

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 88 (1970)  
**Heft:** 35

**Artikel:** Berechnung gekrümmter Träger  
**Autor:** Menn, Christian  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84606>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Ohne grosse Schwierigkeiten lässt sich aber auf dem System der Randlochkarten ein Fachschlüssel aufbauen, der, dem vertieften Fachwissen entsprechend, feiner gegliedert ist. Für das Gebiet, mit dem ein Bau- und Kulturingenieur in Berührung kommt, wurde dieser Schlüssel von I. Berninger in seiner Anleitung bereits ausgearbeitet. Er umfasst 17 Fachgebiete, welche zusammen in 55 Begriffe und schliesslich in 323 Unterbegriffe unterteilt sind. Erweist sich für ein bestimmtes Wissensgebiet das Ordnungsprinzip

als zu wenig leistungsfähig, besteht die Möglichkeit, durch Anwendung eines Spezialschlüssels weiter zu unterteilen.

Die oben beschriebene Anleitung zum Aufbau einer Literaturkartei mit vorgedruckten Schlüsselkarten für das Fachgebiet des Bau- und Kulturingenieurs kann beim Akademischen Kulturingenieurverein, Postfach ETH, Leonhardstrasse 33, 8006 Zürich, zum Preis von Fr. 6.—, zuzüglich Portospesen, bezogen werden.

H. Spetzler, dipl. Kult.-Ing. ETH, 8006 Zürich, Hotzstrasse 11.

## Berechnung gekrümmter Träger

Von Dr. Christian Menn, dipl. Bau-Ing., Chur

DK 624.072.4.001.2

### 1. Vorbemerkung

Da die genauen statischen Berechnungen heute praktisch immer mit Rechenautomaten durchgeführt werden, ist es wichtig, dass dem Ingenieur einfache Näherungsmethoden zur Verfügung stehen, die mit geringem Aufwand genügend genaue Ergebnisse liefern, um die Querschnittswerte rasch, zuverlässig und endgültig festzulegen. Die folgenden Berechnungsmethoden sind vor allem auf dieses Ziel ausgerichtet; iterativ angewendet, dienen sie aber auch zur «genauen» Berechnung gekrümmter Träger.

Im ersten Teil wird die Berechnung kreisförmig gekrümmter Träger, die über den Auflagern torsionsfest eingespannt sind, behandelt, wobei insbesondere auch den Beanspruchungen in Querrichtung Beachtung geschenkt wird. Der zweite Teil befasst sich mit der Berechnung gekrümmter Träger, die über den Auflagern punktförmig (frei verdrehbar) gestützt sind. Es sei hier schon darauf hingewiesen, dass zwischen den beiden Lagerungsarten ein ganz wesentlicher Unterschied besteht.

### 2. Voraussetzungen für die Berechnung gekrümmter Träger mit torsionsfester Einspannung über den Auflagern

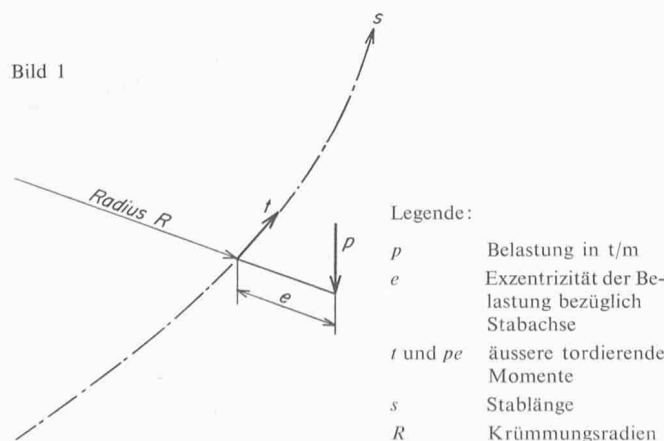
Vorausgesetzt wird, dass die Krümmung zwischen den Auflagern kreisförmig sei; feldweise konstanter Krümmungsradius  $R$ . Im Brückenbau ist auch praktisch immer die vereinfachende Annahme erfüllt, dass die Trägerspannweite  $L$  kleiner ist als der Krümmungsradius  $R$ .

Die Berechnung wird nur für vertikal wirkende Lasten durchgeführt. Die Schnittkräfte werden auf die Stabachse reduziert: Querkraft  $Q$ , vertikal, Biegemoment  $M$  um Horizontalachse und Torsionsmoment  $M_T$  um Stabachse wirkend. Belastungen im positiven Wirkungssinn, Momente als Rechtsschrauben dargestellt (Bild 1).

Die Vorzeichenkonvention für die Schnittkräfte, Momente als Rechtsschrauben, zeigt Bild 2.

### 3. Grundgleichungen

Die Grundgleichungen werden aus den Gleichgewichtsbedingungen am Stab-Element abgeleitet.



$$(1) \quad \frac{dQ}{ds} = -p$$

$$(2) \quad \frac{dM_T}{ds} + \frac{M}{R} = -e \cdot p - t$$

$$(3) \quad \frac{dM}{ds} - \frac{M_T}{R} = Q$$

Gleichung (1) dient zur Berechnung der Querkraft; sie ist genau gleich aufgebaut wie beim geraden Träger.

Gleichung (2) ist die wichtige Ergänzungsgleichung des Problems; sie dient zur Berechnung der Torsionsmomente.

Gleichung (3) ist grundsätzlich gleich aufgebaut wie beim geraden Träger und dient zur Berechnung der Biegemomente.

Sie enthält das Korrekturglied  $\frac{M_T}{R}$ , das aber bei einem

Öffnungswinkel  $\varphi = \frac{L}{R} < 1$  ( $L$  = Trägerspannweite) im allgemeinen sehr klein ist.

Aus den Gleichungen (1) und (3) folgt

$$(4) \quad \frac{d^2 M}{ds^2} = - \left( p - \frac{dM_T}{R ds} \right),$$

und Gleichung (2) schreibt sich umgeformt:

$$(5) \quad \frac{dM_T}{ds} = - \left( \frac{M}{R} + e \cdot p + t \right) = -m_t.$$

### 4. Anwendung

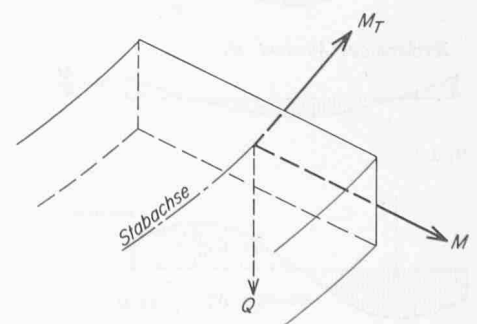
Für die praktische Berechnung bedeuten die Gleichungen (4) und (5) folgendes:

**Biegemomente:**

Die Biegemomente  $M$  werden mit der Formel

$$\frac{d^2 M}{ds^2} = -p$$

in erster Näherung genau gleich berechnet wie beim geraden



Träger mit der Spannweite  $L$ , die der Bogenlänge entspricht. Im allgemeinen und insbesondere für Vorberechnungen genügt die erste Näherung für die Berechnung der Biegemomente.

Wenn dann  $M_T$  bzw.  $\frac{dM_T}{ds}$  bekannt ist, kann aus dem Vergleich von  $p$  und  $\frac{1}{R} \frac{dM_T}{ds}$  sofort abgeschätzt werden, ob der Fehler am Biegemoment (1. Näherung) tolerierbar ist. Für die Berechnung des Biegemomentes mit der Belastung  $p$  bzw.  $p - \frac{1}{R} \frac{dM_T}{ds}$  werden natürlich die üblichen baustatischen Methoden verwendet.

#### Torsionsmomente

Aus der Gleichung (5) können die Torsionsmomente  $M_T$  sehr einfach ermittelt werden, sobald die erste Näherung des Biegemomentes bekannt ist: Zu den äusseren tordierenden Momenten  $e \cdot p$  und  $t$  wird der Anteil  $\frac{M}{R}$  addiert, und dann wird das gesamte tordierende Moment  $m_t$  über die Stablänge aufsummiert (analog wie die Querkraftberechnung bei äusseren Belastungen). Bei beidseitig torsionsfest eingespanntem Träger über den Auflagern ist der Träger bezüglich der Torsionsmomente einfach statisch unbestimmt gelagert. Im Normalfall des Brückenbaues  $\varphi = \frac{L}{R} < 1$  ist der Fehler sehr klein, wenn nun auch das Torsionsmoment wie bei einem geraden Träger berechnet wird: das heisst als statisch bestimmtes Grundsystem dient der einseitig torsionsfest eingespannte Balken. Am andern Trägerende wird als überzählige Grösse das Torsionsmoment  $X = 1$  eingeführt. Aus der Elastizitätsbedingung (an diesem Stabende)

$$(6) \quad \psi = \psi_0 + X \psi_1 = 0$$

( $\psi$  = Stabverdrehung am betreffenden Stabende)

wird das überzählige Torsionseinspannmoment  $X$  bestimmt.  $\psi$  wird mit der Arbeitsgleichung nach der Formel

$$(7) \quad \psi = \int_0^L \frac{M_{T0} M_{T'}}{G J_T} ds$$

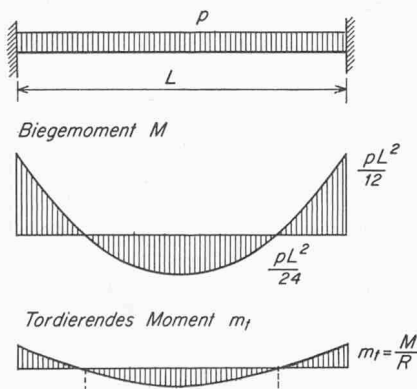


Bild 3

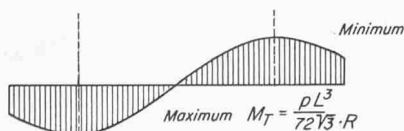


Bild 4

berechnet.

$G$  = Schubmodul  
 $J_T$  = Torsions-Trägheitsmoment

Die Formel beruht auf der St. Venantschen Theorie; für offene Querschnitte (Flanschbiegung) ist sie sinngemäss zu erweitern. Für den Belastungszustand ist  $M_{T0}$  aus

$$(8) \quad M_{T0} = - \int_0^s m_t ds$$

zu berechnen.

$M_{T'}$  bleibt gemäss Voraussetzung (Näherung: gekrümmter Stab wird durch geraden ersetzt) über die ganze Stablänge konstant.

**Beispiel** (Bild 3): Gekrümmter Träger mit Radius  $R$ ; beidseitig biege- und torsionsfest eingespannt. Belastung  $p$ ;  $e$  und  $t = 0$ ;  $L$  auf dem Bogen gemessen (Abwicklung).

Das Torsionsmoment, aus Symmetriegründen von der Mitte her aufsummiert, zeigt Bild 4.

Aus dem Vergleich von  $p$  und  $-\frac{1}{R} \frac{dM_T}{ds}$  bzw.  $\frac{1}{R} m_t$

ist der am Biegemoment in der ersten Näherung begangene Fehler sofort ersichtlich.

#### Zusammenfassung der Berechnung:

- Berechnung der Biegemomente wie beim geraden Träger (Spannweite = Bogenlänge)
- Berechnung des tordierenden Momentes

$$(9) \quad m_t = \frac{M}{R} + ep + t$$

- Berechnung des Torsionsmomentes  $M_T$  durch Aufsummieren von  $m_t$ ; im allgemeinen einfach statisch unbestimmtes Problem.
- Kontrolle des Fehlers bei der Berechnung der ersten Näherung des Biegemomentes durch Vergleich von  $\frac{1}{R} m_t$  mit der äusseren Belastung.

#### 5. Querbeanspruchung

Durch die Einleitung der tordierenden Momente wird der Querschnitt, der im allgemeinen aufgelöst ist (Hohlkasten oder Plattenbalken) im Quersinn beansprucht. Diese Beanspruchung darf nicht vernachlässigt werden; die entsprechenden konstruktiven Massnahmen sind unbedingt vorzusehen. Zur Veranschaulichung der Querverbiegung wird Gleichung (2) für  $e$  und  $t = 0$  nochmals auf andere Art abgeleitet: Durch die Längsbiegung  $M$  entstehen im Querschnitt

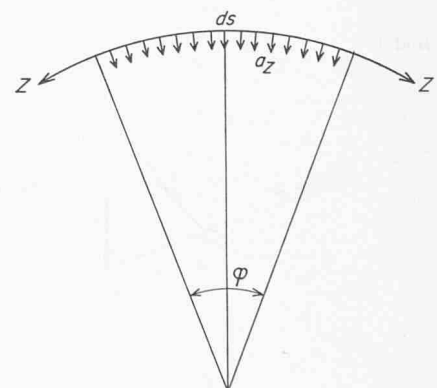


Bild 5

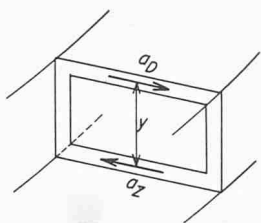


Bild 6a

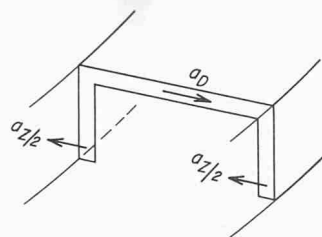


Bild 6b

Druck- und Zugspannungen, die zu den resultierenden inneren Kräften  $D$  und  $Z$  zusammengefasst werden können.

$$(10) \quad M = D \cdot y = Z \cdot y \quad (y = \text{Hebelarm der inneren Kräfte})$$

Infolge der Krümmung im Grundriss verursachen die Kräfte  $D$  und  $Z$  die Ablenkkräfte  $a_D$  und  $a_Z$  (Bilder 5 und 6). Das tordierende Moment beträgt

$$(12) \quad m_t = a_D \cdot y; \quad y = \frac{M}{D}$$

$$a_D = \frac{D}{R}$$

$$(13) \quad m_t = \frac{D}{R} \cdot \frac{M}{D} = \frac{M}{R}$$

und das Torsionsmoment

$$(14) \quad M_T = - \int m_t \cdot ds$$

Aus dieser Ableitung sind die Querbeanspruchungen (Momente und Querkräfte im Quersinn) bei gekrümmten Trägern ohne weiteres ersichtlich.

### 5.1. Plattenbalken

Die  $M$ -Fläche im Quersinn zeigt Bild 7. Die Biegemomente im Quersinn führen dazu, dass die bogenäussere Rippe belastet und die bogeninnere Rippe entlastet wird. Diese Betrachtung führt praktisch zum gleichen Ergebnis wie die einfache Überlegung der Lastaufteilung auf äussere und innere Rippe, je nach dem die Last ausserhalb oder innerhalb der Auflager-Verbindungs-Linie liegt (Bild 8).

Die Quermomente infolge Trägerkrümmung sind schon bei kleinen Öffnungswinkeln von gleicher Grössenordnung wie die Fahrbahnplatten-Momente. Rippen und Fahrbahnplatte müssen unbedingt für diese Quermomente bemessen werden.

### 5.2. Kastenquerschnitt

$$(15) \quad m_t = a_D \cdot h = a_Z \cdot h = a \cdot h$$

$h \sim y$  = Hebelarm der inneren Kräfte bzw. Achsabstand der oberen und unteren Platte (Bild 9)

$b \cong$  Achsabstand der Rippen

Unter der Voraussetzung, dass das Torsionsmoment einen über dem ganzen Querschnitt konstanten Schubfluss (Bild 10)

$$(16) \quad S = \tau_i d_i \quad \begin{array}{l} \tau_i = \text{Schubspannung} \\ d_i = \text{Platten- bzw. Rippenstärke} \end{array}$$

auslöst, ist

$$(17) \quad M_T = 2 S b h = 2 S F \text{ bzw.}$$

$$(18) \quad \tau_i = \frac{M_T}{2 F d_i} \quad (\text{Bredt'sche Formel})$$

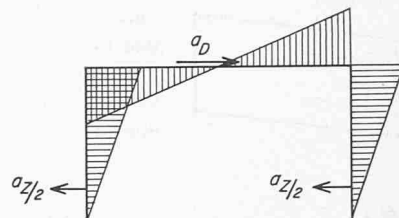


Bild 7

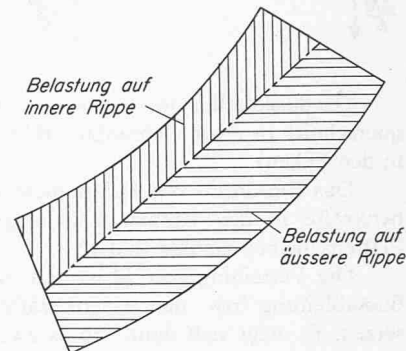


Bild 8

Das tordierende Moment aus der Ableitung des Schubflusses

$$(19) \quad S' = \frac{dS}{ds}$$

entspricht somit dem äusseren tordierenden Moment  $m_t$ .

$$(20) \quad 2 S' b h = - m_t.$$

Das Gleichgewicht am Querschnittselement von der Länge  $ds$  besagt nun (Bild 11):

$$(21) \quad S' b = - \frac{m_t}{2 h} = - \frac{a h}{2 h} = - \frac{a}{2},$$

$$(22) \quad S' h = - \frac{a}{2} \frac{h}{b}.$$

Der Querschnitt wird im Quersinn somit beansprucht gemäss Bild 12. Diese Beanspruchungsannahme ist – wie die gesamte vorliegende Berechnung – als Näherung zu betrachten; da die Verträglichkeitsbedingungen in den Ecken im allgemeinen nicht genau erfüllt sind, ist sie nicht ganz korrekt, unter anderem eine Folge der in der Berechnung vernachlässigten Wölbspannungen.

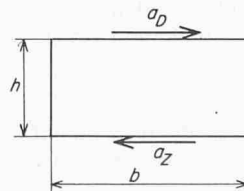


Bild 9

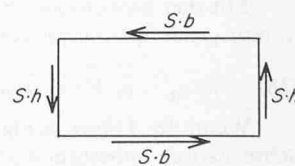


Bild 10

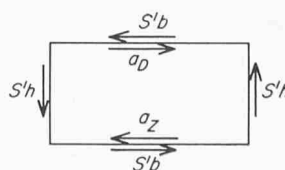


Bild 11

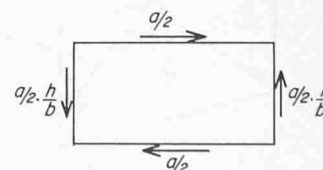


Bild 12

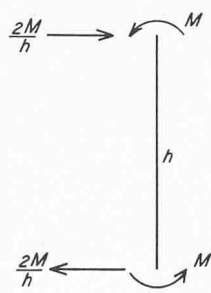
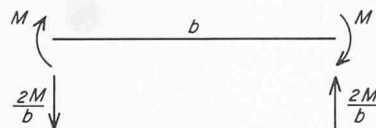
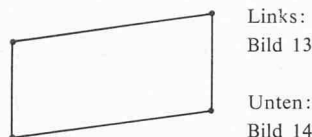


Bild 15

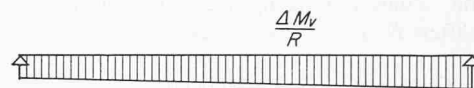
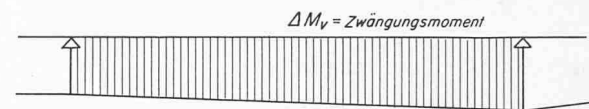


Bild 19

Die dargestellte Querbeanspruchung verformt den Kastenquerschnitt zu einem Rhombus, Bild 13 (Annahme: Gelenke in den Ecken).

Das Einführen von Eckmomenten vermindert die Scheibenkräfte in den Rippenscheiben gemäss Bild 14, in den Plattenscheiben gemäss Bild 15.

Die Verteilung von  $M$  ist dem Stab entlang der Schubflussableitung bzw. den Ablenkkraften  $a$  entsprechend anzusetzen. Es zeigt sich dann, ob es zweckmässig ist, eine Eckarmierung zu wählen oder Querträger einzubauen, die die Querschnittsform gewährleisten. Die Querträger sind den auftretenden Scheibenkräften entsprechend zu bemessen.

Bei gekrümmten Kastenträgern, die im Freivorbau erstellt werden, ist dieser Querbeanspruchung ganz besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Da die Scheiben, als Konsolen wirkend, sehr weich sind, entstehen besonders grosse Eckmomente.

## 6. Vorspannung

Die Torsionsmomente infolge Vorspannung am zwängungsfrei gelagerten Träger lassen sich auf zwei Arten bestimmen.

1. Durch Berechnung der tordierenden Momente infolge Vorspannung und Integration derselben nach Gleichung (5)

$m_t = \frac{M}{R} + t$ . Dabei ist  $M$  das Biegemoment infolge Vorspannung und  $t$  das tordierende Moment infolge der Kabelumlenkkraft.

2. Durch direkte Bestimmung des Torsionsmomentes aus dem Kabelverlauf. Der Spannkraft-Vektor  $\vec{V}$  wird dabei auf eine Normalebene zur Schubmittelpunkt-Achse projiziert. Das Moment des projizierten Spannkraft-Vektors  $\vec{V}$  bezogen auf den Schubmittelpunkt ergibt dann direkt das Torsionsmoment infolge Vorspannung (Bild 16).

$$(27) \quad M_{T0} = \vec{V} \cdot \eta.$$

Mit den Einheitsvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  und den Abständen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  der Spannkraft vom Schubmittelpunkt bedeutet dies

$$(28) \quad M_{T0} = \vec{n}_1 \cdot \vec{V} \cdot \eta_2 + \vec{n}_2 \cdot \vec{V} \cdot \eta_1.$$

Wenn der Träger bezüglich der Verdrehung um die Stabachse statisch unbestimmt gelagert ist, muss analog Gleichung

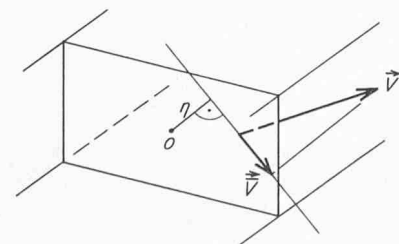


Bild 16

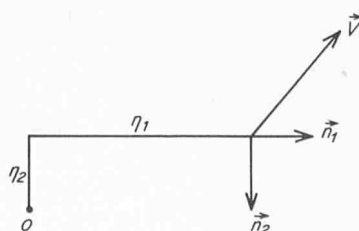


Bild 17

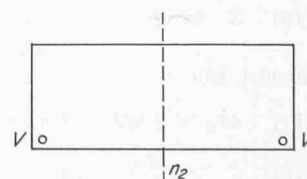


Bild 18

(6) und (7) die überzählige Grösse bestimmt werden. Das endgültige Torsionsmoment infolge Vorspannung lautet dann wieder

$$(29) \quad M_T = M_{T0} + X M_{Tx=1}$$

Aus dieser Ableitung ist klar ersichtlich, dass eine Vorspannung, die symmetrisch zur Querschnittsachse  $n_2$  geführt wird, kein Torsionsmoment und demzufolge auch keine Querschnittsverdrehung ergibt (Bild 18). Dies ist der Normalfall der Kabelführung.

Wenn der Träger dagegen bezüglich Biegung Zwängungen aufweist, entsteht ein Torsionsmoment, das durch die «Parasitär momente» hervorgerufen wird. Dieses Torsionsmoment, verursacht durch die Zwängungsmomente  $\Delta M_v$  (Parasitär momente) über den Auflagern, kann wieder – wie früher – berechnet werden.

$$m_t = \frac{\Delta M_v}{R}$$

$$(30) \quad M_T = - \int m_t ds = - \int \frac{\Delta M_v}{R} ds.$$

Beispiel: Durchlaufender Balken (Bild 19).

Da eine zur Querschnittsachse symmetrisch verlaufende Vorspannung keine Torsionsmomente erzeugt, treten im Querschnitt nur lokale Querbeanspruchungen auf. Dies lässt sich auch auf Grund der Ablenkkraft zeigen (Bild 20).

Innere Kräfte im Beton:

Normalkraft in S  $N = V$

Momente  $M = V \cdot e = D \cdot y = Z \cdot y.$

Tordierendes Moment (Beton)

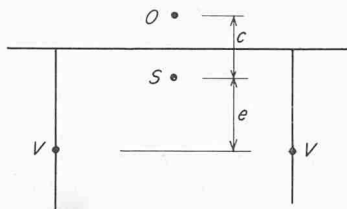


Bild 20

$$(31) \quad m_t^{(B)} = \frac{N}{R} \cdot c + a \cdot y;$$

$$a = \frac{D}{R} = \frac{Z}{R}.$$

Tordierendes Moment (Spannstahl)

$$(32) \quad m_t^{(V)} = -\frac{V}{R} (e + c).$$

Gesamtes tordierendes Moment (Beton + Spannstahl)

$$(33) \quad m_t = -\frac{V}{R} (e + c) + \frac{N}{R} c + \frac{D}{R} \cdot y = 0$$

Die Quermomente zeigt Bild 21.

Bei vorgespannten Trägern ist in konstruktiver Hinsicht folgendes zu beachten:

- Vermeidung des Herausreissens der Spannkabel, die längs der Rippeninnenseite verlaufen (Bild 22). Die Ablenkraft beträgt  $a_v = V/R$ ; sie wird am besten durch Bügel in die Rippe hineinverankert. Der Bügelquerschnitt beträgt:

$$(34) \quad F_B = \frac{a_v \cdot e_B}{\sigma_B} \quad \begin{array}{l} e_B = \text{Bügelabstand} \\ \sigma_B = \text{zul. Stahlspannung} \end{array}$$

- Aufnahme der lokalen Rippenbiegung; lokale Quermomente infolge Vorspannung (Bild 23).

Übliche, achssymmetrische Vorspannung (ohne Zwängung) beeinflusst weder die Torsionsmomente noch die Querbiegemomente im Querschnitt.

Die Berechnung der Querbeanspruchung ist bei achssymmetrischer Vorspannung durchzuführen für:

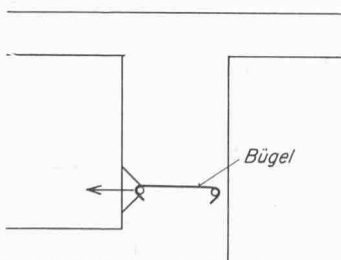
- Eigengewicht
- Zwängung durch Vorspannung
- Nutzlasten

Die Erzeugung von Torsionsmomenten durch Vorspannung erfolgt am besten durch Einlegen von gekrümmten Spannkabeln in der Fahrbahnplatte und in der Druckplatte. Eine andere Möglichkeit besteht darin, dass die bogenäussere Rippe stärker vorgespannt ist; usw.

**Beispiel:** Kastenquerschnitt mit Vorspannung in den Platten (Bild 24). Randbedingungen: einfacher Balken mit torsionsfester Einspannung über den Auflagern; Symmetrie.

Torsionsmomente berechnet:

- mit Umlenkkraften:



Links:  
Bild 22

Unten:  
Bild 23

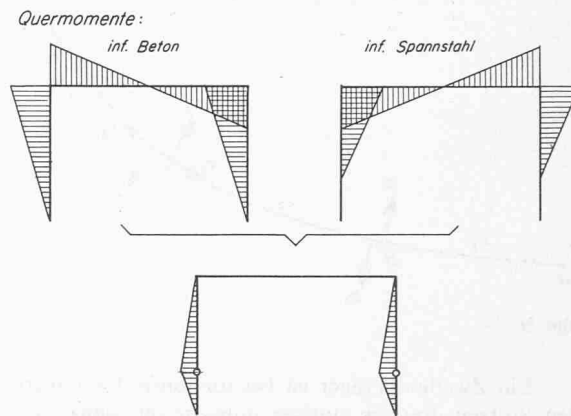


Bild 21

$$a_v = \frac{8fV}{L^2} \rightarrow m_t = a_v \cdot h$$

Torsionsmoment in Feldmitte  $M_T = 0$

Torsionsmoment über den Auflagern  $M_T = a_v h \frac{L}{2} =$

$$= \frac{4fVh}{L}$$

- auf direktem Weg:

Torsionsmoment in Feldmitte  $\bar{V} = 0 \rightarrow M_T = 0$

Torsionsmoment über den Auflagern  $\bar{V} = \frac{4fV}{L} \rightarrow M_T =$

$$= \frac{4fVh}{L}$$

## 7. Gekrümmte Träger ohne torsionsfeste Einspannung über den Auflagern

Wie bereits erwähnt, besteht zwischen gekrümmten Trägern mit bzw. ohne torsionsfeste Einspannung über den Auflagern ein wesentlicher Unterschied. Da zur Gewährleistung der Stabilität gegen Verdrehen im vorliegenden Falle mindestens drei Auflagerpunkte notwendig sind, müsste die näherungsweise Berechnung der Biegemomente wie bei einem geraden Träger zu völlig falschen Ergebnissen führen.

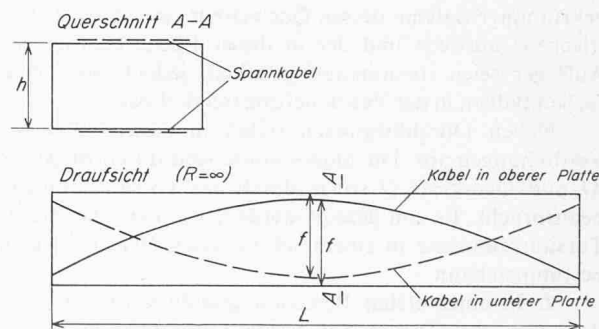
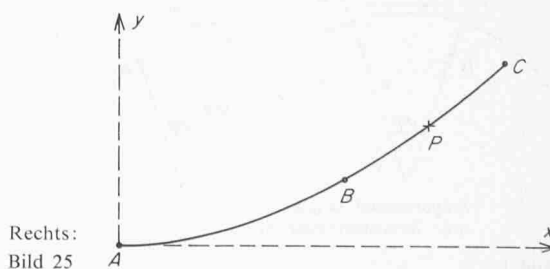


Bild 24



Rechts:  
Bild 25



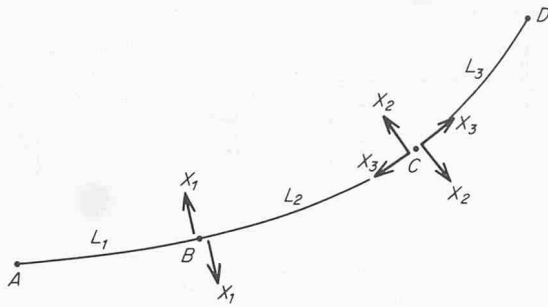


Bild 26

Ein Zweifeld-Träger ist bei torsionsfester Lagerung über den Stützen dreifach statisch unbestimmt, ohne torsionsfeste Lagerung dagegen statisch bestimmt. Hieraus ergibt sich nun auch die (bedeutend kompliziertere) Berechnungsmethode, die bei Trägern ohne torsionsfeste Einspannung über den Stützen anzuwenden ist.

Als Grundsystem dient im allgemeinen der Zweifeldbalken, dessen Auflagerreaktionen mit drei Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden (Bild 25). Die Schnittkräfte (Querkräfte, Biege- und Torsionsmomente) sind damit bestimmt.

## Angenäherte Ermittlung der Biege- und Torsionsmomente in schwach gekrümmten Trägern

DK 624.072.4.001.2

Von M. Hartenbach, dipl. Ing., St-Blaise

Angeregt durch den Vortrag von Ing. Dr. Ch. Menn an der Tagung der FGBH vom 8.11.63 und in Anlehnung an dessen Publikation (SBZ 19.3.64, 82. Jahrgang, H. 12, S. 185) versucht der Verfasser eine genäherte Berechnungsart der selben Probleme darzustellen.

Ausgehend vom Grundsystem des einfachen gekrümmten Balkens, der an den Auflagern torsionsfest gehalten ist, werden die Biege- und Torsionsmomente schrittweise mit den geläufigen Methoden der Baustatik ermittelt. Die statische Bedeutung des Grundsystems und der Überzähligen soll bei jedem Schritt erkennbar sein.

Im letzten Abschnitt werden die Beispiele der SBZ vom 19.3.64 berechnet und die Ergebnisse verglichen.

1. Angenommen wird ein im Grundriss mit dem Radius  $R$  gekrümmter Balken, dessen Querschnitt eine vertikale Symmetrieebene aufweist und der in dieser Ebene belastet ist. Die Auflager seien torsionssteif gehalten, jedoch wie beim einfachen Balken in der Vertikalebene frei drehbar.

Neben Durchbiegungen treten in diesem Balken auch Verdrehungen auf. Die Querschnitte sind durch Biegemoment  $M$  und Querkraft  $Q$  sowie durch ein Torsionsmoment  $M_T$  beansprucht. Es soll gezeigt werden, wie man die Biege- und Torsionsmomente in einem schrittweisen Verfahren genähert bestimmen kann.

2. In einer ersten Berechnungsstufe wird vorausgesetzt, dass sich der Träger nur vertikal durchbiegen kann. Der

$$(35) \quad \begin{cases} A + B + C = P; \\ Bx_B + Cx_C = P \cdot x_B \\ By_B + Cy_C = P \cdot y_P \end{cases}$$

Bei Trägern mit gemischten Auflagerbedingungen, z. B. Dreifeldträger mit torsionsfester Einspannung bei den Endauflagern und Punktlagerung über den Stützen, werden das Grundsystem und die überzähligen Grössen gemäss Bild 26 gewählt.

Über der Stütze B ist nur ein Biegegelenk eingeschaltet, die torsionsfeste Verbindung zwischen den Trägerteilen  $L_1$  und  $L_2$  bleibt dagegen auch im Grundsystem erhalten. Über der Stütze C ist der Träger dagegen vollständig getrennt. Die Auflagerreaktionen A, B, C und  $M_{TA}$  am Grundsystem des ersten Trägerteils (A-C) sind durch drei Gleichgewichtsbedingungen und eine Momentbedingung in B bestimmt.

Die Torsionsmomente infolge Vorspannung werden nach den in 6. gemachten Angaben bestimmt. Die «Parasitär-momente», das heisst die überzähligen Grössen infolge Vorspannung, sind aus den Elastizitätsbedingungen zu bestimmen.

Adresse des Verfassers: Dr. sc. techn. C. Menn, dipl. Bau-Ing., 7000 Chur, Quaderstrasse 18.

Träger soll also durch gedachte Festhaltungen auf seine ganze Länge am Verdrehen verhindert werden. Die Grösse von  $M$  kann man für die Trägerabwicklung  $L$  wie für einen geraden Balken bestimmen. Die Richtungsänderung des Vektors  $M$  wird durch die entsprechenden Festhaltungen bewirkt.

3. In der zweiten Stufe wird die in der ersten Stufe eingeführte Festhaltung gelöst, so dass sich der Träger frei verdrehen kann. Durch eine gedachte Stützung des Trägers auf seine ganze Länge soll aber eine weitere Durchbiegung verhindert sein.

Die Richtungsänderung des Biegemomentes  $M$  am gekrümmten Balken wird gemäss Bild 1 durch ein spezifisches Torsionsmoment  $m_t$  bewirkt. Analog der Umlenkkraft eines Spannkabels  $u = \frac{Z}{R}$  t/m' erhält man  $m_t = \frac{M}{R}$  oder geometrisch betrachtet:

$$m_t \cdot ds : M = ds : R, \text{ woraus } m_t = \frac{M}{R} \text{ mt/m'}. \text{ Summiert man}$$

$m_t$  über den Balken, so erhält man das Torsionsmoment  $M_{Tx}$ . Man kann  $M_{Tx}$  auch als «Querkraft» der «Belastung»  $m_t$  auffassen. Die  $G \cdot J_T$ -fache Verdrehung erhält man durch summieren von  $d\varphi_x = M_{Tx} \cdot ds$ . Für Auflager, die sich quer nicht verdrehen können, hat man die Randbedingungen  $\varphi_A = \varphi_B = 0$ .

Für ein Torsionsmoment, das einseitig an einem Balken angreift, erhält man gemäss Bild 2:

$$\varphi_{11} \cdot G \cdot J_T = 1 \cdot L \quad (L = \text{Balkenlänge})$$

$$G = \text{Gleitmodul} = 3/7 \cdot E$$

$$J_T = \text{Trägheitsmoment gegen Verdrehung}$$

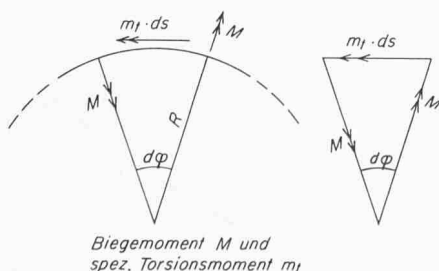


Bild 1



Bild 2