Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 88 (1970)
Heft: 24: Sonderheft zum 70. Geburtstag von Dr. C. Seippel

Artikel: Die Beanspruchung schwingender Schaufeln in Resonanz
Autor: Traupel, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-84535

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Beanspruchung schwingender Schaufeln in Resonanz

DK 621.165:62–253.5:539.433

Von Prof. Dr. **W. Traupel**, ETH, Zürich

Zusammenfassung

Die Arbeit, die durch periodische Kräfte an einer schwingenden Schaufel geleistet wird, hängt davon ab, ob diese Kräfte längs der ganzen Schaufel in gleicher Phase sind oder ob Phasenverschiebungen auftreten. Diese Arbeit ist ihrerseits massgebend für die Resonanzamplitude und damit für die schwingende Beanspruchung der Schaufel. Es zeigt sich, dass Schwingungen höherer Ordnung beim Vorhandensein solcher Phasenverschiebungen unter Umständen sehr viel stärker angefacht werden können als bei längs der Schaufel konstanter Phase.

Bezeichnungen

B Dämpfungskonstante
c die Phasenverschiebung kennzeichnende Konstante
D_n dynamischer Faktor (Ordnung n)
E Elastizitätsmodul
f Schaufelquerschnitt
G Schubmodul
H_n Ausdruck Gl. (32)
$H_n{}^*$ Ausdruck Gl. (36)
H_{tn} Ausdruck Gl. (53)
$H_{tn}{}^*$ Ausdruck Gl. (58)
J Trägheitsmoment
J_p polares Trägheitsmoment
J_t Trägheitsmoment gegen Torsion
K verallgemeinerte Federkonstante
l Schaufellänge
M verallgemeinerte Masse
M_b Biegemoment
M_{bi} Vergleichs-Biegemoment
M_t Torsionsmoment
M_{ti} Vergleichs-Torsionsmoment
ΔM_0 Ausdruck Gl. (46)
Δm oszillierendes Torsionsmoment pro Längeneinheit
Δm_0 Amplitude von Δm
n Ordnungszahl
$\overline{P}$ mittlere statische Schaufelkraft
ΔP_0 Ausdruck Gl. (15)
$\Delta P_0{}^*$ Amplitude der am Schaufelende angreifend gedachten oszillierenden Kraft
$\overline{p}$ Kraft pro Längeneinheit (statisch)
p oszillierende Kraft pro Längeneinheit
p_0 Amplitude von p
q Auslenkung an ausgezeichneter Stelle (z.B. Schaufelende)
q_0 Amplitude von q
S, S_t Stimulus für Biegeschwingung bzw. Torsionsschwingung
S^*, $S_t{}^*$ Stimulus für Biegeschwingung bzw. Torsionschwingung, wenn Einzelkraft an freiem Schaufelende
s Profilsehnenlänge
T Bewegungsenergie
t Zeit
u_n die Verformung bei der Schwingung n-ter Ordnung kennzeichnende Funktion
W Arbeit
W_d Dämpfungsarbeit
W_t Widerstandsmoment gegen Torsion
x Koordinate längs Schaufel
Y örtliche Amplitude
y momentane örtliche Auslenkung
γ Verdrillungswinkel
δ logarithmisches Dekrement
δ_t logarithmisches Dekrement bei Torsionsschwingung
ϑ Verhältnis J/J_0
ϑ_t Verhältnis J_t/J_{t0}
$\varkappa_n$ Eigenwert, Ordnung n
ν Eigenfrequenz
ξ dimensionslose Koordinate x/l
ϱ Dichte
σ_a Spannungsamplitude
σ_{bi} Vergleichs-Biegespannung
τ Winkel in Ansatz Gl. (2)
τ_a Schubspannungsamplitude
τ_i Vergleichs-Schubspannung
φ Phasenwinkel
Ψ potentielle Energie
ω Kreisfrequenz

1. Gleichung der Spannungsamplitude von Biegeschwingungen

In den nachfolgenden Ausführungen wird teilweise Bekanntes wiederholt, damit die Zusammenhänge vollständig überblickt werden können. – Wir betrachten die Schaufel als einen prismatischen Stab. Eine Eigenschwingung mit bestimmter Frequenz, die wir herausgreifen, erfolgt dann in einer Ebene, auf welcher die massgebenden Hauptträgheitsachsen der sämtlichen Schaufelquerschnitte senkrecht stehen. Die in diese Ebene fallende Komponente des zeitlichen Mittelwertes der auf die Schaufel einwirkenden Strömungskräfte sei $\overline{P}$. Wir nehmen an, dass diese Kraft über die Schaufelhöhe gleichmässig verteilt sei. Sind in der Tat die Durchtrittsgeschwindigkeit des Mediums durch die betrachtete Schaufelreihe und der spezifische Arbeitsumsatz in der Stufe längs des Radius r konstant, dann wird die innerhalb eines Ringelementes von der radialen Ausdehnung dr umgesetzte Leistung proportional dem Querschnitt des Ringelementes, also proportional $r\,dr$. Da aber auch die Umfangsgeschwindigkeit proportional r ist, folgt daraus, dass die Kraft pro Einheit der radialen Schaufelerstreckung längs r konstant ist, womit die getroffene Annahme ihre Berechtigung erhält. Mit l als Schaufelhöhe wird der Wert der Kraft pro Längeneinheit

$$(1) \qquad \overline{p} = \frac{\overline{P}}{l}.$$

Diesem Wert überlagert sich ein periodisch variierender Anteil, von dem wir nur diejenige Ordnung herausgreifen, die nach Voraussetzung mit der betrachteten Schaufelschwingung in Resonanz trete. Sie möge durch

$$(2) \qquad \Delta p = \Delta p_0 \,[\sin\tau \sin\omega t + \cos\tau \cos\omega t]$$

beschrieben werden. Hier ist τ ein Winkel, der dazu dient, die Phase der erregenden Kraft anzugeben. Lässt man τ längs der Schaufel variieren, so ist damit jene Phasenverschiebung eingeführt, deren Einfluss wir untersuchen. Die Amplitude Δp_0, die längs der Schaufel konstant sei, wird zu $\overline{p}$ in Beziehung gebracht durch

$$(3) \qquad \Delta p_0 = S\,\overline{p}.$$

Der dadurch definierte Faktor S ist der durch *Prohl* [1] eingeführte *Stimulus*.

Die Bewegung der Schaufel in Resonanz kann beschrieben werden durch

$$(4) \qquad y = Y(x) \sin(\omega t - \varphi),$$

vgl. auch Bild 1. Wenn wir setzen [1])

$$(5) \qquad y(l,t) = q(t), \qquad Y(l) = q_0,$$

[1]) Bei beidseitig gehaltener oder eingespannter Schaufel ist q_0 der Wert Y an der Stelle, wo der Ausschlag maximal wird.

so ist offenbar

(6) $q = q_0 \sin(\omega t - \varphi)$.

Ebenso lässt sich dann setzen

(7) $y = q\,u(x), \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = q\,\dfrac{d^2u}{dx^2}$,

wo $u(x) = Y(x)/Y(l)$ die Schwingungsform in geeignet normierter, dimensionsloser Weise darstellt.

Die potentielle Energie der ausgebogenen Schaufel ist in einer beliebigen Lage

(8) $$\Psi = \int_0^l \frac{M_b^2}{2EJ}\,dx = \frac{E}{2}\int_0^l J\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx = q^2\,\frac{E}{2}\int_0^l J\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx,$$

wobei von der Differentialgleichung der elastischen Linie Gebrauch gemacht ist. Da

(9) $$K = E\int_0^l J\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx$$

eine Konstante ist, (die u.a. für die gegebene Schwingungsform $u(x)$ charakteristisch ist), kann (8) auch in der Form

(10) $$\Psi = \frac{K}{2}\,q^2$$

dargestellt werden.

Die Bewegungsenergie der Schaufel ist

(11) $$T = \frac{\rho}{2}\int_0^l \dot{y}^2 f\,dx = \dot{q}^2\,\frac{\rho}{2}\int_0^l u^2(x)\,f\,dx$$

oder mit der Konstanten

(12) $$M = \rho\int_0^l u^2 f\,dx$$

auch

(13) $$T = \frac{M}{2}\,\dot{q}^2.$$

Die Arbeit der äusseren Kräfte, die an der Schaufel während eines Zeitintervalls dt geleistet wird, während dessen ein Punkt der Schaufel den Weg dy zurücklegt, ist

(14) $$dW = \int_0^l (\Delta p\,dy)\,dx = dt\int_0^l (\Delta p\,\dot{y})\,dx = \dot{q}\,dt\int_0^l \Delta p u\,dx =$$
$$= \dot{q}\,\Delta\tau_0\,dt\,[(\int_0^l u\sin p\,dx)\sin\omega t + (\int_0^l u\cos\tau\,dx)\cos\omega t].$$

Die beiden in runder Klammer geschriebenen Integrale sind konstante Grössen. Damit lässt sich aber der Ausdruck in eckiger Klammer als reine Sinusfunktion der Zeit schreiben, wenn man nur den an sich willkürlichen Nullpunkt des Zeitmassstabes um einen Betrag verschiebt, der durch den Winkel ψ von Bild 2 gegeben ist. Die entsprechende Amplitude ist dann

(15) $$\Delta P_0 = \Delta p_0\,[(\int_0^l u\sin\tau\,dx)^2 + (\int_0^l u\cos\tau\,dx)^2]^{\frac{1}{2}},$$

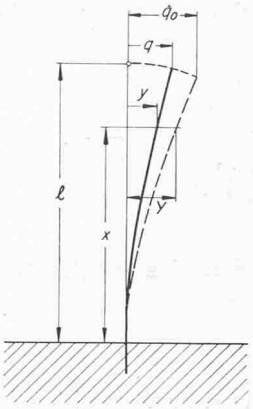

Bild 1. Zur Biegeschwingung einer Schaufel

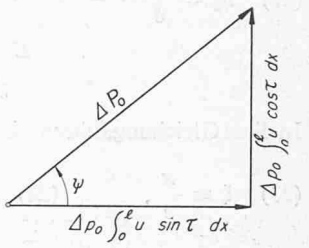

Bild 2. Zur Veranschaulichung von Gl. (15)

und die Arbeit dW kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der Form

(16) $dW = \Delta P_0 \sin(\omega t)\,\dot{q}\,dt$

geschrieben werden.

Die Arbeit, die durch Dämpfung dissipiert wird, während sich die Koordinate q um dq verschiebt, lässt sich durch einen Ausdruck von der Form

(17) $dW_d = B\,\dot{q}\,dq$

wiedergeben, wo B eine Konstante ist. In der Tat sind alle Deformationsänderungen proportional dq, alle Deformationsgeschwindigkeiten proportional $\dot{q}$. Das Ergebnis einer Integration, welche die dissipierte Arbeit liefern würde, lässt sich also sicher in eine Konstante einschliessen.

Die Energiebilanz einer unendlich kleinen Teilbewegung lautet nun

(18) $d\Psi + dT + dW_d = dW$.

Die Ausdrücke für $d\Psi$ und dT gewinnen wir aus (10) und (13) durch Ableiten nach der Zeit und Multiplikation mit dt. Wenn wir dann noch in (17) dq durch $\dot{q}\,dt$ ersetzen, wird die Energiegleichung

$$K\,q\,\dot{q}\,dt + M\,\dot{q}\,\ddot{q}\,dt + B\,\dot{q}^2\,dt = \Delta P_0 \sin(\omega t)\,\dot{q}\,dt$$

oder, wenn wir die triviale Lösung $\dot{q} = 0$ ausschliessen

(19) $M\ddot{q} + B\,q + K\,q = \Delta P_0 \sin\omega t$.

Dies ist die klassische Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung eines einfachen Oszillators. Ist die Dämpfungskonstante B klein, so ist die Kreisfrequenz der Eigenschwingung bekanntlich

(20) $$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}.$$

Ihr ist nach Voraussetzung die Frequenz der rechts erscheinenden Erregungskraft gleich. Auch die Resonanzamplitude q_0 lässt sich aus der Theorie des einfachen Oszillators übernehmen. Sie ist

(21) $$q_0 = \frac{\pi}{\delta}\,\frac{\Delta P_0}{K},$$

wo δ das logarithmische Dekrement der freien Schwingung ist. Man beachte, dass bei kleiner Dämpfung $u(x)$ in Resonanz stets mit einer Eigenschwingungsform (Eigenfunktion) praktisch identisch ist. Für jede Schwingungsordnung ergeben sich so besondere Werte der Konstanten K, M und ΔP_0.

Wenn wir nun in (21) K und ΔP_0 durch die Ausdrücke nach (9) und (15) einsetzen, folgt

$$(22)\quad q_0 = \frac{\pi}{\delta}\,\frac{\Delta p_0\,[(\int_0^l u \sin\tau\,dx)^2 + (\int_0^l u\cos\tau\,dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{E\int_0^l J\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx}.$$

In diese Gleichung führen wir noch die dimensionslosen Grössen

$$(23)\quad \xi = \frac{x}{e}, \qquad (24)\quad \vartheta = \frac{J}{J_0}$$

ein, wobei J_0 das Trägheitsmoment an einer ausgezeichneten Stelle, zweckmässig der Einspannstelle ist. Ausserdem ersetzen wir Δp_0 nach (1) und (3) durch $S\overline{P}/l$. Wenn wir schliesslich noch Ableitungen nach ξ durch Akzente andeuten, schreibt sich Gl. (22) in der Form

$$(25)\quad q_0 = S\,\frac{\pi}{\delta}\,\frac{\overline{P}\,l^3}{E\,J_0}\times$$
$$\times\frac{[(\int_0^1 u(\xi)\sin\tau(\xi)\,d\xi)^2 + (\int_0^1 u(\xi)\cos\tau(\xi)\,d\xi)^2]^{\frac{1}{2}}}{\int_0^1 \vartheta(\xi)\,u''^2(\xi)\,d\xi}.$$

Nun interessiert allerdings letzten Endes nicht der Ausschlag der Schaufel an einer ausgezeichneten Stelle, sondern die grösste durch die Schwingung hervorgerufene Spannungsamplitude σ_a, die in der Regel an der Einspannstelle, also in $\xi = 0$ auftritt. Das Biegemoment an jener Stelle ist

$$(26)\quad M_b(0) = EJ_0\left.\frac{d^2Y}{dx^2}\right|_{x=0} = EJ_0\,q_0\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{EJ_0\,q_0}{l^2}\,u''(0)$$

oder, nach Ersatz von q_0 durch den Ausdruck nach Gl. (25)

$$(27)\quad M_b(0) = S\,\frac{\pi}{\delta}\,\overline{P}\,l\,\times$$
$$\times\frac{u''(0)\,[(\int_0^1 u(\xi)\sin\tau(\xi)\,d\xi)^2 + (\int_0^1 u(\xi)\cos\tau(\xi)\,d\xi)^2]^{\frac{1}{2}}}{\int_0^1 \vartheta(\xi)\,u''^2(\xi)\,d\xi}.$$

Hieraus liesse sich auf die Biegespannung im Einspannquerschnitt schliessen. Besonders anschaulich wird das Ergebnis indessen, wenn man $M_b(0)$ dividiert durch das Biegemoment

$$(28)\quad M_{bi} = \frac{\overline{P}\,l}{2},$$

das die freistehende Schaufel an ihrer Einspannstelle durch den zeitlichen Mittelwert der Strömungskräfte erfährt. Bei der nicht freistehenden Schaufel ist dies zwar nicht das tatsächliche, sondern ein ideelles Biegemoment, (was durch den Index i angedeutet ist), das oft aber als hinreichende Näherung für das wirkliche verwendet werden kann. Nun ist aber

$$(29)\quad \frac{M_b(0)}{M_{bi}} = \frac{\sigma_a}{\sigma_{bi}},$$

wo σ_{bi} die mit dieser einfachen Annahme berechnete statische, durch die Strömungskräfte hervorgerufene Biegespannung an der Einspannstelle ist, also ein Wert, den man aus der üblichen Festigkeitsrechnung kennen wird. Bildet man aber den in (29) links stehenden Ausdruck aus (27) und (28), so kann man schliesslich das Ergebnis in folgender Form darstellen:

$$(30)\quad \sigma_a = D_n\,\sigma_{bi}$$

$$(31)\quad D_n = S\,\frac{\pi}{\delta}\,H_n$$

$$(32)\quad H_n =$$
$$= \frac{2\,u_n''(0)\,[(\int_0^1 u_n(\xi)\sin\tau(\xi)\,d\xi)^2 + (\int_0^1 u_n(\xi)\cos\tau(\xi)\,d\xi)^2]^{\frac{1}{2}}}{\int_0^1 \vartheta(\xi)\,u''^2(\xi)\,d\xi}$$

Der Index n deutet an, dass H jeweils mit derjenigen Eigenfunktion u_n zu bilden ist, die der Ordnung n der Schwingung zugeordnet ist, die mit der periodischen Strömungskraft in Resonanz tritt. D_n wird bei Schaufelfestigkeitsrechnungen gelegentlich «dynamischer Faktor» genannt; π/δ ist der Vergrösserungsfaktor der Schwingungstheorie, weshalb es zweckmässig ist, π nicht in H_n mit einzuschliessen.

Zwei Bemerkungen müssen hier noch angeschlossen werden. Die Spannung σ_{bi} ist strenggenommen die statische Biegespannung, die entstehen würde, wenn die Strömungskraft $\overline{P}$ auf der massgebenden (J_0 zugeordneten) Hauptträgheitsachse senkrecht stehen würde. Das ist normalerweise nicht genau der Fall, doch ist der Fehler, der entsteht, wenn man das σ_{bi} einsetzt, wie es der wirklichen Kraftrichtung entspricht, bei der hier geforderten Genauigkeit nicht von Belang. Weiter wurde der Einfluss der Fliehkraft vernachlässigt, der bei Laufschaufeln oft eine merkliche Verschiebung der Eigenfrequenzen bewirkt. In die hier durchgeführte Untersuchung würde er so hineinspielen, dass im Ausdruck für die potentielle Energie Ψ ein Zusatzglied erscheinen würde, während gleichzeitig die Funktionen u_n geringfügig verändert würden. Dieser letztere Einfluss ist äusserst gering, so dass praktisch nur die Rückwirkung auf Ψ eingeführt werden müsste. Die Durchführung dieses Gedankens führt auf

$$(33)\quad D_n = S\,\frac{\pi}{\delta}\,H_n\left(\frac{\nu_{en}{}^*}{\nu_{en}}\right)^2,$$

wo $\nu_{en}{}^*$ die Eigenfrequenz n-ter Ordnung ohne Einfluss der Fliehkraft ist und ν_{en} diejenige mit diesem Einfluss. Auch diese Korrektur ist aber zumeist belanglos.

2. Schwingungserregung am freien Schaufelende

Bei den Betrachtungen des vorangehenden Abschnittes wurde stets vorausgesetzt, dass die Amplitude Δp_0 der (auf die Längeneinheit bezogenen) Störungskraft längs der Schaufel konstant sei. Nun besteht aber bekanntlich an den Schaufelenden eine Konzentration der Verluste (Randverluste), deshalb auch eine erhöhte Unregelmässigkeit der Strömung. Es ist also dort eine grössere Amplitude der Störungskraft zu erwarten, wenn auch kaum etwas Genaueres darüber bekannt sein dürfte. – Man könnte diesen Effekt keineswegs etwa aus der Grösse des Randverlustes erschliessen, denn dieser muss sich ja vor allem in einer Verminderung der «statischen» (zeitlich gemittelten) Schaufelkraft gegen die Schaufelenden zu äussern. – Um trotzdem ein Bild über die möglichen Auswirkungen dieses Effektes zu bekommen, betrachten wir folgendes idealisiertes Problem:

Wir nehmen an, eine Störkraft mit der Amplitude $\Delta P_0{}^* = S^*\overline{P}$ greife als konzentrierte Einzelkraft am freien Schaufelende an. Ist dies die einzige auf die Schaufel einwirkende Störung, so ist die an der Schaufel bei einer unendlich kleinen Teilbewegung geleistete Arbeit

$$(34)\quad dW = \Delta P_0{}^*\sin(\omega t)\,\dot{q}\,dt = S^*\,\overline{P}\sin(\omega t)\,\dot{q}\,dt$$

und die Weiterführung der Überlegung führt dann auf

$$(35) \quad \sigma_a = S^* \frac{\pi}{\sigma} H_n{}^* \sigma_{bi}$$

mit

$$(36) \quad H_n{}^* = \frac{2\, u_n''(0)}{\int_0^1 \vartheta(\xi)\, u''^2(\xi)\, d\xi}.$$

Um die wirklichen Verhältnisse zu approximieren, muss man allerdings diesen Typus der Erregung mit dem im vorangehenden Abschnitt behandelten überlagern, womit aber wieder ein Problem der Phasenverschiebung erscheint. Bei der getrennten Berechnung der beiden Fälle wurde jedesmal der Nullpunkt der Zeit so gesetzt, dass für dW ein möglichst einfacher Ausdruck entstand, was nicht mehr möglich ist, wenn beide zugleich auftreten. Da aber über die hier einzuführende Phasenverschiebung nichts bekannt ist, wird man gegebenermassen die ungünstigste Annahme treffen, die in diesem Falle zugleich die einfachste ist: Man nimmt an, die Verhältnisse lägen gerade so, dass beide Effekte sich gerade addieren. Dann wird

$$(37) \quad \sigma_a = \frac{\pi}{\delta} (S H_n + S^* H_n{}^*)\, \sigma_{bi}.$$

Damit ist allerdings nur ein grundsätzlicher Anhaltspunkt gewonnen, denn hier müssen ja S und S^* aufgefasst werden als die Teilstimuli der beiden Erregungstypen. Wir besitzen aber bis heute keine Kenntnis über diese Aufteilung des Stimulus in zwei Anteile.

3. Numerische Angaben für Biegeschwingungen

Die allgemeinen Gleichungen, die in den vorangehenden Abschnitten aufgestellt wurden, werden hier für einige typische Fälle ausgewertet. Wir betrachten die Schaufel konstanten Querschnittes. In diesem Falle sind die Eigenfunktionen u_n genau bekannt, weil die Differentialgleichung des schwingenden Stabes exakt gelöst werden kann. Die allgemeine Lösung lautet (vgl. etwa [2])

$$(38) \quad u = C_1 \sin \varkappa \xi + C_2 \cos \varkappa \xi + C_3 \operatorname{Sin} \varkappa \xi + C_4 \operatorname{Cos} \varkappa \xi.$$

Die Abstimmung der Konstanten C_j und die Folge der Eigenwerte $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n, \ldots$, mit denen die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen gemäss

$$(39) \quad \omega_{en} = \frac{\varkappa_n{}^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho f}}$$

zusammenhängen, sind durch die besonderen Grenzbedingungen des jeweils vorliegenden Falles gegeben. So entstehen in den drei Fällen, die wir hier betrachten wollen, – einseitig eingespannter Stab, beidseitig eingespannter Stab und einseitig eingespannter, auf der anderen Seite aufliegender Stab – je die in Bild 3 dargestellten Eigenfunktionen u_1, u_2, u_3. Höhere Ordnungen interessieren kaum.

Zur Berechnung der H_n nach Gl. (22) muss noch $\tau(\xi)$ eingeführt werden. Wie dies zweckmässig geschehen kann, veranschaulicht Bild 4. Dort ist schematisch eine Laufschaufel dargestellt und gestrichelt das zugehörige Leitrad. Dass aus Gründen der konstruktiven Gestaltung dieses letzteren tatsächlich die im Bild dargestellte Situation entstehen kann, ist wohlbekannt. Übrigens sind es ja eigentlich die von den Leitradaustrittskanten abgehenden Nachlaufdellen, die für die Erregung der Laufschaufelschwingungen massgebend sind, und gerade diese werden im allgemeinen die Tendenz haben, in der Laufradeintrittsebene eine Lage einzunehmen, wie sie durch die gestrichelten Linien dargestellt ist. Die so entstehende

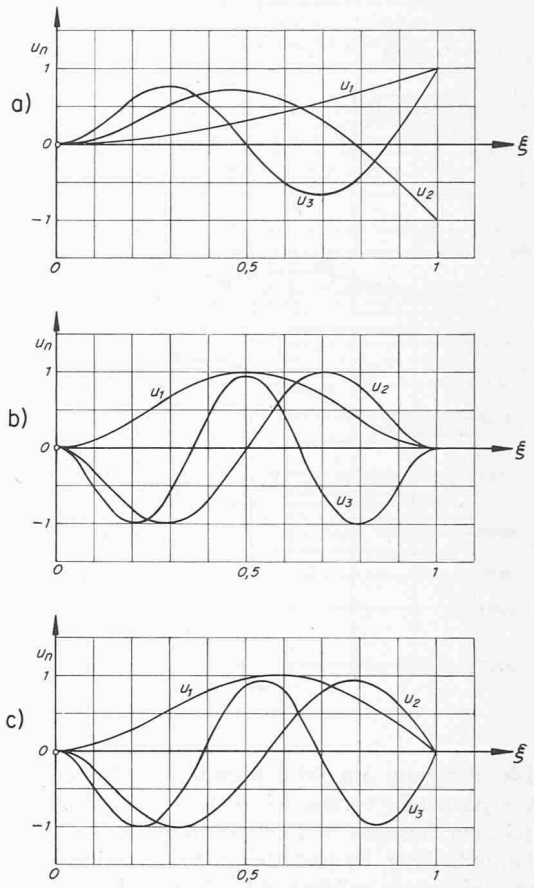

Bild 3. Eigenfunktionen u_n der Biegeschwingungen
a) einseitig eingespannt
b) beidseitig eingespannt
c) auf der einen Seite eingespannt, auf der anderen gehalten

Phasenverschiebung der Erregungskräfte längs der Schaufel lässt sich beschreiben durch den Ansatz

$$(40) \quad \tau = \frac{\pi}{2} (1 - c\, \xi),$$

wobei die Konstante c eben das Mass dieser Phasenverschiebung darstellt.

Wenn man, um einen besonders leicht überblickbaren Fall vor sich zu haben, etwa $c = 1$ setzt, ergeben sich nach *Gl.* (2) folgende Verhältnisse:

In $\xi = 0$: $\tau = \frac{\pi}{2}$, $\quad \sin \tau = 1$, $\quad \cos \tau = 0$

$\Delta p = \Delta p_0 \sin \omega t$

In $\xi = 1$: $\tau = 0$, $\quad \sin \tau = 0$, $\quad \cos \tau = 1$

$\Delta p = \Delta p_0 \cos \omega t$

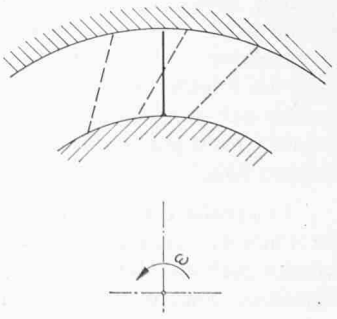

Bild 4. Entstehung der phasenverschobenen Erregung

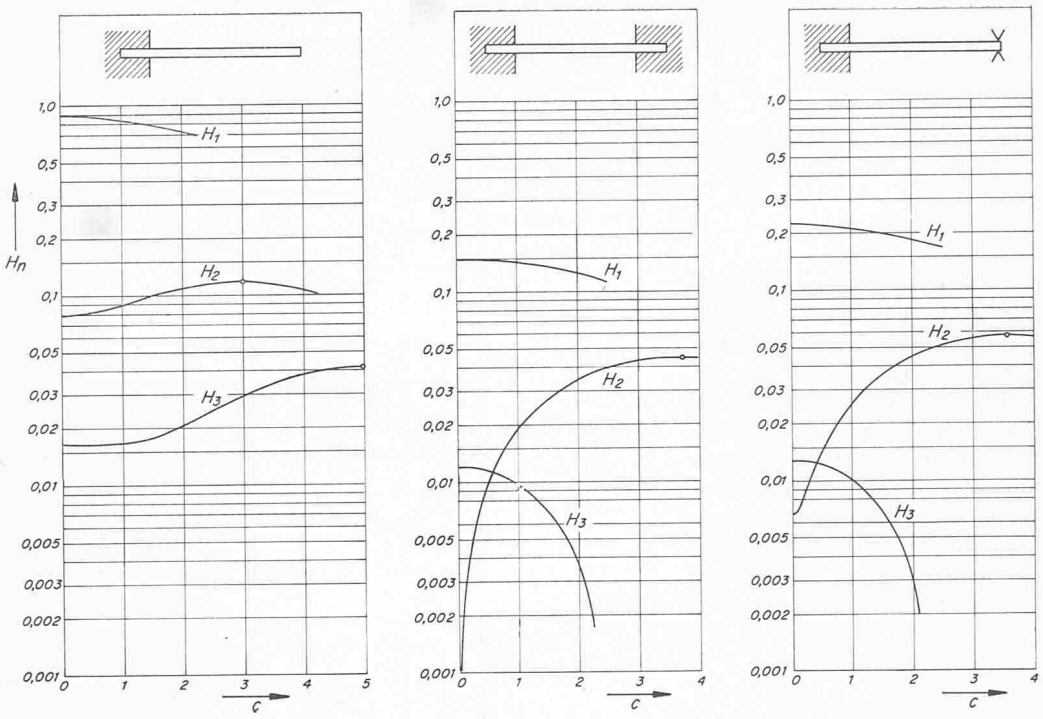

Bild 5. H_n in Funktion der die Phasenverschiebung kennzeichnenden Konstanten c für Biegeschwingungen

Die Erregung am Schaufelende eilt also derjenigen an der Einspannstelle voraus, wie es Bild 4 entspricht. Im hier angegebenen Beispiel $c = 1$ entspricht dieses Voreilen einer viertels Leitradteilung. Es sind aber noch wesentlich grössere Phasenverschiebungen möglich, d.h. c kann weit über 1 liegen.

Analoge Verhältnisse bestehen bezüglich der Erregung von Leitschaufelschwingungen durch Laufräder. Die Frage, an welchem Ende die Störung voreilt – d.h. die Frage des Vorzeichens von c – ist dabei übrigens unwesentlich. Das lässt sich anhand der Gleichungen verifizieren, und auch die unmittelbare Vorstellung bestätigt es: Denkt man sich bei einem Bewegungsvorgang den zeitlichen Ablauf genau umgekehrt und ebenso alle Kraftrichtungen, dann bleiben die Gesetze der Mechanik erfüllt.

Mit dem Ansatz (40) lassen sich nun die H_n in Funktion von c berechnen. Die Ergebnisse sind in Bild 5 dargestellt. Zur anschaulichen Interpretation beachte man, dass $c = 4$ einer grössten Phasenverschiebung von einer vollen Leitradteilung entspricht. Dass bei der ersten Ordnung das Maximum stets in $c = 0$ zu finden ist, leuchtet unmittelbar ein. Der Verlauf der Kurven für die H_n höherer Ordnung dürfte hingegen eine wesentliche neue Information darstellen. Bei der freistehenden Schaufel erreicht H_2 einen höchsten Wert, der immerhin 1,47 mal grösser ist als bei Erregung mit konstanter Phase, während der Maximalwert von H_3 sogar das 2,53-fache des Wertes bei $c = 0$ ist. – Bei der beidseitig eingespannten Schaufel (annähernd verwirklicht bei gewissen Leitradkonstruktionen) wird mit $c = 0$ auch $H_2 = 0$, während der Höchstwert von H_2 immerhin beträchtlich werden kann, und das H_2 der einseitig eingespannten, einseitig gehaltenen Schaufel erreicht das 8,6-fache seines Wertes bei $c = 0$. – Der Verfasser hat früher aufgrund einer überschlägigen Untersuchung eine Empfehlung zur Abschätzung des Effektes der Phasenverschiebung angegeben, vgl. [3]. Es zeigt sich nun, dass jene Angaben im Falle der freistehenden Schaufel recht gut stimmen, nicht aber bei den H_2 der beiden anderen Fälle.

In Tabelle 1 sind die wichtigsten Werte zusammengefasst. Im Falle der freistehenden Schaufel (einseitig eingespannt) wurden auch die $H_n{}^*$ beigefügt, die einer Erregung durch eine Einzelkraft am freien Schaufelende entsprechen, vgl. die Ausführungen in Abschnitt 2. In den beiden anderen Fällen ist diese Art der Erregung voraussetzungsgemäss unmöglich.

Tabelle 1

	Einseitig eingespannt	Beidseitig eingespannt	Eingespannt-gestützt
$H_1\,(c=0) = H_{1max}$	0,8908	0,1485	0,2231
$H_1{}^*$	2,2754	—	—
$H_2\,(c=0)$	0,0788	0	0,0066
H_{2max}	0,1159	0,0450	0,0569
H_2	0,3630	—	—
$H_3\,(c=0)$	0,0165	0,0120	0,0128
H_{3max}	0,0417	0,0120	0,0128
$H_3{}^*$	0,1296	—	—
$D_1\,(c=0) = D_{1max}$	14,0	2,33	3,51
$D_2\,(c=0)$	1,24	0	0,104
D_{2max}	1,82	0,707	0,895
$D_3\,(c=0)$	0,259	0,189	0,201
D_{3max}	0,652	0,189	0,201

Ausser den H_n sind noch die D_n gemäss Gl. (31) angegeben, wobei $S = 0{,}1$, $\delta = 0{,}02$ gesetzt wurden. Die Annahme $S = 0{,}1$ trifft vor allem für die Erregung mit der Periode des vorausgehenden Schaufelkranzes die richtige Grössenordnung; von *M. Naguib* [4] berechnetete Werte bewegen sich zwischen 0,05 und 0,22. – Die D_n, die ja mit den gegebenen Annahmen proportional den H_n sind, geben ein unmittelbares Bild von den zu erwartenden Wechselspannungsamplituden σ_a, denn man hat nur die «statischen» Biegespannungen σ_{bi} mit D_n zu multiplizieren, um σ_a zu erhalten.

Die Folgerungen, die man aus diesen Zahlen ziehen kann, stehen mit der Erfahrung im Einklang. Die Grundschwingung wird weitaus am stärksten erregt. Bei relativ gedrungenen Schaufeln kann sie mit der Periode des vorausgehenden Schaufelkranzes in Resonanz treten. In diesem Falle entstehen so grosse Spannungsamplituden, dass meist mit dem Schaufelbruch zu rechnen sein wird. – Bei schlanken Schaufeln sind es die Schwingungen höherer Ordnung, die mit der Periode des vorausgehenden Kranzes in Resonanz treten können. Betrachtet man die D-Werte zweiter und selbst dritter Ordnung,

so wird deutlich, dass diese Resonanzerregung zwar stets weit unter derjenigen der ersten Ordnung liegt, unter bestimmten Umständen aber doch genügen kann, um die Schaufel zu gefährden (besonders wenn S grösser ist als der angenommene Wert und gleichzeitig σ_{bi} an und für sich schon gross ist). Die angegebenen H_n-Werte beseitigen jedenfalls die Unsicherheit, die bisher in Bezug auf den Einfluss von Phasenverschiebungen der erregenden Kräfte längs der Schaufel bestanden.

Eine zusätzliche Überlegung ist allerdings noch nötig bezüglich des Einflusses von am Schaufelende konzentrierten Kräften. Um diesen abzuschätzen, machen wir zunächst folgende Gegenüberstellung:

Ohne Phasenverschiebung ($c=0$):	$H_2/H_{1\,max}$	$= 0{,}088$;
	$H_3/H_{1\,max}$	$= 0{,}019$
Maximalwerte:	$H_{2\,max}/H_{1\,max}$	$= 0{,}130$;
	$H_{3\,max}/H_{1\,max}$	$= 0{,}047$
Einzelkraft an Schaufelende:	$H_2{}^*/H_1{}^*$	$= 0{,}160$;
	$H_3{}^*/H_1{}^*$	$= 0{,}057$

Wir entnehmen daraus, dass die $H_n{}^*$ mit zunehmender Ordnungszahl n nicht viel weniger abnehmen als die $H_{n\ max}$. Dazu muss man beachten, dass die Annahme einer am Schaufelende konzentrierten Einzelkraft stark und im ungünstigen Sinne idealisiert ist. Denkt man sich die durch die Endeffekte entstehende Zusatzkraft in $\xi = 0{,}9$ (also 10% vom Schaufelende entfernt) angreifend, so werden die entsprechenden Verhältniszahlen 0,097 und 0,016, d.h. sie bewegen sich sogar in der gleichen Grössenordnung wie die Werte ohne Phasenverschiebung. Wäre nun aber genau $H_n{}^*/H_1{}^* = H_n/H_1$, so wäre es nach Gl. (37) möglich, wieder auf $\sigma_a = (\pi/\delta)\, S H_n\, \sigma_{bi}$ zurückzugehen, sofern man nur die gesamte Erregung in S einschliessen würde. Da die Erregung durch Endeffekte nur einen Teil der Gesamterregung bildet, kann diese vereinfachende Annahme im Rahmen der hier geforderten Genauigkeit ohne Bedenken gemacht werden, so dass die in Abschnitt 1 angegebenen theoretischen Grundlagen genügen dürften.

Die hier angegebenen Rechenergebnisse beschränken sich auf Schaufeln konstanten Querschnitts, doch werden die Grössenordnungen auch bei verjüngten Schaufeln nicht verschoben, da die $u(\xi)$ eine ähnliche Gestalt beibehalten und die Unterschiede auch dadurch teilweise ausgeglichen werden, dass die H_n aus den u_n durch Integration hervorgehen.

4. Spannungsamplitude von Drehschwingungen

Die Herleitung der massgebenden Gleichungen ist der im Falle der Biegeschwingungen gegebenen völlig analog, weshalb hier eine abgekürzte Darstellung genügt. Das oszillierende Moment der Strömungskräfte pro Längeneinheit sei gegeben durch

(41) $\Delta m = \Delta m_0 [\sin\tau \sin\omega t + \cos\tau \cos\omega t]$.

Mit $\gamma(x)$ als Verdrillungswinkel setzen wir

(42) $q = \gamma(l), \qquad \gamma(x) = q\, u(x).$

Dann ist die potentielle Energie

(43) $$\Psi = \frac{K}{2} q^2, \qquad K = G \int_0^l J_t \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

und die Bewegungsenergie

(44) $$T = \frac{M}{2} \dot{q}^2, \qquad M = \rho \int_0^l J_p\, u^2\, dx,$$

wo J_t das Trägheitsmoment gegen Torsion, J_p das polare Trägheitsmoment bedeuten. Die Arbeit der Strömungskräfte bei einer unendlich kleinen Teilbewegung ist

$$dW = \int_0^l (\Delta m\, d\gamma)\, dx = dt \int_0^l (\Delta m\, \dot{\gamma})\, dx = \dot{q}\, dt \int_0^l \Delta m\, u\, dx =$$

$$= \dot{q}\, \Delta m_0\, dt\, [(\int_0^l u \sin\tau\, dx) \sin\omega t + (\int_0^l u \cos\tau\, dx) \cos\omega t],$$

was man wie früher durch geeignete Nullpunktsverschiebung des Zeitmassstabes überführen kann in

(45) $dW = \Delta M_0 \sin(\omega t)\, \dot{q}\, dt$

mit

(46) $$\Delta M_0 = \Delta m_0 [(\int_0^l u \sin\tau\, dx)^2 + (\int_0^l u \cos\tau\, dx)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Die Gl. (17) für die Dämpfungsarbeit kann unverändert übernommen werden, womit auch die nachfolgende Überlegung die selbe bleibt und anstelle von (21) die Gleichung

(47) $$q_0 = \frac{\pi}{\delta_t} \frac{\Delta M_0}{K}$$

folgt. Hier ist δ_t das logarithmische Dekrement der Torsionsschwingung. Mit $\vartheta_t = J_t/J_{t0}$ kann diese Gleichung durch Einsetzen von (46) und (43) in die Form

(48) $$q_0 = \frac{\pi}{\delta_t} \frac{l^2\, \Delta m_0 [(\int_0^1 u \sin\tau\, d\xi)^2 + (\int_0^1 u \cos\tau\, d\xi)^2]^{\frac{1}{2}}}{G J_{t0} \int_0^1 \vartheta_t\, u'^2\, d\xi}$$

gebracht werden. Anderseits ist an der Einspannstelle das Torsionsmoment

(49) $$M_t(0) = G J_{t0} \left.\frac{d\gamma}{dx}\right|_{x=0} = G J_{t0}\, q_0 \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = \frac{G J_{t0}\, q_0\, u'(0)}{l}.$$

Als ideelles Vergleichs-Torsionsmoment M_{ti} wählen wir nun dasjenige, das entstehen würde, wenn die statische Schaufelkraft $\overline{P}$ im Abstand der halben Sehnenlänge s vom Schubmittelpunkt des Einspannprofiles angreifen würde (d.h. die Kraft $\overline{P}$ würde in der Nähe der Vorderkante angreifen). Die so entstehende ideelle statische Schubspannung τ_i ist mit W_t als Torsions-Widerstandsmoment

(50) $$\tau_i = \frac{M_{ti}}{W_t} = \frac{\overline{P} s}{2 W_t}.$$

Wenn wir nun den Stimulus S_t der Torsionsschwingung definieren durch

(51) $l\, \Delta m_0 = S_t\, M_{ti}$

und beachten, dass sich die Schubspannungen verhalten wie die Drillmomente, können wir folgendermassen vorgehen. Wir ersetzen in (48) $l\, \Delta m_0$ durch $S_t\, M_{ti}$, führen den so erhaltenen Ausdruck in (49) ein und dividieren beidseitig durch M_{ti}. Dann erhalten wir für die Spannungsamplitude τ_a schliesslich

(52) $$\tau_a = \frac{\pi}{\delta_t} S_t\, H_{tn}\, \tau_i$$

(53) $$H_{tn} = \frac{u_n'(0) [(\int_0^1 u_n(\xi) \sin\tau(\xi)\, d\xi)^2 + (\int_0^1 u_n(\xi) \cos\tau(\xi)\, d\xi)^2]^{\frac{1}{2}}}{\int_0^1 \vartheta_t(\xi)\, u'^2_n(\xi)\, d\xi}.$$

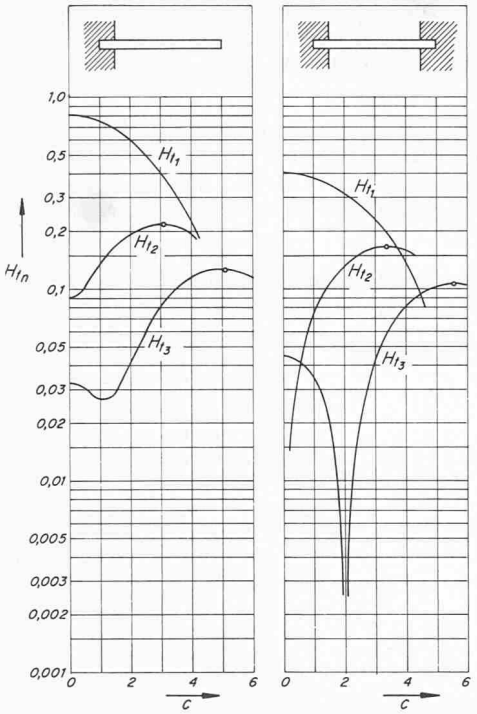

Bild 6. H_{tn} in Funktion der die Phasenverschiebung kennzeichnenden Konstanten c für Torsionsschwingungen

Tabelle 2

	Einseitig gehalten			Beidseitig gehalten		
n	1	2	3	1	2	3
$H_{tn}\,(c=0)$	0,8106	0,0901	0,0324	0,4053	0	0,0450
$H_{tn\,max}$	0,8106	0,2169	0,1284	0,4053	0,1658	0,1080
$H_{tn}{}^*$	1,2732	0,4244,	0,2546	—	—	—

Wiederum behandeln wir den Sonderfall der Schaufel konstanten Querschnittes, wo die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der Drehschwingung lautet

$$(54)\quad u = C_1 \sin \varkappa\, \xi + C_2 \cos \varkappa\, \xi.$$

Beim einseitig gehaltenen Stab wird $C_2 = 0$ und die Eigenwerte werden

$$(55)\quad \varkappa_n = \frac{2n-1}{2}\,\pi.$$

Beim beidseitig gehaltenen Stab ist ebenfalls $C_2 = 0$, während die Eigenwerte

$$(56)\quad \varkappa_n = \pi\, n$$

sind. Mit dem Ansatz

$$(57)\quad \tau = \frac{\pi}{2}\,(1 - c\,\xi)$$

lassen sich dann die H_{tn} in Funktion von c berechnen. Die Ergebnisse sind in Bild 6 und in Tabelle 2 zusammengefasst.

Betrachtet man ausserdem noch, wie im Falle der Biegeschwingung, den einfachen Grenzfall, wo das ganze erregende Moment am freien Ende angreifen würde, so ist H_{tn} zu ersetzen durch

$$(58)\quad H_{tn}{}^* = \frac{u_n'(0)}{\int_0^1 \vartheta_t(\xi)\, u_n'^2(\xi)\, d\xi},$$

was für den Stab konstanten Querschnitts, also $\vartheta_t = 1$, in Tabelle 2 ebenfalls eingetragen ist.

Wie im Falle der Biegeschwingung ergibt sich auch hier, dass unter dem Einfluss der Phasenverschiebung die Erregung der Schwingungen höherer Ordnung wesentlich stärker sein kann, als man bei Erregung mit konstanter Phase erwarten würde. Bezüglich des Einflusses zusätzlicher konzentrierter Erregung am Schaufelende machen wir die gleiche Überlegung wie oben. Die massgebenden Verhältniszahlen sind die folgenden:

Ohne Phasenverschiebung (c = 0): $H_{t_2}/H_{t_1 max} = 0{,}111$; $H_{t_3}/H_{t_1 max} = 0{,}040$

Maximalwerte: $H_{t_2\,max}/H_{t_1 max} = 0{,}268$; $H_{t_3\,max}/H_{t_1 max} = 0{,}158$

Einzelmoment an Schaufelende: $H_{t_2}/H_{t_1} = 0{,}333$; $H_{t_3}/H_{t_1} = 0{,}200$

Denkt man sich das Moment in $\xi = 0{,}9$ statt am Schaufelende angreifend, so werden die Werte 0,303 und 0,144. Die Verhältnisse liegen also hier etwas ungünstiger als im Falle der Biegeschwingung, denn die $H_{tn}{}^*$ nehmen höchstens etwa wie die $H_{tn\,max}$ ab, selbst wenn man den Ort des Angriffs des Momentes etwas vom Schaufelende wegschiebt. Es folgt daraus, dass man die Erregung von Torsionsschwingungen höherer Ordnung vorsichtigerweise verhältnismässig gross ansetzen muss.

Die richtige Einschätzung der Gefährdung von Schaufeln durch Drehschwingungen ist nach dem derzeitigen Stande unserer Kenntnisse bedeutend schwieriger als im Falle der Biegeschwingung, vor allem weil über den Stimulus S_t kaum zuverlässige Angaben gemacht werden können, obwohl er durch (51) einwandfrei definiert ist. Die Ausführungen dieses Abschnittes geben daher zunächst nur einen Anhaltspunkt über die relative Grösse der Erregung in Resonanz.

5. Schlussbemerkung

Ganz allgemein wären zur hinreichend genauen Voraussage der in Resonanz zu erwartenden Spannungsamplituden vor allem bessere Unterlagen über den Stimulus wünschbar. Hier müsste also die experimentelle Forschung einsetzen. Auch über die Mindestgrösse des logarithmischen Dekrementes, die man sicher einsetzen darf, wären zusätzliche Informationen sehr erwünscht. Besonders betrifft dies die Einflüsse der Art der Befestigung und die Wirksamkeit dämpfender Konstruktionselemente (z. B. Dämpfungsdrähte). Wenn man beachtet, dass Schaufelschwingungen wahrscheinlich immer noch die wichtigste Störungsursache im Turbomaschinenbau darstellen, so würde sich hier ein gewisser Aufwand lohnen.

Würdigung. Die sämtlichen Berechnungen zu dieser Studie sind durchgeführt worden von meinem Assistenten, dipl. Ing. *Rolf Girsberger*, dem ich an dieser Stelle für seine sorgfältige Arbeit danken möchte.

Literaturverzeichnis

[1] *Prohl, M.A.:* A Method for calculating vibration frequency and stress of a banded group of turbine buckets. Trans. ASME 80 (1958), Nr. 1, S. 169–180.

[2] *Jacobsen, L.S. and R.S. Ayre:* Engineering vibrations. Mc.Graw-Hill, New York, Toronto, London 1958.

[3] *Traupel, W.:* Thermische Turbomaschinen, Bd. II, 2. Aufl., Springer, Berlin 1968.

[4] *Naguib, M:* Theoretical estimation of dynamic forces and vibratory stresses for a turbine blade. Mitt. a.d.Inst. f. Therm. Turbomaschinen, ETH Zürich, 1965.

Adresse des Verfassers: Prof. Dr. *Walter Traupel*, Schmiedhaldenstrasse 44, 8700 Küsnacht ZH.