammen von R. Lorenz (1908) und S. Timoshenko (1910). Sie erhielten unter Verwendung eines eingliedrigen (axialsymmetrischen) Verformungsansatzes für die kritische (klassische) Beulspannung den Wert  $\sigma_{kl} = 0,606 Et/R$  (bei  $\mu = 0,3$ ). Wegen der Diskrepanz zwischen dieser klassischen Beulspannung und den Versuchswerten und wegen der Schwierigkeit, die Störeinflüsse bei der Ermittlung der kritischen Beulspannung  $\sigma_{k,o}$  zu berücksichtigen, haben T. v. Kármán/H. Tsien [8] 1941 die von L. Donnell [3] 1934 aufgestellten Differentialgleichungen grosser Verformungen mittels eines zweigliedrigen Ansatzes gelöst. Sie erhielten Nachbeulkurven, deren absolutes Minimum bei  $\sigma_{k,u}/\sigma_{kl} = 0,32$  lag. Eine scheinbare Bestätigung dieses Wertes – er liegt nur geringfügig unter den meisten Versuchswerten und schien daher zur Bemessung geeignet zu sein – erbrachten die Arbeiten von H. Michielsen [10] 1948 (Variation nach 4 Parametern) und I. Kempner [9] 1954 (Variation nach 5 Parametern). Wird (theoretisch) die Anzahl der Ansatzglieder weiter gesteigert – B. Almroth [1] 1963 zeigt, dass für zum Beispiel 9 Glieder das Nachbeulminimum auf  $\sigma_{k,u}/\sigma_{kl} = 0,108$  abfällt –, so ergibt sich, dass eine Bemessung nach dieser unteren Beulschranke auch aus wirtschaftlichen Gründen nicht mehr sinnvoll erscheint; grundsätzlich neue Überlegungen müssen angestellt werden.

Aus dieser Erkenntnis heraus ist in der vorliegenden Arbeit auf theoretischem und experimentellem Wege – als wesentliche, die obere kritische Beulspannung (als wirkliche Versagensgrenze) beeinflussende Grösse – die örtliche axial-symmetrische planmässige Vorverformung untersucht worden. Zudem können, bis zur endgültigen Klärung weiterer, den Durchschlag begünstigender Faktoren (Eigenspannungen,

Temperatureinflüsse, stossweise Belastung usw.), die Ergebnisse von durchgeführten statistischen Untersuchungen über die Abhängigkeit von tatsächlich kritischer Beulspannung und Geometrieparameter herangezogen werden.

### 2. Bezeichnungen

$a$	Vorbeulparameter
$a_0, a_1, a_2, a_3$	Koeffizienten im Verformungsansatz
$b_1, b_2, \dots b_6$	Koeffizienten im Spannungsansatz
$C_v$	Amplitude der planmässigen Vorbeule
$C'_v$	Abweichung von der planmässigen Vorbeule
$E$	Elastizitätsmodul
$F$	Spannungsfunktion
$g$	$= L/2R$
$L$	Zylinderlänge
$m$	Wellenzahl in Längsrichtung (Halbwellen)
$n$	Wellenzahl in Umfangsrichtung (Vollwellen)
$p$	Längskraftbelastung
$\bar{p}$	$= q R/E t$
$p_k$	kritische Verzweigungslast
$p_{kl}$	klassische Verzweigungslast
$q$	Aussen- (Innen-)druckbelastung
$R$	Zylinderradius
$s$	Ordinate in Zylinderlängsrichtung
$t$	Wanddicke
$w$	radiale Verformung eines Schalenpunktes
$w_v$	Vorverformung
$x$	$= s/R$
$y$	Ordinate in Zylinderumfangsrichtung
$\lambda$	$= \pi m R/L$
$\mu$	Querdehnungszahl
$\nu$	$= n^2/\lambda^2$
$\sigma$	Spannung
$\sigma_k$	kritische Spannung
$\sigma_{kl}$	klassische Beulspannung
$\sigma_{k,o}; \sigma_{k,u}$	obere, untere kritische Beulspannung
$\varphi$	$= y/R$

### 3. Zur Tragfähigkeit von axial und zentrisch belasteten Kreiszylinderschalen

#### 3.1 Elastizitätstheorie und Statistik

Soweit in *unregelmässigen Vorbeulen* der Hauptgrund für die Abminderung der theoretischen Tragfähigkeit von Kreiszylinderschalen gesehen wird, bieten sich Statistik und definiert-vorgebeulte Modelle für die weitere Forschung an. Insbesondere die Statistik wird notwendig, um bei den sehr zahlreich international durchgeführten Versuchen das Konglomerat von Einzeleinflüssen (wie z.B. unregelmässige Verformungen, Eigenspannungen, Temperatureinflüsse, Stosswirkungen usw.) zu erfassen. Es werden daher für die Lastfälle

- a) Zylinderschale unter reiner Längsbelastung
- b) Zylinderschale unter Längsbelastung mit zusätzlichem Innendruck

c) Zylinderschale unter allseitigem Aussendruck sowohl Kurven ermittelt, die dem Verlauf der Versuchsergebnisse am besten entsprechen, als auch Kurven, die Grenzlinien für einen bestimmten Wahrscheinlichkeitsbereich darstellen.

Es muss jedoch im weiteren noch Folgendes beachtet werden: Die frühzeitige Plastizierung und der Randeinspannungseffekt beeinflussen die Höhe der Beullast sehr wesentlich. Um ein Mass für diese Beeinflussung zu erhalten und um bei der statistischen Auswertung die entsprechenden Versuchswerte ausschalten zu können, sind hierzu Kriterien zu ermitteln.

#### 3.2 Das Beulen im plastisch-elastischen Bereich

Ebenso wie bei kürzeren, gedruckten Knickstäben kann auch bei *relativ dickwandigen* Zylinderschalen in einzelnen Bereichen der Schalenwandung noch vor Erreichen der theoretischen Durchschlagslast die Streckgrenze überschritten werden. Die örtlich entstehende Plastizierung liegt dabei entweder im Bereich von Vorverformungen und Inhomogenitäten oder, infolge der behinderten Querdehnung, bei den Schalenrändern. Unter Verwendung der Erkenntnisse von L. v. Tetmajer, F. Engesser und T. v. Kármán soll im Folgenden eine für den hier erörterten Bereich brauchbare Bemessungsformel hergeleitet werden. Die oben erwähnte sogenannte klassische Lösung – man erhält sie auch durch einfache Betrachtung an einem «elastisch gebetteten Stab der Zylindererzeugenden» – kann, ähnlich wie bei I. Geckeler [6], auf den plastisch-elastischen Beulbereich erweitert werden. Führt man nämlich in die Gleichung für den elastisch quergestützten Knickstab

$$P_k = 2 \sqrt{\beta EJ}$$

statt  $E$  den von Kármán hergeleiteten Modul  $K$  ein – in der Bettungsziffer  $\beta = Et/R^2$  wird dabei infolge der geringeren Tangentialspannungen  $E$  belassen –, so ergibt sich unter Berücksichtigung des Querkontraktionsanteils  $1/(1 - \mu^2)$  als kritische Beullast

$$(3.1) \quad P_k = t^2 \frac{\sqrt{EK}}{R \sqrt{3(1 - \mu^2)}}$$

Diese Lösung ist für die praktische Anwendung nicht brauchbar; sie liefert im Vergleich zu Versuchsergebnissen zu hohe Werte. Führt man jedoch zusätzlich (wie bei Tetmajer) für den unelastischen Bereich die aus Versuchsergebnissen ermittelte Gerade  $\sigma_k = \sigma_o - \alpha \lambda$  ein und setzt diese in die Eulerformel für den beidseitig gelenkig gelagerten Knickstab ein, so erhält man den «Beulmodul  $B$ »

$$B = \sigma_k (\sigma_o - \sigma_k)^2 / \alpha^2 \pi^2$$

Dieser Ausdruck, anstelle von  $K$  in Formel (3.1) eingesetzt, liefert zuletzt die kritische Beulspannung

$$(3.2) \quad \sigma_k = 2 R t \pi \left[ \sigma_o + \frac{a^2}{2E} - \sqrt{\left( \sigma_o + \frac{a^2}{2E} \right)^2 - \sigma_o^2} \right]$$

mit  $a = \frac{R \pi \alpha}{t} \sqrt{3(1 - \mu^2)}$

Wird Gleichung (3.2) durch die klassische Beulspannung dividiert, so erhält man den dimensionslosen Beulfaktor

$$(3.3a) \quad \sigma/\sigma_{kl} = R \frac{\sqrt{3(1 - \mu^2)}}{Et} \left[ \sigma_o + \frac{a^2}{2E} - \sqrt{\left( \sigma_o + \frac{a^2}{2E} \right)^2 - \sigma_o^2} \right]$$

Für die hier in Frage kommenden kleineren Radius/Wandstärkenverhältnisse kann man auch vereinfacht schreiben

$$(3.3b) \quad \sigma/\sigma_{kl} = \sigma_o R \sqrt{3(1 - \mu^2)} / Et$$

Zur Ermittlung der in den Gleichungen (3.3a) und (3.3b) auftretenden Faktoren  $\alpha$  und  $\sigma_o$  werden, wie bei Tetmajer, Versuchsergebnisse herangezogen.

Trägt man die im Versuch erhaltenen Beulwerte, getrennt nach Materialgruppen, in Abhängigkeit vom Radius/Wandstärkenverhältnis  $R/t$  auf, so erhält man durch Approximation die entsprechenden Funktionswerte (Bild 1). Zur Bestimmung der Gültigkeitsgrenzen von Gleichung (3.3) sind in Bild 2 die Funktionen für elastisch-plastisches und reinelastisches Beulen zum Schnitt gebracht worden. Die Schnittpunkte und damit die Gültigkeitsgrenze für die jeweilige Materialgruppe sowie die Wahrscheinlichkeit sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

#### 3.3 Der Einfluss der Schalenlänge auf die Höhe der Beullast

In den meisten der bisher erschienenen theoretischen Arbeiten, die das Beulverhalten der axial gedrückten Zylinderschale behandeln, ist eine Schalenlänge ( $L/R > 2$ ) vorausgesetzt worden, die den Einfluss der Randeinspannung weitgehend unwirksam werden lässt. Erst wenn die Zylinderlänge kleiner als die Länge der sich im ungestörten Bereich ausbildenden Beule wird ( $L < l_x$ ), tritt eine Beeinflussung der kritischen Beulspannung durch die Randeinspannung ein. Um ein Mass für diese Beeinflussung zu erhalten, sind die jeweiligen

Tabelle 1. Kennwerte und Gültigkeitsgrenzen für verschiedene Materialien

Materialgruppe	Material	Streckgrenze	Elastizitätsmodul	$\sigma_o$ (kp/cm <sup>2</sup> )	$\alpha$	Gültigkeitsgrenzen bei einer Wahrscheinlichkeit von 50%	
		$\sigma_{0,2}$ (kp/cm <sup>2</sup> )	$E$ (kp/cm <sup>2</sup> )			$R/t$	$R/t$
A	Stahl St 37	2400	$2,1 \cdot 10^6$	2100	0,00368	275	190
B	Stahl St 52 Stahl A 70	3600	$2,1 \cdot 10^6$	3350	0,00185	175	130
C	Cr-Ni Stahl Cr-Mo Stahl	5700	$2,1 \cdot 10^6$	6360	0,00489	110	80
D	Dur-Aluminium	3000	$0,72 \cdot 10^6$	3500	0,0081	75	50

Bild 1. Abhängigkeit der Beulwerte vom Radius/Wandstärkenverhältnis im plastisch-elastischen Bereich

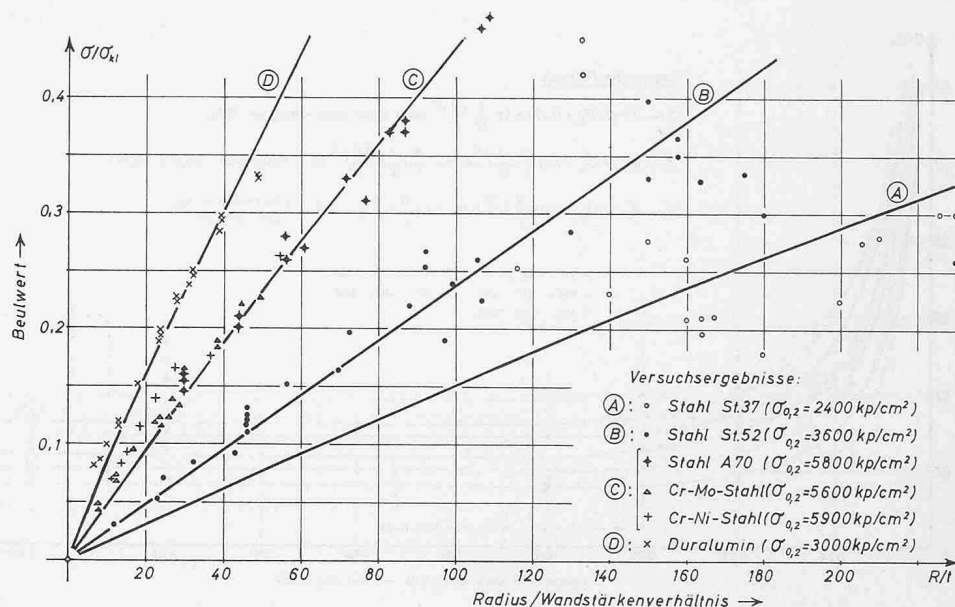
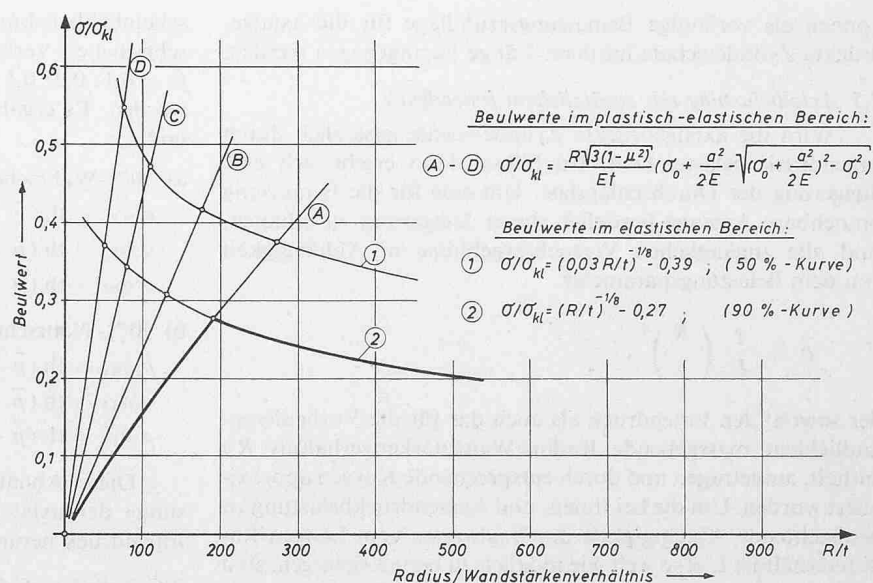


Bild 2. Beulwerte im plastisch-elastischen Übergangsbereich



kritischen Beulspannungen, durch die klassische Beulspannung dividiert, in Abhängigkeit vom Längen/Radiusverhältnis  $L/R$  aufgetragen und in Ergänzung der Ansätze von W. Ballerstedt/H. Wagner [2] und S. Kanemitsu/N. Nojima [7] durch Funktionen für  $R/t = 500, 500-900, 900-1400, 1400-2400, 2400-4000$  approximiert worden (Bild 3). In der so ermittelten Formel – sie kann auch zur Bemessung kurzer Zylinderschalen herangezogen werden –

$$(3.4) \quad \sigma/\sigma_{kl} = A + 0,3 \left( \frac{R}{t} \right)^{-1/4} \left( \frac{L}{R} + 0,5 \right)^{-5}$$

stellt das erste Glied den Beulwert für die ungestörte Schale mit einer weiter unten bestimmten Wahrscheinlichkeit und das zweite Glied den Störeinfluss der Ränder dar. Aus dem Verlauf der Kurven erhält man das Kriterium, dass bei  $L/R \geq 0,8$  keine Beeinflussung des Beulwertes durch die Randlagerung mehr vorhanden ist.

### 3.4 Statistische Auswertung der Versuchsergebnisse

Nach Ausscheiden derjenigen Versuchswerte, die unter die beiden eben erörterten Kriterien fallen – die Beulwerte von extrem sorgfältig hergestellten Schalen (galvanisiert, gedreht usw. im Mittel  $\sigma/\sigma_{kl} = 0,635$ ) wurden ebenfalls ausgeschlossen – sind alle zugänglichen Versuchsergebnissen mittleren  $R/t$ -Bereichen zugeordnet worden (z. B. dem Bereich  $R/t = 420$  bis  $400$ ). Im einzelnen wurden die folgenden mittleren

$R/t$ -Bereiche verwendet:  $R/t = 70; 100; 130; 150; 200; 250; 300; 350; 400; 450; 500; 600; 700; 800; 900; 1000; 1200; 1400; 1600; 1800; 2000; 2400; 2800$ . Für jedes dieser Verhältnisse sind getrennt die arithmetischen Mittelwerte gesucht und diese dann durch eine Kurve (50%-Wahrscheinlichkeitskurve) approximiert worden, derart, dass das Quadrat der Abstände dieser Mittelwerte von den entsprechenden Kurvenpunkten ein Minimum wird

$$(Y_a - Y_0)^2 = \text{Min.}$$

Die 90%-Bereichsgrenze (10%-Fraktile) wurde nach den bekannten Gesetzen der mathematischen Statistik ermittelt. Ebenso wie bei der 50%-Wahrscheinlichkeitskurve sind auch zur Ermittlung einer 90%-Wahrscheinlichkeitskurve die jeweiligen Bereichspunkte durch eine Funktion, für welche die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird, approximiert worden.

$$(Y_{90}^F - Y_{90}^B)^2 = \text{Min.}$$

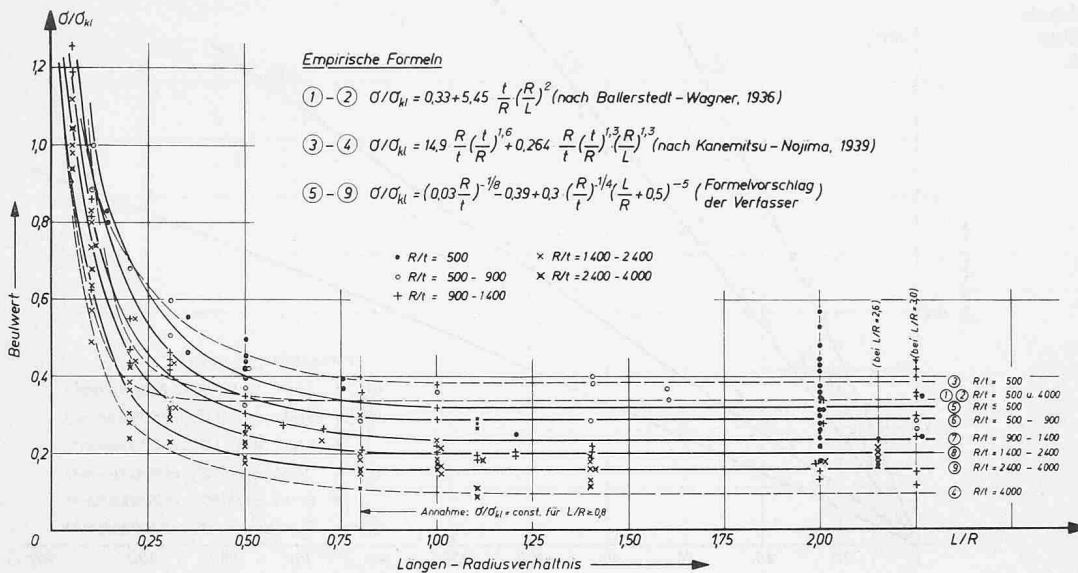
Bei genügender Anzahl von Versuchsergebnissen ( $N > 30$ ) wurde die «Gauss'sche Normalverteilung» und bei kleineren Stichproben (bei grösseren  $R/t$ -Verhältnissen) die «Student- oder  $t$ -Verteilung» zugrunde gelegt. Die so ermittelten Funktionen (Bild 4)

$$\sigma/\sigma_{kl} = (0,03 R/t)^{-1/8} - 0,39 \quad (50\% \text{-Wahrscheinlichkeit})$$

$$\sigma/\sigma_{kl} = (R/t)^{-1/8} - 0,27 \quad (90\% \text{-Wahrscheinlichkeit})$$



Bild 3. Beulwerte bei kleinen Längen/Radiusverhältnissen



können als vorläufige Bemessungsgrundlage für die axialgedrückte Zylinderschale mittlerer Länge herangezogen werden.

### 3.5 Axialbelastung mit zusätzlichem Innendruck

Wird die axialgedrückte Zylinderschale zusätzlich durch Innendruck belastet (z.B. bei Silos), dann ergibt sich eine Steigerung der Durchschlagslast. Um eine für die Bemessung brauchbare Aussage bezüglich dieser Steigerung zu erhalten, sind alle zugänglichen Versuchsergebnisse in Abhängigkeit von dem Belastungsparameter

$$\bar{p} = \frac{q}{E} \left( \frac{R}{t} \right)^2,$$

der sowohl den Innendruck als auch das für die Vorbeulempfindlichkeit massgebende Radius/Wandstärkenverhältnis  $R/t$  enthält, aufgetragen und durch entsprechende Kurven approximiert worden. Um die bei Innen- und Aussendruckbelastung zu beobachtende Abhängigkeit des Beulwertes vom Längen/Radiusverhältnis  $L/R$  so weit wie möglich zu berücksichtigen, sind in der statistischen Auswertung die drei  $L/R$ -Bereiche  $< 1,0$ ;  $1-3$ ;  $> 3,0$  getrennt untersucht worden. (Die Versuchswerte der Arbeit von V. Weingarten/E. Morgan/P. Seide [14] wurden wegen der relativ hohen Beulwerte, die an besonders sorgfältig hergestellten Versuchskörpern ermittelt worden waren, bei der Auswertung nicht mitverwendet.) Die 50%- und 90%-Wahr-

scheinlichkeitskurven wurde auch hier nach dem oben beschriebenen Verfahren ermittelt. Als mittlere  $\bar{p}$ -Bereiche sind  $\bar{p} = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; 1,9; 2,1$  benutzt worden. Es ergaben sich die folgenden Funktionen (Bilder 5 und 6):

#### a) 50%-Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \sigma/\sigma_{kl} &= \text{th}(\bar{p} + 0,7)^2 - 0,08 & L/R < 1,0 \\ \sigma/\sigma_{kl} &= \text{th}(\bar{p} + 0,5)^{1/2} - 0,18 & L/R = 1-3 \\ \sigma/\sigma_{kl} &= \text{th}(\bar{p} + 0,95) - 0,37 & L/R > 3,0 \end{aligned}$$

#### b) 90%-Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \sigma/\sigma_{kl} &= \text{th}(\bar{p} + 0,6)^2 - 0,11 & L/R < 1,0 \\ \sigma/\sigma_{kl} &= \text{th}(\bar{p} + 0,5)^{1/2} - 0,305 & L/R = 1-3 \\ \sigma/\sigma_{kl} &= \text{th}(\bar{p} + 0,95) - 0,48 & L/R > 3,0 \end{aligned}$$

Diese Abhängigkeiten können zur «vorläufigen Bemessung» der axial gedrückten Zylinderschale mit zusätzlichem Innendruck herangezogen werden.

### 3.6 Zylinderschale bei allseitigem Aussendruck

Bei der unter Aussendruck stehenden Zylinderschale ist, im Gegensatz zu den beiden vorbehandelten Lastfällen, die Zylinderlänge von ausschlaggebender Bedeutung für die Höhe der Durchschlagslast. Aus diesem Grund wurden bei der statistischen Untersuchung alle veröffentlichten Beulwerte in

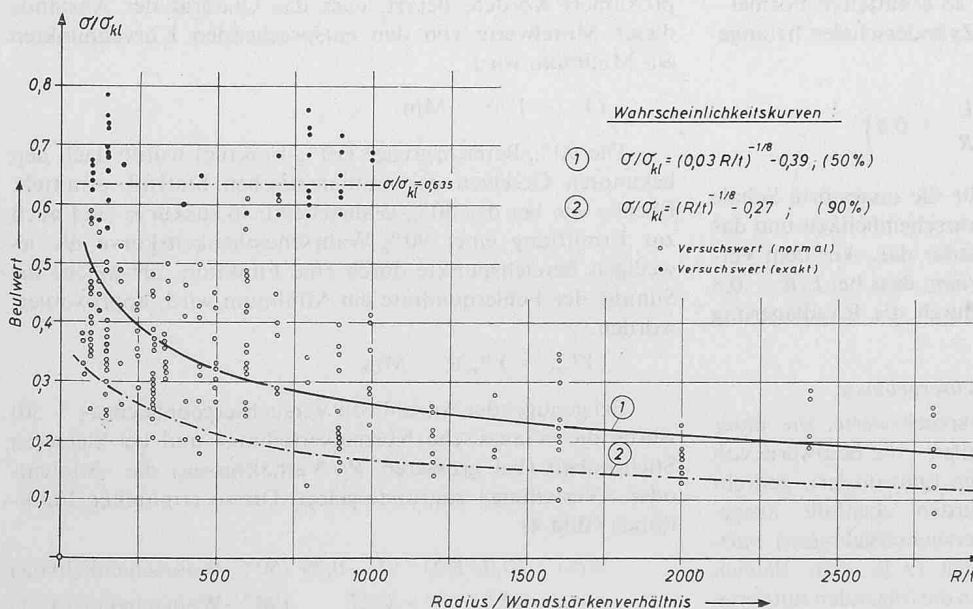


Bild 4. Wahrscheinlichkeitskurven für die axialgedrückte Zylinderschale; Beulwert in Abhängigkeit vom Radius/Wandstärken-Verhältnis

Bild 5. 50%-Wahrscheinlichkeitskurven für die Zylinderschale unter Längsbelastung mit Innendruck; Beulwert in Abhängigkeit vom Druckparameter  $p = q R^2/Et^2$

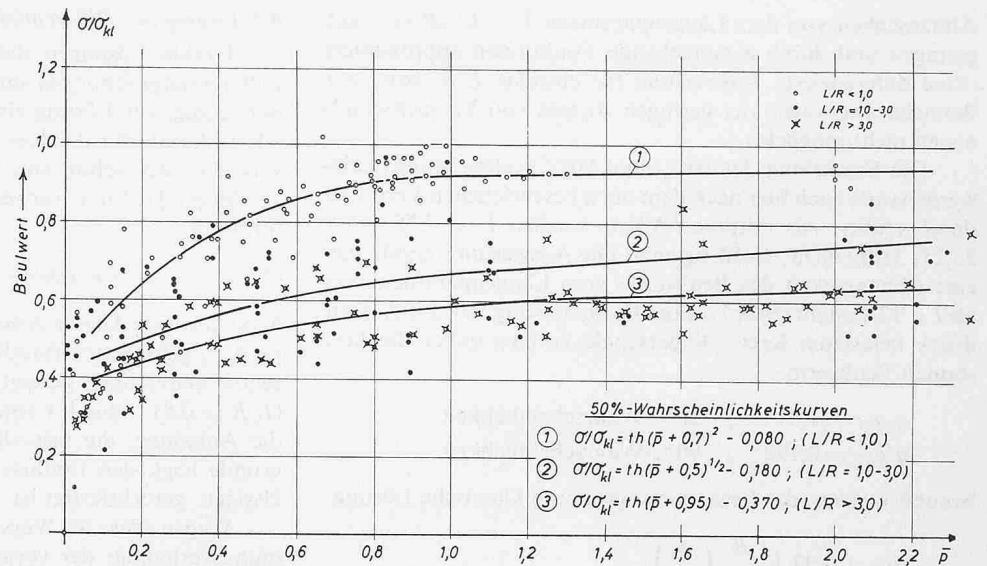


Bild 6. 90%-Wahrscheinlichkeitskurven für die Zylinderschale unter Längsbelastung mit Innendruck; Beulwert in Abhängigkeit vom Druckparameter  $p = q R^2/Et^2$

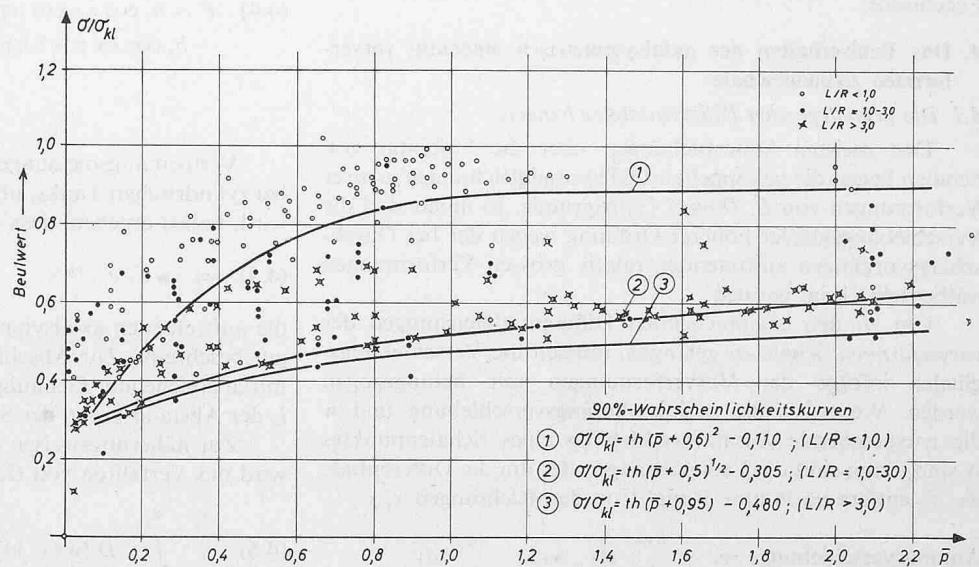
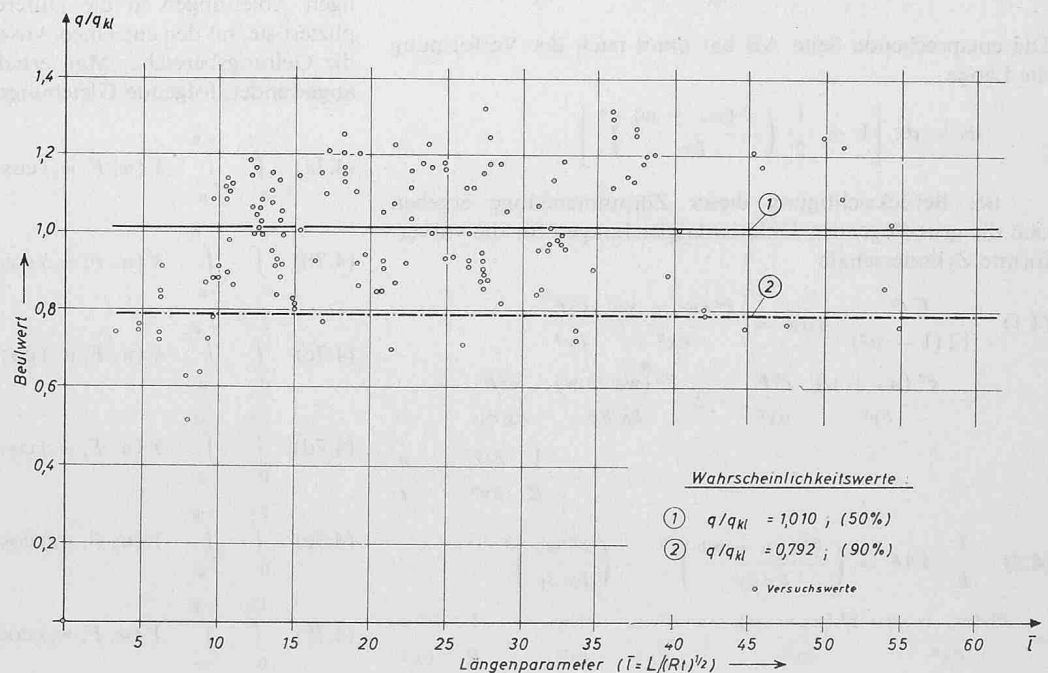


Bild 7. Wahrscheinlichkeitskurven für die Zylinderschale unter allseitigem Aussendruck



Abhängigkeit von dem Längenparameter  $\bar{l} = L / (R t)^{1/2}$  aufgetragen und durch entsprechende Funktionen approximiert. (Eine differenzierte Auswertung für einzelne  $L/R$ - bzw.  $R/t$ -Bereiche war wegen der geringen Anzahl von Versuchsergebnissen nicht möglich.)

Die Ermittlung der 50%- und 90%-Wahrscheinlichkeitswerte wurde auch hier nach dem oben beschriebenen Verfahren durchgeführt. Als mittlere  $\bar{l}$ -Werte wurden  $\bar{l} = 7,75; 15,5; 23,25; 31,0; 38,75; 46,50$  benutzt. Die Auswertung ergab, dass eine Abhängigkeit des Beulwertes vom Längenparameter erst ab  $\bar{l} < 12$  besteht (Bild 7). Für die Bemessung der auf Aussen- druck belasteten Kreiszylinderschale können daher die konstanten Beulwerte

$$q/q_{kl} = 1,01 \quad ; \quad 50\% \text{-Wahrscheinlichkeit}$$

$$q/q_{kl} = 0,792 \quad ; \quad 90\% \text{-Wahrscheinlichkeit}$$

benutzt werden, das heisst die sogenannte klassische Lösung

$$q_{kl} = 0,92 E \frac{R}{L} \left( \frac{t}{R} \right)^{5/2}$$

liefert (für  $\bar{l} > 12$ ) mit 50%-Wahrscheinlichkeit zutreffende Ergebnisse.

#### 4. Das Beulverhalten der axialsymmetrisch eindeutig vorverformten Zylinderschale

##### 4.1 Die grundlegenden Differentialgleichungen

Den meisten Untersuchungen über die Stabilität von Schalen liegen die gekoppelten Differentialgleichungen grosser Verformungen von *L. Donnell* [3] zugrunde. In ihnen sind die Verschiebungsglieder höherer Ordnung wegen der bei Durchschlagsvorgängen auftretenden relativ grossen Verformungen mitberücksichtigt worden.

Um zu den entsprechenden Differentialgleichungen der vorverformten Schale zu gelangen, müssen die Verschiebungsglieder infolge der Vorverformungen mit herangezogen werden. Wenn  $w_v$  die radiale Anfangsverschiebung und  $w$  die entsprechende Zusatzverschiebung eines Schalenpunktes A sind, dann sind die Verschiebungen der um die Differentiale  $dx, dy$  entfernten Punkte B und C in den Richtungen  $x, y$

$$\text{Anfangsverschiebung: } w_v + \frac{\partial w_v}{\partial x} dx; w_v + \frac{\partial w_v}{\partial y} dy$$

$$\text{Zusatzverschiebung: } w + \frac{\partial w}{\partial x} dx; w + \frac{\partial w}{\partial y} dy.$$

Die entsprechende Seite AB hat dann nach der Verformung die Länge

$$ds = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (w_v + w)}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Bei Berücksichtigung dieser Zusammenhänge ergeben sich die grundlegenden Differentialgleichungen für die vorverformte Zylinderschale

$$(4.1) \quad \frac{E t^2}{12 (1 - \mu^2)} \Delta \Delta w = \frac{\partial^2 (w_v + w)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (w_v + w)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 (w_v + w)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{q}{t}$$

$$(4.2) \quad \frac{1}{E} \Delta \Delta F = \left( \frac{\partial^2 (w_v + w)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 w_v}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 (w_v + w)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w_v + w)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

##### 4.2 Lösung der Differentialgleichungen

Exakte Lösungen dieser beiden nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen sind bisher nicht möglich. Es ist daher notwendig, zur Lösung ein Näherungsverfahren anzuwenden. Als 1. Ansatz für das hier verwendete Galerkinsche Verfahren wird die auch schon von *W. Thielemann/H. Dreyer* [16] und *A. Pflüger* [12] u.a. verwendete Funktion für die radiale Verformung

$$(4.3) \quad w = a_0 + a_1 \cos \lambda x \cos n \varphi + a_2 \cos 2 \lambda x + a_3 \cos 2 n \varphi$$

herangezogen. Dieser Ansatz erfüllt zwar die an den Schalenrändern geforderten Randbedingungen nicht; es wurde jedoch schon weiter oben gezeigt, dass bei grösseren Zylinderlängen ( $L/R \geq 0,8$ ) – nur für solche ist die folgende Lösung gültig – die Annahme, die fast allen bisherigen Untersuchungen zugrunde liegt, den Einfluss der Randbedingungen zu vernachlässigen, gerechtfertigt ist.

Wegen des im Versuch ermittelten ähnlichen Verformungsverhaltens der vorgebeulten und der nichtvorgebeulten Zylinderschale wird als 2. Lösungsansatz die allgemeine Lösung der Bipotentialgleichung verwendet

$$(4.4) \quad F = b_1 \cos \lambda x \cos n \varphi + b_2 \cos 2 \lambda x + b_3 \cos 2 n \varphi + b_4 \cos \lambda x \cos 3 n \varphi + b_5 \cos 3 \lambda x \cos n \varphi + b_6 \cos 2 \lambda x \cos 2 n \varphi - \frac{p}{2} \varphi^2$$

Verformungsmessungen im Bereich von Schweissnähten bei zylindrischen Tanks, über die unter Abschnitt 5.1 berichtet wird, haben ergeben, dass die Funktion

$$(4.5) \quad w_v = C_v e^{-(ax)^2}$$

die auftretenden axialsymmetrischen Vorverformungen relativ gut beschreibt. Zur Abschätzung des Parameters  $a$  kann man mit ausreichender Genauigkeit setzen  $a = 1,73 \cdot 2R/l_0$ , wobei  $l_0$  der Abstand bis zu der Stelle  $x$  ist, bei der  $w_v = C_v/20$  wird.

Zur näherungsweisen Lösung der Differentialgleichungen wird das Verfahren von *Galerkin* herangezogen.

$$(4.6) \quad \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} D[w(x, y)] f_i(x, y) dx dy = 0$$

Hierbei führt man die Ansatzfunktionen mit den jeweiligen Ableitungen in die Differentialgleichungen ein, multipliziert sie mit den einzelnen Ansatzgliedern und integriert über die Geltungsbereiche. Man erhält, auf den vorliegenden Fall angewendet, folgende Gleichungen:

$$(4.7a) \quad \int_0^{2\pi} \int_{-g}^{+g} X(w, F, w_v) \cos \lambda x \cos n \varphi dx d\varphi = 0$$

$$(4.7b) \quad \int_0^{2\pi} \int_{-g}^{+g} X(w, F, w_v) \cos 2 \lambda x dx d\varphi = 0$$

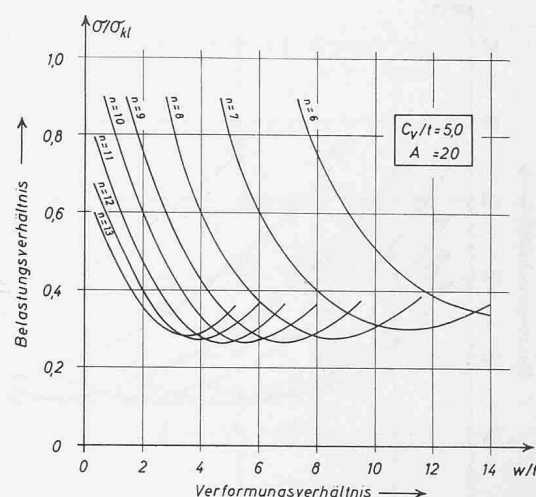
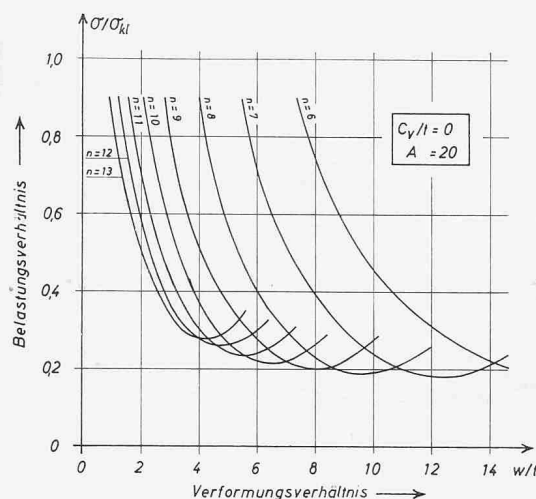
$$(4.7c) \quad \int_0^{2\pi} \int_{-g}^{+g} X(w, F, w_v) \cos 2 n \varphi dx d\varphi = 0$$

$$(4.7d) \quad \int_0^{2\pi} \int_{-g}^{+g} Y(w, F, w_v) \cos \lambda x \cos n \varphi dx d\varphi = 0$$

$$(4.7e) \quad \int_0^{2\pi} \int_{-g}^{+g} Y(w, F, w_v) \cos 2 \lambda x dx d\varphi = 0$$

$$(4.7f) \quad \int_0^{2\pi} \int_{-g}^{+g} Y(w, F, w_v) \cos 2 n \varphi dx d\varphi = 0$$

Bilder 8a und 8b. Einhüllende Last-Verformungskurven



$$(4.7g) \int_0^{2\pi} \int_{-g}^{+g} Y(w, F, w_v) \cos \lambda x \cos 3 n \varphi dx d\varphi = 0$$

$$(4.7h) \int_0^{2\pi} \int_{-g}^{+g} Y(w, F, w_v) \cos 3 \lambda x \cos n \varphi dx d\varphi = 0$$

$$(4.7i) \int_0^{2\pi} \int_{-g}^{+g} Y(w, F, w_v) \cos 2 \lambda x \cos 2 n \varphi dx d\varphi = 0$$

Die hierbei auftretenden Integrale sind bis auf das Wahrscheinlichkeitsintegral  $\int e^{-(ax)^2}$  leicht zu lösen. Das Wahrscheinlichkeitsintegral wird geschlossen weitergeführt und bei der Lösung des Gleichungssystems in einer Prozedur unter Verwendung der Hermitformel gelöst.

Die sich ergebenden Gleichungen für die 9 Unbekannten  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$  lassen sich im Einsetzungsverfahren auf die zwei nichtlinearen Gleichungen von der Form

$$(4.8) \begin{aligned} f_1(a_0; a_1^2; a_2; p/p_{kl}) &= C_1 \\ f_2(a_0; a_1^2; a_2; p/p_{kl}) &= C_2 \end{aligned}$$

reduzieren. Der Freiwert  $a_0$  lässt sich aus der Bedingung, dass die Verschiebung  $v$  über den Zylinderumfang periodisch ist, bestimmen zu

$$(4.9) a_0 = \frac{n^2}{R} \left( \frac{1}{8} a_1^2 + a_3^2 \right) - \frac{\mu t}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{p}{p_{kl}}$$

Das nichtlineare Gleichungssystem (4.8) lässt sich lösen, indem  $a_1^2$  als Parameter angenommen und dann mittels eines Halbierungsverfahrens der Schnittpunkt der beiden sich ergebenden Funktionen  $p/p_{kl} = f_1(a_2)$  und  $p/p_{kl} = f_2(a_2)$  ermittelt wird.

Die Auswertung der so erhaltenen Ergebnisse liefert für verschiedene  $R/t, a, C_v/t, v$ - und  $L/R$ -Werte Funktionen vom Typ  $p/p_{kl} = f(w/t)$ . Werden bei diesen Funktionen die Abschnitte mit dem jeweils ungünstigsten Wellenlängenverhältnis  $v$  aufgetragen und bildet man die Einhüllende an diese Kurvenabschnitte, so erhält man die gesuchten, weiter unten benötigten Lastverformungskurven (Bilder 8a und 8b).

#### 4.3 Ermittlung der kritischen Durchschlagslasten

Um zur oberen kritischen Beulspannung zu gelangen, geht man von der in Versuchen gefundenen Erkenntnis aus, dass sich das nach dem Durchschlag sichtbar werdende Beulmuster bereits bei niedriger Belastung ausbildet und dass die Beulamplituden mit zunehmender Belastung grösser werden. Der Ausgangspunkt für die sich einstellenden, über den Umfang periodisch verteilten Verformungen ist die grösste Abweichung von der Idealform des Zylinders. Die bis zum Durchschlag

auftretenden Zusatzverformungen sind relativ klein, man kann daher in den gekoppelten Differentialgleichungen (4.1), (4.2) die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Es ergibt sich die linearisierte Differentialgleichung

$$(4.10) \Delta \Delta \Delta \Delta w + [12(1-\mu^2) R^2/t^2] \partial^4 w / \partial x^4 = -12(1-\mu^2) R^2/E t^2 \cdot p_0 \partial^2 (\Delta w) / \partial x^2$$

Verwendet man den eingliedrigen Ansatz für die Vorverformung

$$(4.11) w_v = C'_v \sin \lambda x \cos n \varphi$$

und setzt affines Verformungsverhalten voraus, so erhält man das Beulverhältnis

$$(4.12) p/p_{kl} = (p_0/p_{kl}) C' / (C'_v + C') \\ \text{mit } p_0/p_{kl} = 0,5 [t(\lambda^2 + n^2)^2 / \lambda^2 \sqrt{12(1-\mu^2)} R + R \lambda^2 \sqrt{12(1-\mu^2)} / (\lambda^2 + n^2)^2 t]$$

Dieses Beulverhältnis beschreibt in guter Näherung für verschiedene Beulwellenzahlen  $n$  und Beulwellenverhältnisse  $v$  das Verformungsverhalten der Schale vor dem Durchschlag.

Um nun zu einer Aussage über die Tragfähigkeit des Zylinders zu kommen, bringt man die ermittelten Lastverformungskurven für Beulen vor und nach dem Durchschlag zum Schnitt; das heisst, der Durchschlag tritt dann ein, wenn die Gesamtverschiebung aus Vor- und Zusatzverformung gleich der Verschiebung des durchschlagenden idealen Körpers ist. Trägt man die so gefundenen Schnittpunkte über den Vorverformungen  $w_v/t$  auf, so erhält man die gesuchten Traglastkurven (Bilder 9a und 9b). Für eine vorverformte Zylinderschale lässt sich damit für jede auftretende Wellenzahl  $n$  der zugehörige Beulwert ablesen.

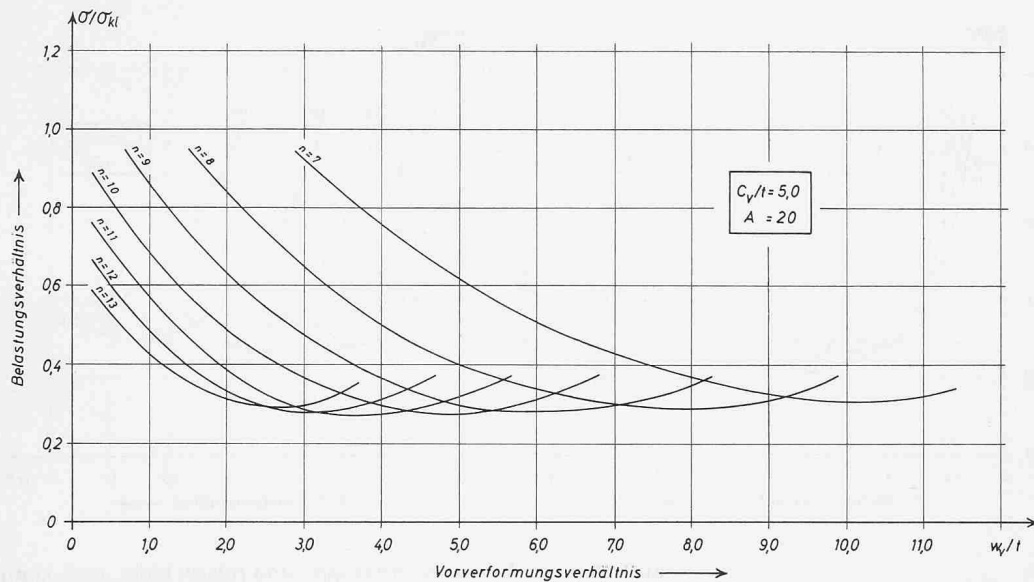
Die Beulwellenzahl  $n$  kann entweder empirisch durch Auswerten von Versuchsergebnissen ermittelt werden (Bild 10) oder durch Abtasten des unter Last stehenden, mittels eines Erregers zum Schwingen gebrachten Zylinders. Die Gegenüberstellung der theoretischen und experimentellen Ergebnisse (Bilder 11a bis 11d) ergibt eine recht gute Übereinstimmung.

### 5. Experimentelle Untersuchungen zum Beulverhalten axial gedrückter Zylinderschalen

#### 5.1 Das Verformungsverhalten von Zylinderschalen

Zylinderschalen sind fast immer mit Vorverformungen behaftet. Die Grösse und die Verteilung dieser Vorbeulen in Längs- und Umfangsrichtung – durch sie wird die Höhe der Beullast sehr wesentlich beeinflusst – ist vom jeweils verwendeten Herstellungsverfahren abhängig. In welchem Ausmass Vorverformungen auftreten und durch welche Faktoren ihre geometrischen Ausmass bestimmt werden, ist bisher noch





Bilder 9a und 9b. Abhängigkeit der Beullast von der Vorverformung

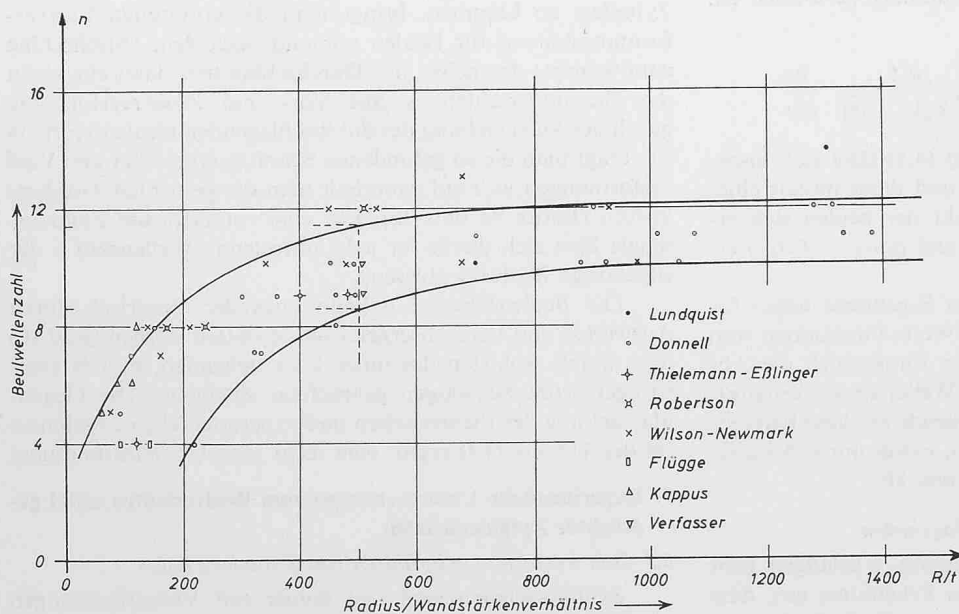
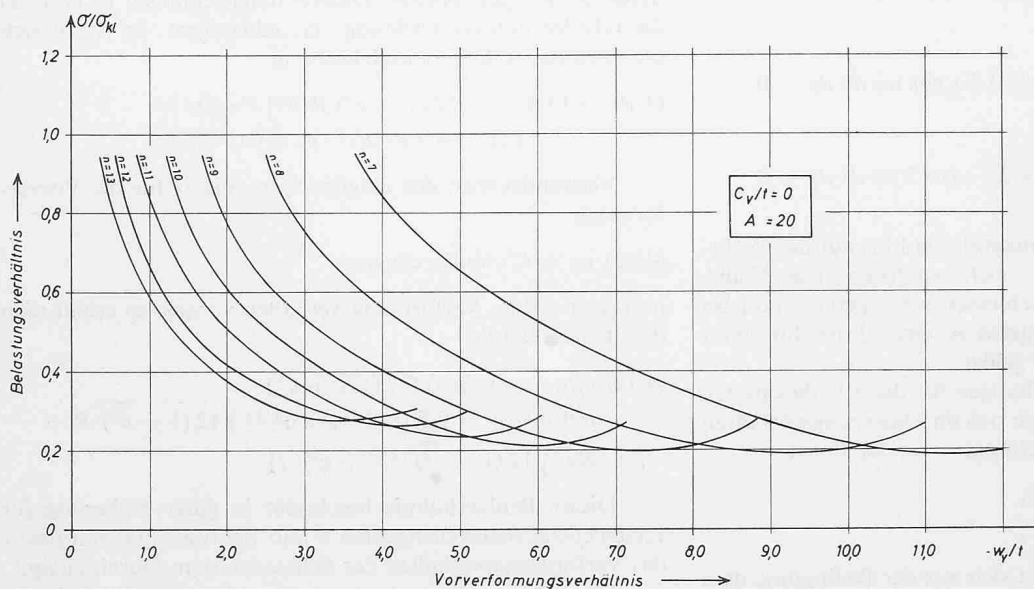
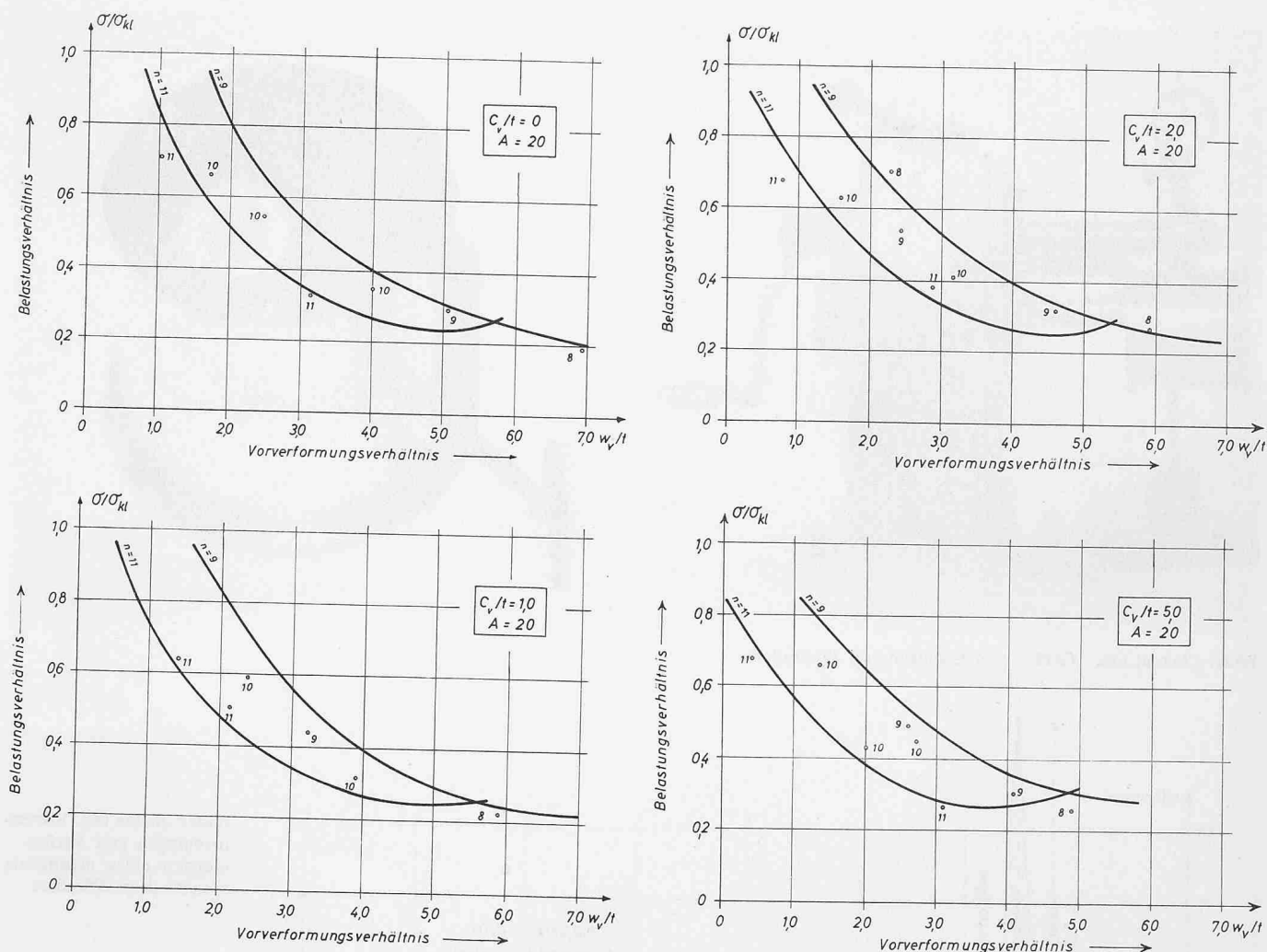


Bild 10. Beulwellenzahlen für Zylinderschalen unter Längsbelastung

nicht genauer untersucht worden. Aus diesem Grund wurden zunächst – um eine erste Aussage machen zu können – an mehreren geschweissten Tankbauwerken ( $R/t = 8550/8$  mm) Verformungsmessungen durchgeführt. An den leeren Tanks sind dabei im Bereich der horizontalen automatisch geschweissten

V-Nähte (die in 3 und mehr Lagen hergestellt waren) die Schrumpfverformungen mittels einer Messbrücke ( $L = 1000$  mm;  $1/100$  mm Messgenauigkeit) ermittelt worden. Für 4 Messhorizonte sind die gemessenen Verformungen in Bild 12 aufgetragen (weitere Ergebnisse siehe [13]). Aus ihrem Verlauf



Oben:  
Bilder 11a bis 11d. Vergleich der  
theoretischen (Kurven) und der  
experimentellen (Punkte) Er-  
gebnisse

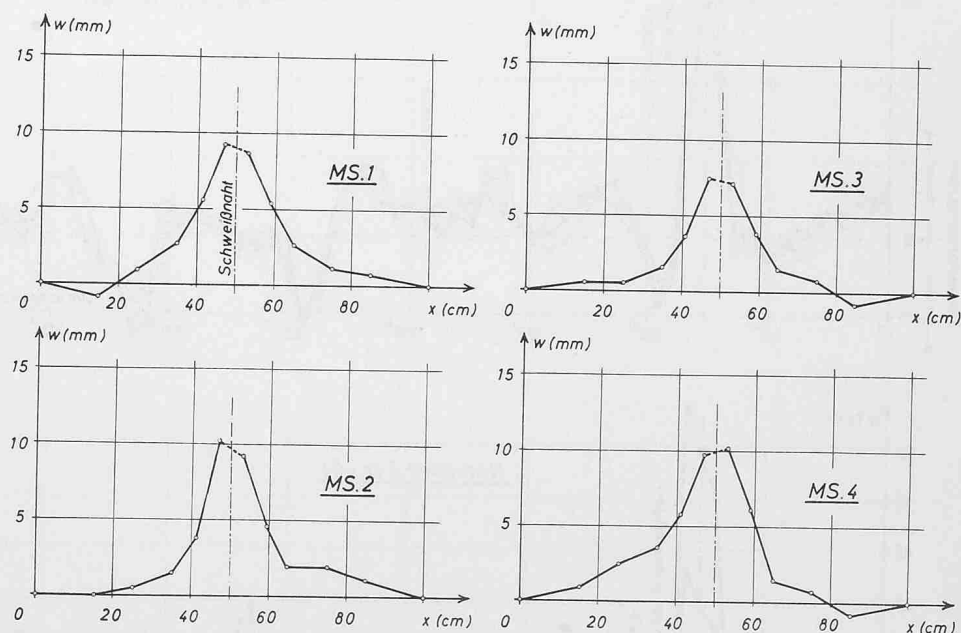
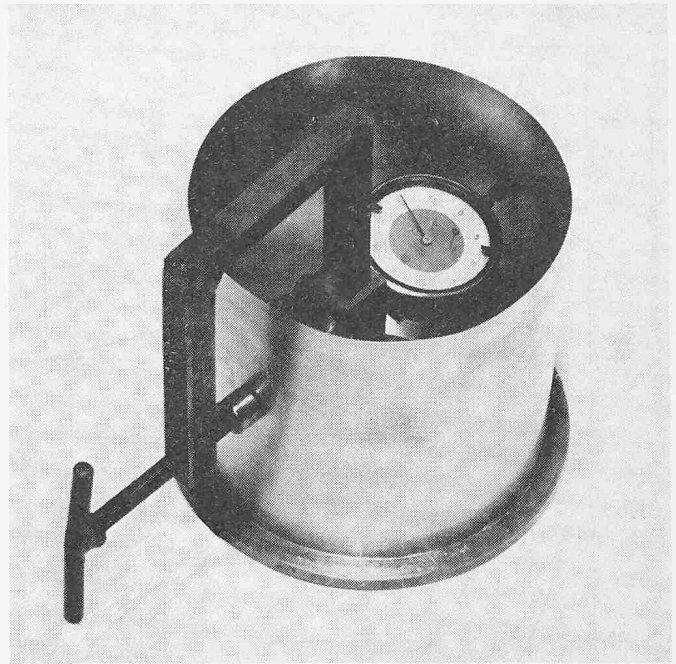
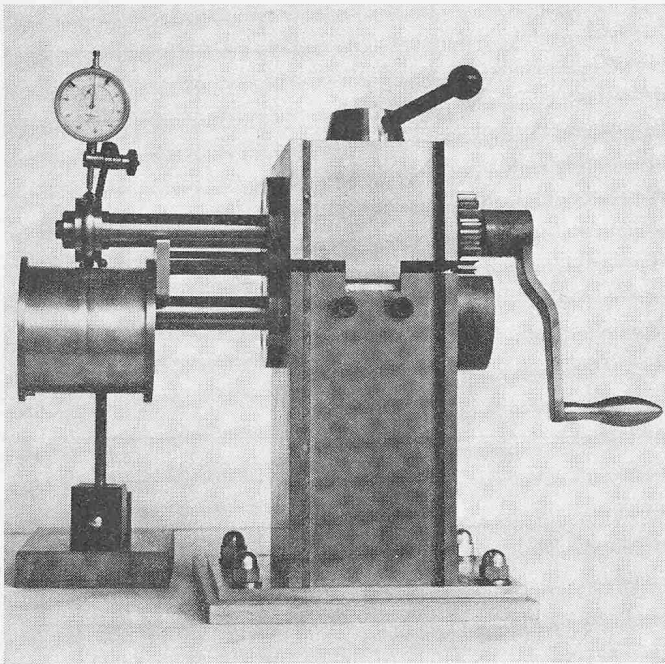


Bild 12. Vorverformungen im  
Bereich horizontaler Schweiss-  
nähte

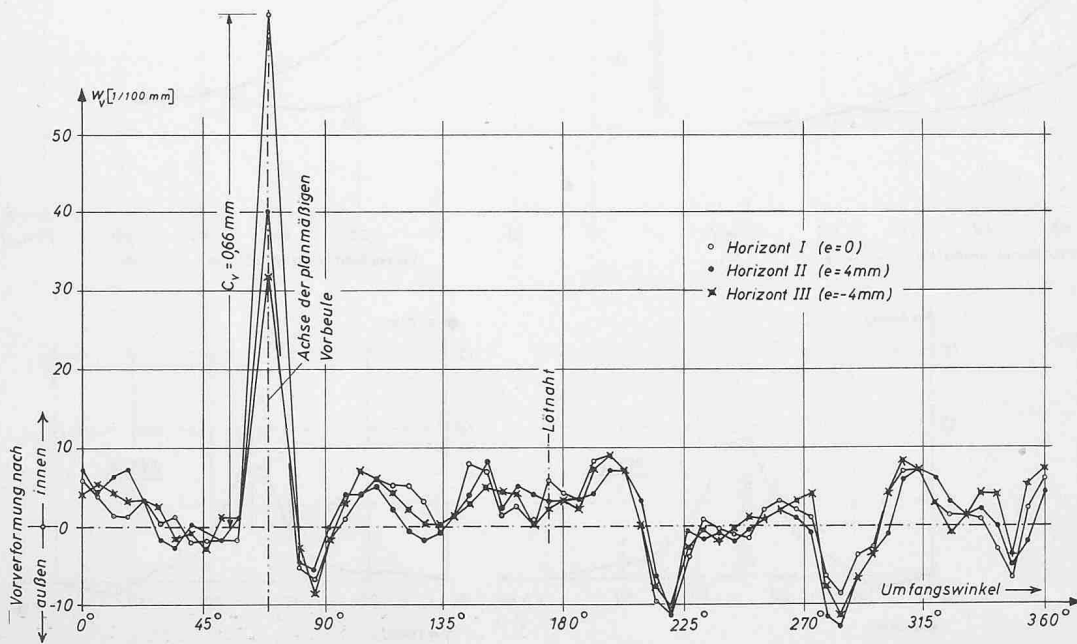
ergibt sich, dass die bei der theoretischen Betrachtung (4.2) verwendete Funktion  $y = e^{-(ax)^2}$  die gemessenen Verformungen recht gut beschreibt.

Um eine Aussage über das weitere und gesamte Verformungsverhalten der unter Last stehenden vorverformten Schale machen zu können, wurden bei Modellzylindern aus hartverlötetem Messingblech ( $D = 100$  mm;  $L = 100$  mm;  $t = 0,1$  mm) planmässige Vorverformungen erzeugt und deren Formänderungen während des Belastungsversuchs ermittelt.

Die axialsymmetrischen bzw. örtlichen Vorbeulen sind mittels geeigneter Geräte (Bilder 13a und 13b) in die Schale eingedrückt worden. Mit den angebrachten Messuhren war es dabei möglich, eine planmässige, reproduzierbare Vorbeultiefe zu erzielen. Die mit solchen planmässigen Vorbeulen versehenen Modellzylinder wurden jeweils vor dem Belastungsversuch mit 1/100 mm Messgenauigkeit in 5-mm-Intervallen in Umfangsrichtung und in 4-mm-Intervallen in Axialrichtung ausgemessen (Bild 14a).



Bilder 13a und 13b. Geräte zum Erzeugen von Vorbeulen



Bilder 14a bis 14c. Vorverformungen und Verformungen eines planmässig vorgebeulten Zylinders

Bild 14a

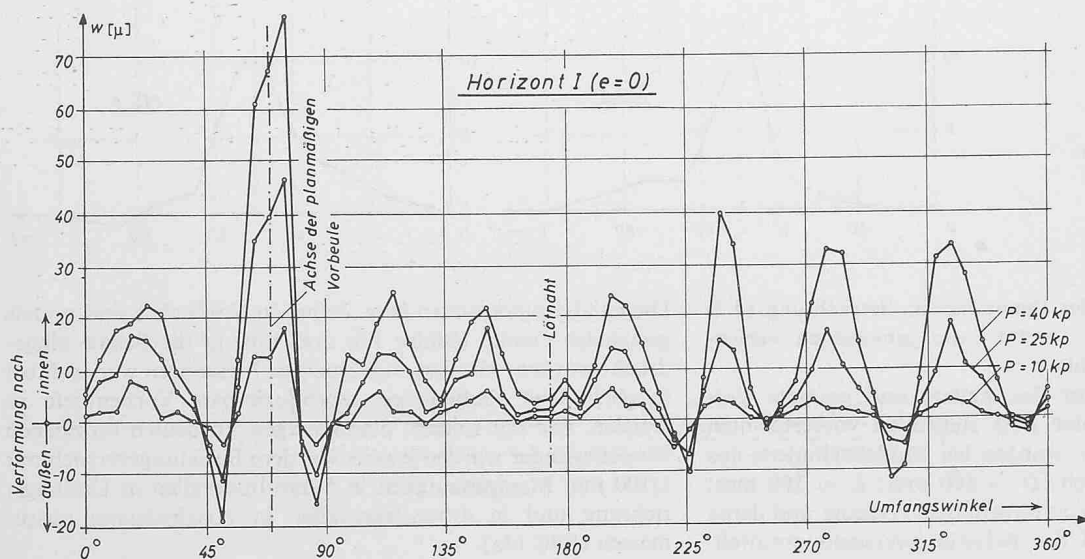


Bild 14b

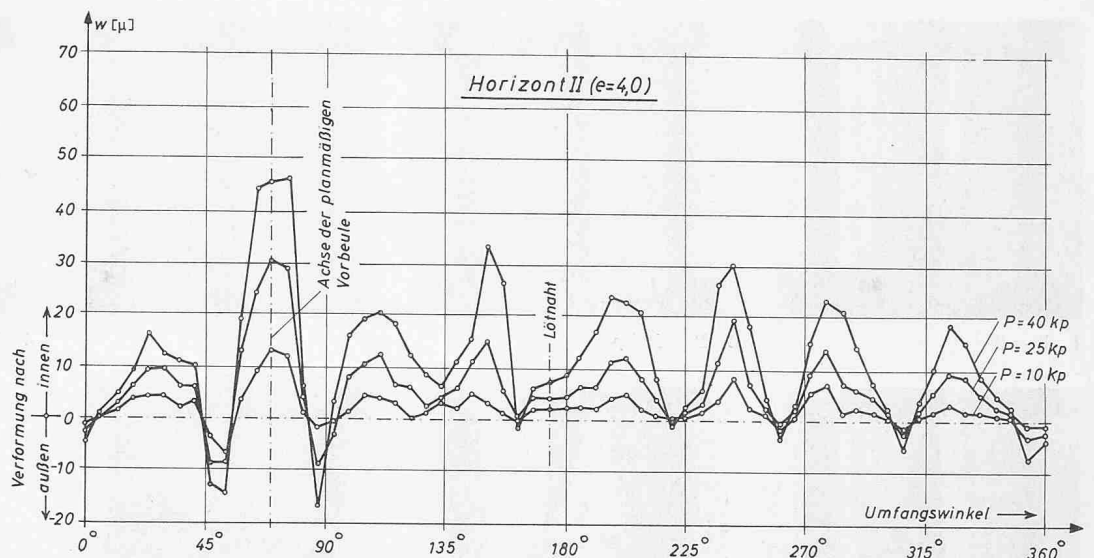


Bild 14c

Tabelle 2. Versuche an Zylinderschalen mit planmässigen Vorbeulen (axialsymmetrische Vorbeule)

Körper-Nr.	Abmessungen (Schale) <sup>1)</sup>			Abmessungen (Vorbeule) <sup>2)</sup>				Beullast p (kp)	Beulwert $\delta/\delta_{kl}$	Beulen- zahl n
	t (mm)	R/t	L/R	$C_v$ (mm)	$C_v/t$	$C_v^1$ (mm)	$C_v^1/t$			
D1	0,095	517	2,04	0,093	0,88	0,223	2,35	190,0	0,590	10
D2	0,095	517	2,04	0,090	0,95	0,133	1,40	204,0	0,640	11
D3	0,092	534	2,04	0,093	1,01	0,359	3,90	94,0	0,310	10
D4	0,094	522	2,04	0,096	1,02	0,197	2,10	160,0	0,505	11
D5	0,097	506	2,04	0,128	1,06	0,568	5,85	74,0	0,220	8
D6	0,095	517	2,04	0,136	1,09	0,304	3,20	142,0	0,440	9
D7	0,096	512	2,04	0,170	1,77	0,230	2,40	178,0	0,540	9
D8	0,095	517	2,04	0,182	1,94	0,071	0,75	218,0	0,680	11
D9	0,095	517	2,04	0,186	1,96	0,147	1,55	205,0	0,630	10
D10	0,094	522	2,04	0,187	1,99	0,428	4,55	101,0	0,320	9
D11	0,096	512	2,04	0,197	2,05	0,274	2,85	125,0	0,380	11
D12	0,095	517	2,04	0,202	2,11	0,560	5,90	87,0	0,270	8
D13	0,094	522	2,04	0,193	2,05	0,296	3,15	129,0	0,410	10
D14	0,095	517	2,04	0,307	3,23	0,214	2,25	216,0	0,670	8
D15	0,095	517	2,04	0,442	4,65	0,190	2,00	138,0	0,430	10
D16	0,096	512	2,04	0,465	4,84	0,038	0,40	224,0	0,680	11
D17	0,096	512	2,04	0,476	4,96	0,168	1,75	217,0	0,660	10
D18	0,093	528	2,04	0,464	4,99	0,377	4,05	93,0	0,300	9
D19	0,095	517	2,04	0,486	5,12	0,295	3,10	87,0	0,270	11
D20	0,095	517	2,04	0,500	5,27	0,247	2,60	158,0	0,490	9
D21	0,097	506	2,04	0,514	5,29	0,262	2,70	143,0	0,425	10
D22	0,095	517	2,04	0,505	5,32	0,465	4,90	84,0	0,260	8

1) R = 49,1 mm; L = 100 mm

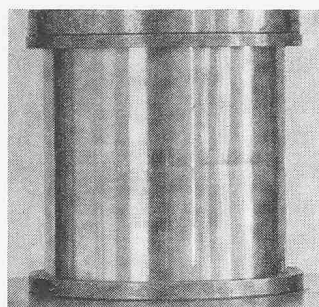
2)  $l_x = 13,6$  mm

Tabelle 3. Versuche an Zylinderschalen mit planmässigen Vorbeulen (Einzelbeule)

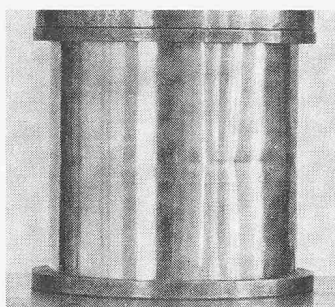
Körper-Nr.	Abmessungen (Schale)			Abmessungen (Vorbeule)			Beullast P (kp)	Beulwert $\delta/\delta_{kl}$	Beulen- zahl n
	t (mm)	R/t	L/R	$C_v$ (mm)	$C_v/t$	$l_x$ (mm)			
E1	0,300	164	2,04	0,315	1,05	24,0	2280,0	0,71	11
E2	0,095	517	2,04	0,162	1,70	14,0	213,0	0,66	10
E3	0,094	522	2,04	0,237	2,50	14,0	174,0	0,55	10
E4	0,095	517	2,04	0,300	3,15	14,0	106,0	0,33	11
E5	0,095	517	2,04	0,380	4,00	14,0	113,0	0,35	10
E6	0,094	522	2,04	0,475	5,05	14,0	92,0	0,29	9
E7	0,095	517	2,04	0,660	6,95	14,0	58,0	0,18	8

1) R = 49,1 mm; L = 100 mm

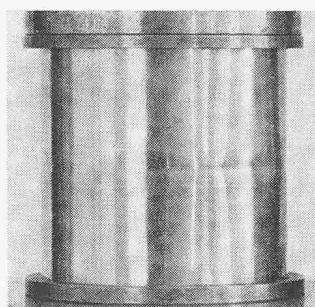




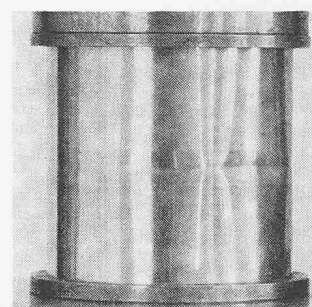
1  $P = 0$



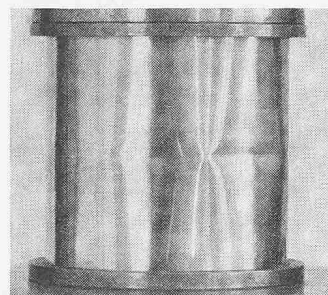
2  $P = 30 \text{ kp}$



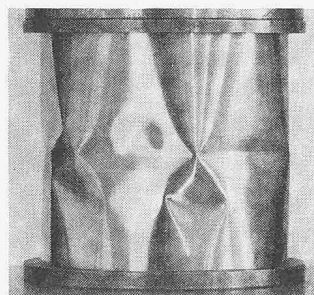
3  $P = 55 \text{ kp}$



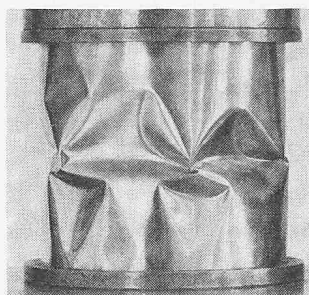
4  $P = 70 \text{ kp}$



5  $P = 82 \text{ kp}$



6  $P = 84,5 \text{ kp}^*)$



7 nach dem Durchschlag

Bilder 15a bis 15g. Beulverhalten einer planmässig axial-symmetrisch vorgebeulten Zylinderschale  
\*) Während des Durchschlags

Während des Belastungsversuchs sind die bei den einzelnen Laststufen ( $P = 10 \text{ kp}$ ;  $25 \text{ kp}$ ;  $40 \text{ kp}$ ) auftretenden elastischen Verformungen mittels  $1/1000\text{-mm}$ -Messuhren ermittelt worden. Aus dem Verlauf dieser Verformungen (Bilder 14b und 14c) lassen sich sowohl für den Zylinder mit axialsymmetrischer Vorbeule als auch für den mit Einzelbeule folgende, für die Beurteilung des Beulverhaltens grundlegende Feststellungen herleiten:

1. Der Ausgangspunkt des Beulmusters liegt offensichtlich immer bei der grössten Vorverformung.
2. Die Verformungen sind in Umfangsrichtung periodisch verteilt.
3. Die Annahme einer von der Vorverformung initiierten und zu ihr bald affinen Beulung ist gerechtfertigt.

## 5.2 Beulversuche an planmässig vorgebeulten Zylinderschalen

Nach Durchführung der oben beschriebenen Verformungsmessungen sind die Prüfkörper jeweils nach erfolgter Zentrierung bis zum Durchschlag belastet worden. Es wurden insgesamt 22 Körper mit axialsymmetrischer Vorbeule ( $C_v/t \approx 1,0$ ;  $2,0$ ;  $5,0$ ) und 7 Körper mit örtlicher kreisförmiger Einzelbeule geprüft. Die Ergebnisse (Beullasten, Beulwellenzahlen) sind in Tabelle 2 für die Ringbeule und in Tabelle 3 für die Einzelbeule zusammengestellt und in den Bildern 11a bis 11d aufgetragen. Um einen Eindruck vom Beulverhalten einer planmässig axialsymmetrisch vorgebeulten Zylinderschale zu vermitteln, wurde in der Bilderfolge (Bilder 15a bis 15g) ein bei verschiedenen Laststufen fotografierter Modellzylinder wiedergegeben.

Tabelle 4. Versuche an kürzeren Zylinderschalen

Körper-Nr.	Abmessungen (Schale)					Beullast $P \text{ (kp)}$	Beulwert $\delta/\delta_{kl}$	Beulenzahl $n$
	$R \text{ (mm)}$	$t \text{ (mm)}$	$L \text{ (mm)}$	$R/t$	$L/R$			
A 1.	49,1	0,095	36,8	501	0,75	128	0,396	11
A 2	49,1	0,096	36,8	496	0,75	122	0,370	10
A 3	49,1	0,095	17,2	501	0,35	180	0,558	12
A 4	49,1	0,095	17,2	511	0,35	152	0,471	11
A 5	49,1	0,094	7,4	496	0,15	265	0,838	13
A 6	49,1	0,094	7,4	496	0,15	255	0,807	13

Tabelle 5. Versuche an dickwandigen Zylinderschalen

Körper-Nr.	Abmessungen (Schale)					Beullast $P \text{ (kp)}$	Beulwert $\delta/\delta_{kl}$	Beulenzahl $n$
	$R \text{ (mm)}$	$t \text{ (mm)}$	$L \text{ (mm)}$	$R/t$	$L/R$			
B1	49,0	2,0	200	24,5	4,1	20 800	0,065	r
B2	49,1	1,15	87	42,7	1,77	10 050	0,095	r
B3	48,7	0,5	87	97,3	1,77	3 800	0,190	7
B4	48,5	0,53	90	91,5	1,86	5 950	0,265	7
B5	49,8	0,5	87	99,0	1,75	4 800	0,236	7
B6	48,5	0,3	90	162,0	1,86	2 620	0,327	9
B7	350,0	3,0	800	117,0	2,29	182 000	0,252	8
B8	350,0	2,0	800	150,0	2,29	89 200	0,277	8
B9	350,0	2,5	3000	140,0	8,60	116 100	0,231	7

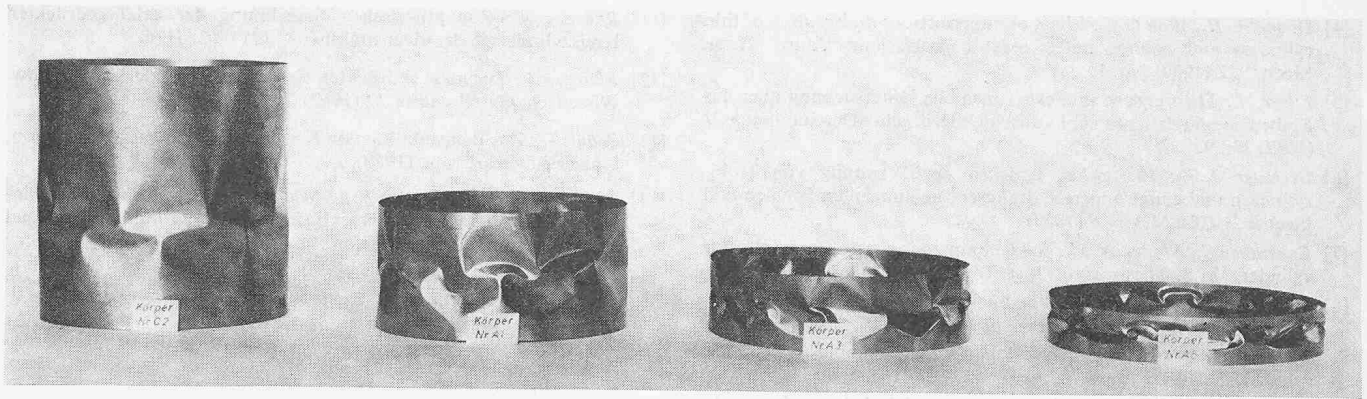


Bild 16. Gebeulte Modellzylinder

### 5.3 Versuche an nicht planmässig vorgebeulten Zylinderschalen

Die nachfolgend beschriebenen Beulversuche an nicht planmässig vorgebeulten Zylinderschalen wurden durchgeführt, um 1. die Einflüsse der Randeinspannung und 2. die Einflüsse der frühzeitigen Plastizierung zu ermitteln.

Als Versuchskörper wurden für Schalen mit grösserer Wanddicke ( $t = 0,3$  bis  $2,0$  mm) auf der Drehbank abgedrehte bzw. geschweisste Stahlzylinder (aus St 52 und St 37) und für dünnwandige Schalen ( $t \leq 0,1$  mm) mit Hartlot verlötete Messingzylinder (aus MS 63;  $E = 940000$  kp/cm<sup>2</sup>) mit den Abmessungen  $R \approx 50; 350$  mm;  $L \approx 100; 800; 3000$  mm verwendet. Um die Versuchskörper, deren Ränder durch innen- und aussenliegende Ringe verklemmt waren, zentrisch belasten zu können, ist zwischen Pressenoberhaupt und Versuchszylinder ein Messzylinder eingeschaltet worden.

**Einflüsse der Randeinspannung:** Um eine qualitative Aussage über den Einfluss der Randeinspannung und damit der Zylinderlänge auf die kritische Durchschlagslast machen zu können, war unter 3. anhand aller bisher veröffentlichten Versuchsergebnisse eine empirische Formel ermittelt worden. Da für das Radiuswandstärkenverhältnis  $R/t \leq 500$  nicht genügend Versuchsergebnisse vorlagen, wurden hierzu 6 Beulversuche mit einem Längenradiusverhältnis  $L/R = 0,75; 0,35; 0,15$  durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 zusammengestellt und in Bild 3 eingetragen. Es zeigt sich, dass die für andere  $R/t$ -Verhältnisse ( $R/t > 500$ ) festgestellte und durch die in Gleichung (3.4) beschriebene Tendenz auch für  $R/t \leq 500$  zutrifft. Das aufgetretene Beulmuster und das Ansteigen der Beulwellenzahl mit abnehmender Zylinderlänge kann aus Bild 16 ersehen werden.

**Einflüsse der frühzeitigen Plastizierung:** Unter 3. wurde auf die abfallende Tendenz der kritischen Beulspannung bei kleiner werdenden Radiuswandstärkenverhältnissen hingewiesen und durch eine Funktion beschrieben. Die geringe Anzahl der Versuche mit Zylinderschalen aus St 52 und St 37 war der Anlass zur Durchführung der vorliegenden 9 Beulversuche ( $B_1 - B_9$ , Körper aus St 52;  $B_7 - B_9$ , Körper aus St 37). Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zusammengestellt und in Bild 1 aufgetragen. Bei den Radius/Wandstärkenverhältnissen  $R/t = 24,5$  und  $42,7$  (St 52) trat rein plastisches Beulen (axialsymmetrische Verformung nach aussen) und bei  $R/t = 162$  (St 52) rein elastisches Beulen (schlagartiger Durchschlag) auf. Das «plastisch-elastische» Beulen bei  $R/t \approx 91,5$  (St 52) und  $150$  (St 37) war einerseits durch das Fehlen eines ausgeprägten Durchschlags, andererseits durch ein beim elastischen Beulen zu beobachtendes Beulmuster (Bild 17) gekennzeichnet.

## 6. Zusammenfassung

Ausgehend von der Erkenntnis, dass für die Bemessung von Zylinderschalen fallweise nur die obere kritische Beulspannung  $\sigma_{k,0}$  von praktischem Interesse ist, wurde in der vorliegenden Arbeit, über die Ergebnisse bei affin-ausbeulen-

den Zylinderschalen noch hinausgehend, auch die axialsymmetrisch planmässig-vorverformte Kreiszyinderschale untersucht. Die *Donnellschen* Differentialgleichungen wurden hierbei mittels eines aus Verformungsmessungen an Tankbauwerken gewonnenen Ansatzes unter Benutzung des *Galerkinschen* Verfahrens gelöst. Die «massgebenden» Beullasten sind unter Verwendung eines Beulkriteriums, nach dem der Durchschlag dann eintritt, wenn in radialer Richtung die Gesamtverschiebung (aus Vor- und Zusatzverformung) gleich der Verschiebung der «idealen» Zylinderschale im überkritischen Bereich ist, für ein Radius/Wandstärkenverhältnis  $R/t = 500$  ermittelt worden. Die Übereinstimmung der so erhaltenen Lastverformungskurven mit denjenigen Beullasten, die an planmässig vorverformten Messingzylindern ermittelt worden sind, ist recht gut.

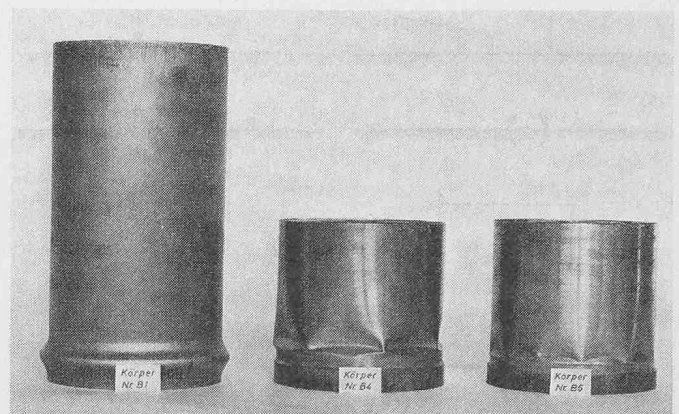
Solange nicht alle, die tatsächliche obere Versagensgrenze  $\sigma_{k,0}$  festlegenden Faktoren untersucht worden sind, muss man empirisch gefundene Bemessungsformeln verwenden. Für die drei wichtigsten Lastfälle: Reine Längsbelastung; Längsbelastung mit zusätzlichem Innendruck und allseitigem Aussen- und Innendruck sind nahezu alle bisher veröffentlichten Versuchsergebnisse zur Ermittlung empirischer Bemessungsformeln mitherangezogen worden.

Darüber hinaus wurden für die bisher weniger erforschten Einflüsse der Zylinderlänge und des plastisch-elastischen Übergangsbereiches einige für die Bemessung wesentliche Zusammenhänge gezeigt.

### Literaturverzeichnis:

- [1] *Almroth B. O.*: Postbuckling behavior of compressed circular cylinders under axial compression. "AIAA Journ." 1, (1964) No. 10.
- [2] *Ballerstedt W., Wagner H.*: Versuche über die Festigkeit dünner, unversteifter Zylinder unter Schub- und Längskräften. «Luftfahrtforschung», (1936) H. 13.
- [3] *Donnell L. H.*: New theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. "Trans. ASME" 56 (1934)

Bild 17. Gebeulte Modellzylinder



- [4] *Donnel L.H., Wan C.C.*: Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. "Journ. Appl. Mech." 17 (1950) No. 1.
- [5] *Ebner H.*: Theoretische und experimentelle Untersuchung über das Einbeulen zylindrischer Tanks durch Unterdruck. «Der Stahlbau» 21 (1952) Nr. 9.
- [6] *Geckeler J.W.*: Plastisches Knicken der Wandung von Hohlzylindern und einige andere Faltungserscheinungen an Schalen und Blechen. «Z.f.a.M.M.» 8 (1928).
- [7] *Kanemitsu S., Nojima N.M.*: Axial compression tests of thin circular cylinders. M.S. Thesis, Calif. Inst. Techn. (1939).
- [8] *v. Kármán Th., Tsien H.S.*: The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. "Journ. of Aero. Sci." 8 (1941) No. 8.
- [9] *Kempner J.*: Postbuckling behavior of axially compressed circular cylindrical shells. "Journ. of Aero. Sci." 21 (1954) No. 5.
- [10] *Michielsen H.F.*: The behavior of thin cylindrical shells after buckling under axial compression. "Journ. of Aero. Sci." 15 (1948) No. 12.

- [11] *Pflueger A.*: Zur praktischen Berechnung der axial gedrückten Kreiszyllinderschale. «Der Stahlbau», 32 (1963) H. 6.
- [12] *Pflueger A.*: Zur axial gedrückten Kreiszyllinderschale. «Braunsch. Wissensch. Gesellschaft» 14 (1962).
- [13] *Schulz U.*: Zur Beulstabilität von Kreiszyllinderschalen. Dissertation, Universität Karlsruhe (1970).
- [14] *Weingarten V.I., Morgan E.I., Seide P.*: Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under combined internal pressure and axial compression. "AIAA Journ." 3 (1965) No. 6.
- [15] *Thielemann W.F., Esslinger M.*: Beul- und Nachbeulverhalten isotroper Zylinder unter Aussendruck. «Der Stahlbau» 36 (1967) H. 6.
- [16] *Thielemann W.F., Dreyer H.J.*: Beitrag zur Frage der Beulung dünnwandiger, axial gedrückter Kreiszyllinder. «Deut. Vers.f. Luftf. Ber.» (1956) Nr. 17.
- [17] *Wolmir A.S.*: Biegsame Platten und Schalen. Berlin 1962, VEB-Verlag für Bauwesen.

## Das Rechnen mit unstetigen Funktionen in der Baustatik

DK 624.04.001.2

Von Prof. Dr.-Ing. G. Franz

Wir stellen als Ingenieure immer wieder fest, wie spröde unsere mathematischen Hilfsmittel sind: Bei unseren Aufgaben der Stabstatik haben wir es einerseits vielfach mit Einzellasten zu tun oder mit Streckenlasten, die unstetig verlaufen, andererseits wechseln die Abmessungen von Balken oder Stützen mitunter plötzlich (Bild 1). Wie behandeln wir in solchen Fällen die Aufgabe, die Schnittkräfte oder Verformungen zu ermitteln?

Es stehen hierzu folgende Methoden zur Verfügung:

- 1a) Die Zerlegung des Stabes in einzelne Bereiche, in denen Lasten und Querschnitte stetig verlaufen. Zu den Randbedingungen des Gesamtstabes treten dann noch Übergangsbedingungen zwischen den einzelnen Abschnitten, so dass eine grosse Zahl von Konstanten zu bestimmen ist.
- 1b) Benutzt man Abschnitte geringer Länge, so gelangt man zur Differenzenrechnung.
- 2) Die Entwicklung unstetiger Belastungen in Fourier-Reihen. Man weiss, dass sehr viele Reihen-Glieder nötig sind, um zum Beispiel die Wirkung einer Einzellast zu beschreiben.

- 3) Die Ansätze von unstetigen Funktionen in der Form von Operatoren. Sie stammen von *Mikusinsky* [1] und sind neuerdings bei uns durch *Dimitrov* [2] bekannt geworden. Zu erwähnen sind auch in den USA entwickelte Verfahren, über die *Pilkey* [3] berichtet.
- 4) Grafische Verfahren. Sie sind zwar mühsam, aber sehr universell.

Es gibt aber auch noch andere Möglichkeiten. Ich habe 1931 auf Anregung von Prof. *Trefftz* in Dresden eine recht einfache, ingenieurmässige Methode entwickelt, die eine Funktion  $u(a, x)$  benutzt (Bild 2). Sie besitzt ab  $x = a$  den Wert 1 und gestattet so, eine gleichförmige Streckenlast als  $p = qu(a, x)$  darzustellen. Hört diese Streckenlast bei  $x = b$  auf, so hat man einen zweiten Teil mit der Funktion  $u(b, x)$  hinzuzufügen, der ab  $x = b$  die Belastung annulliert:

$$p = q [u(a, x) - u(b, x)]$$

Aber auch eine linear ansteigende Last lässt sich hiermit darstellen, eine Trapezlast oder eine beliebige andere Last, die bei  $x = a$  beginnt.

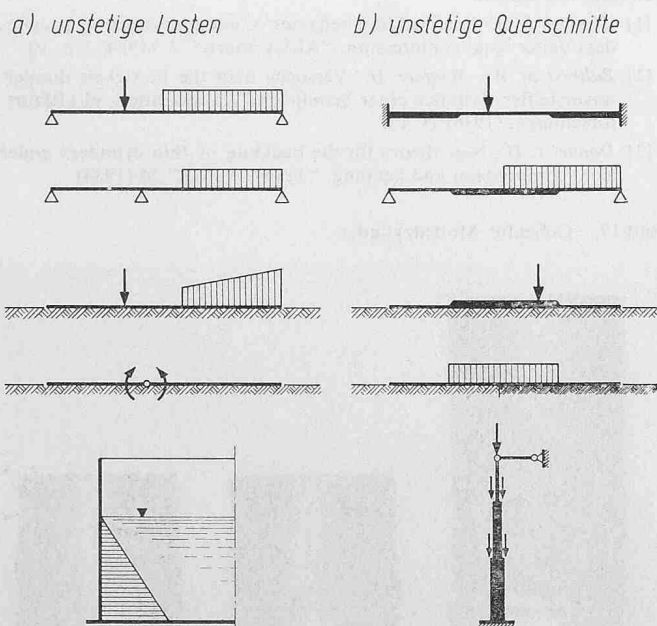


Bild 1. Unstetige Funktionen in der Stabstatik

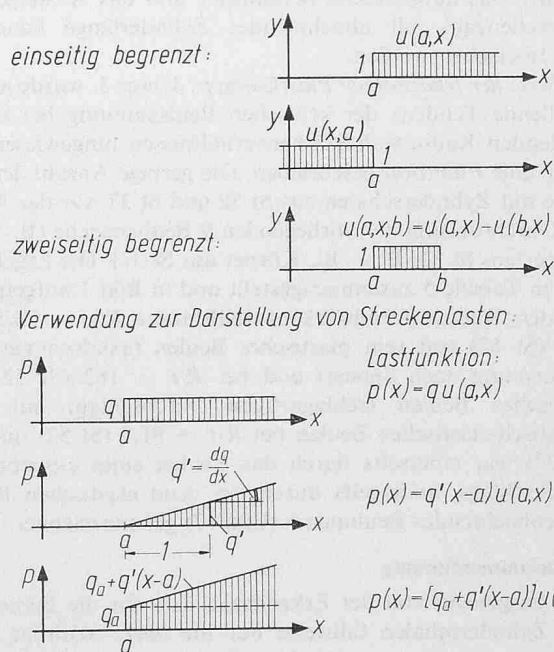


Bild 2. Die unstetige Funktion  $u(a, x)$