

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 88 (1970)  
**Heft:** 21

**Artikel:** Berechnungen segmentierter Radialgleitlager endlicher Breite bei instationärem Betrieb  
**Autor:** Ott, H.H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84515>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Berechnung segmentierter Radialgleitlager endlicher Breite bei instationärem Betrieb

Von Prof. Dr. H. H. Ott, ETH Zürich

DK 621.822.5.001.2

## Zusammenfassung

Das Verhalten von Radialgleitlagern endlicher Breite, die aus mehreren festen Segmenten zusammengesetzt sind, wird bei instationärem Betrieb theoretisch untersucht. Die Reynoldssche Differentialgleichung für den zeitabhängigen Fall wird mit einem Parabelansatz für den axialen Druckverlauf integriert, wobei für die Randbedingungen bisher nicht verwendete Annahmen gemacht werden. Die Theorie erlaubt, aus einer gegebenen Bewegung des Wellenzentrums die resultierende Kraft des Schmiermittels auf die Welle zu berechnen. Damit verfügt man auch über die Grundlagen, um das inverse Problem, die Berechnung der Wellenbewegung aus einer äusseren Belastung, zu behandeln. – Mit der vorliegenden Theorie kann das dynamische Verhalten verschiedener Lagertypen, die im Turbomaschinen- und Motorenbau vorkommen, rechnerisch erfasst und verglichen werden. – Das angewandte Berechnungsverfahren ist mit beträchtlichem Aufwand verbunden und verlangt den Einsatz einer schnellen elektronischen Rechenanlage.

## Verzeichnis der wichtigsten Bezeichnungen

Da alle angegebenen Beziehungen dimensionsrichtige Grössengleichungen sind, kann ein beliebiges kohärentes Masssystem verwendet werden. Zu empfehlen ist vor allem das MKSA-System. Nicht aufgeführte Zeichen sind im Text erklärt.

$c$	Konstanter Faktor im Differenzgleichungssystem
$e$	Exzentrizität (Abstand zwischen Wellen- und Schalenzentrum)
$f$	Fläche
$h$	Schmierpalthehöhe zwischen Welle und Schale
$\Delta h$	Spalthöheanteil zwischen Maximalkreis und Schale
$m$	Parabelexponent
$n$	Zahl der $\Delta\varphi$ -Intervalle im Segment
$p$	Druck im Schmierpalt (Überdruck gegenüber Umgebungsdruck)
$\hat{p}$	Druck in der Mittelebene des Lagers
$q$	Volumetrischer Ölausfluss pro Zeit- und Breiteinheit
$t$	Zeit
$u$	Transformationsvariable (Druck-Differentialgleichung)
$w$	Geschwindigkeit im Schmierpalt (in Bewegungsrichtung der Welle)
$x$	Koordinate in Bewegungsrichtung der Gleitfläche
$y$	Koordinate senkrecht zur bewegten Gleitfläche
$z$	Koordinate in Richtung der Wellenachse
$A$	Koeffizient in der transformierten Druck-Differentialgleichung
$B$	Lagerbreite (in axialer Richtung)
$\Delta B$	Fiktiver Breitenzuschlag für Randleiste
$D$	Wellendurchmesser
$E$	Radialgeschwindigkeitszahl (radiale Verschiebung des Wellenzentrums)
$F$	Dimensionslose Reibungskraft an der Welle
$\Delta F$	Dimensionsloser Reibungskraftanteil des drucklosen Schmierpaltteils
$\Delta F_0$	Dimensionsloser Reibungskraftanteil des drucklosen Schmierpaltteils im stationären Fall
$\delta F$	Korrektur der dimensionslosen Reibungskraft für Randleisteneinfluss
$G$	Tangentialgeschwindigkeitszahl (Rotation des Wellenzentrums)
$H$	Dimensionslose horizontale Ölkraft auf Welle
$K$	Dimensionslose Öldurchflusszahl
$\delta K$	Korrektur der Öldurchflusszahl für Randleisteneinfluss
$L$	Segmentlänge (in Bewegungsrichtung der Welle)
$P$	Kraft (vom Öl auf Welle wirkend)
$\Delta P$	Reibungskraft im drucklosen Teil des Schmierpalttes
$Q$	Öldurchsatz (Volumen pro Zeiteinheit)
$R$	Wellenradius
$\Delta R$	Radiales Spiel zwischen Maximalkreis und Welle
$So$	Sommerfeldzahl (resultierende dimensionslose Ölkraft auf Welle)

$V$	Dimensionslose vertikale Ölkraft auf Welle
$W_1, W_2$	Oberflächengeschwindigkeit der Gleitflächen (in Umfangsrichtung)
$Z$	Absolutes Glied in der transformierten Druck-Differentialgleichung
$\alpha$	Zahl der $\Delta\varphi$ -Intervalle bis zur ersten Minimalstelle im $u$ -Verlauf
$\beta$	Relative Lagerbreite
$\beta_R$	Relative Randleistenbreite (bezogen auf $B$ )
$\gamma$	Lagewinkel des Wellenzentrums
$\varepsilon$	Relative Exzentrizität
$\xi$	Dimensionslose, auf halbe Lagerbreite bezogene Koordinate in Achsrichtung
$\eta$	Dynamische Zähigkeit des Schmiermittels
$\theta$	Dimensionslose Zeit
$\kappa$	Exponent
$\lambda$	Seitenverhältnis des Segmentes
$\mu$	Reibungszahl
$\nu$	Laufnummer der $\Delta\varphi$ -Intervallgrenzen im Segment
$\xi$	Zahl der $\Delta\varphi$ -Intervalle bis zur zweiten Minimalstelle im $u$ -Verlauf
$\sigma$	Richtungswinkel der resultierenden Wellenkraft
$\tau$	Schubspannung
$\varphi$	Umfangswinkel, von Horizontalachse aus gemessen
$\Delta\varphi$	Winkel eines Differenzintervalls
$\chi$	Relative, auf $\Delta R$ bezogene Spalthöhe
$\Delta\chi$	Relativer, auf $\Delta R$ bezogener Spalthöheanteil zwischen Maximalkreis und Schale (relative Segmentvertiefung)
$\psi$	Relatives Lagerspiel zwischen Welle und Maximalkreis
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit der Welle
$\Pi$	Dimensionsloser Druck
$\Phi$	Winkelausdehnung des Segmentes

## Indices:

$m 1, m 2$	Minimalstellen im $u$ -Verlauf
$n$	Ende des letzten $\Delta\varphi$ -Intervalls im Segment
$A$	Austritt des Segmentes
$A'$	Austrittseitige Grenze des Druckgebietes
$E$	Eintritt des Segmentes
$E'$	Eintrittseitige Grenze des Druckgebietes
$F$	Reibungskraft (instationär)
$F_0$	Reibung im stationären Fall
$H$	Horizontal
$R$	Rand; Randleiste; Ende der Randleiste
$\Delta R$	Spalt zwischen Welle und Maximalkreis
$S$	Spalthöhenänderung
$V$	Vertikal
$W$	Welle
$\alpha$	Erstes Minimum im $u$ -Verlauf
$\theta$	Ableitung nach der dimensionslosen Zeit
$\mu$	Zweites Minimum im $u$ -Verlauf
$\nu$	Laufnummer für $\Delta\varphi$ -Intervallgrenzen im Segment
$\varphi$	Ableitung nach dem Umfangswinkel $\varphi$
1	Lagerschale
2	Welle
I, II, III, ...	Nummer des betr. Segmentes
0, 1, 2, ..., $\nu$ , ..., $n$	Nummern der $\Delta\varphi$ -Intervallgrenzen im Segment
(*)	Lösung mit Nullstellen an Segmentanfang und -ende
( '); ( )''	Schrittweise Näherungen bei der Ermittlung des $u$ -Verlaufes
( ) <sub>tot</sub>	für ganzes Lager
( ) <sub>res</sub>	resultierend; für alle Segmente
( )	Mittelwert
( ) <sub>min</sub>	an der Stelle des kleinsten Spalttes

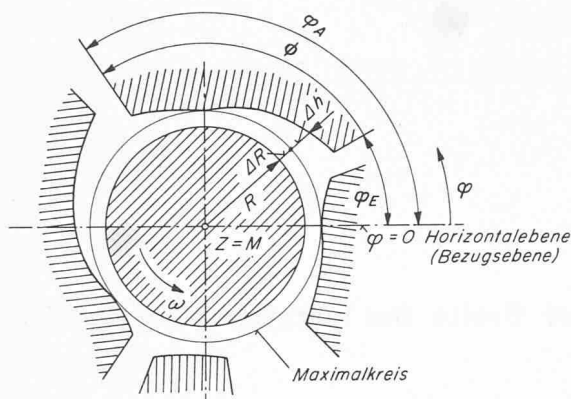


Bild 2.1. Segmentiertes Radiallager mit Welle in zentrischer Lage

## 1. Problemstellung und Voraussetzungen

Aus der Literatur sind eine grössere Anzahl von Veröffentlichungen bekannt, in denen kreiszylindrische Gleitlager bei instationärem Betrieb untersucht werden. Unter instationärem Betrieb sei hier ein Betriebszustand verstanden, bei dem sich die mit konstanter Drehgeschwindigkeit laufende Welle gegenüber der Lagerschale senkrecht zur Achsrichtung innerhalb des Lagerspiels beliebig bewegt; bei allen Wellenbewegungen bleiben somit die Achsen von Schale und Welle parallel. Ältere Arbeiten haben das «unendlich breite» (d.h. seitlich abgeschlossene) Lager zum Gegenstand, während in neueren Veröffentlichungen auch Lager endlicher Breite behandelt werden. Eine gute Übersicht über eine Reihe von Untersuchungen ist bei *K. Radermacher* [5] zu finden, wo u.a. die Arbeiten [1] [2] [3] [4] [6] [7] [8] [9] und [10] erwähnt sind. In [14] werden neben den kreiszylindrischen auch nichtkreisförmige Lager experimentell untersucht. *G. Schaffrath* hat in [15] das instationär belastete Lager mit beliebiger Spaltform behandelt. Dasselbe Problem behandelt auch die vorliegende Arbeit, jedoch mit wesentlich anderen Randbedingungen, als sie Schaffrath gewählt hat.

Bei der Behandlung von instationär laufenden Gleitlagern sind zwei fundamentale Problemstellungen zu unterscheiden: es kann erstens bei einer vorgegebenen Wellenbewegung nach der vom Schmierfilm auf den Zapfen wirkenden resultierenden Kraft gefragt werden (wobei auch Reibungsmoment und Öldurchsatz interessieren) oder es kann zweitens die (zeitlich nach Richtung und Grösse veränderliche) Zapfenkraft gegeben und die sich ergebende Bahn des Wellenzentrums gesucht sein (erste und zweite Hauptaufgabe).

Die Lösung der ersten Hauptaufgabe ist zum Beispiel notwendig, wenn die Feder- und Dämpfungszahlen des Schmierfilms für die genauere Berechnung der kritischen Drehzahlen einer in Gleitlagern laufenden Welle benötigt werden. Auf die zweite Hauptaufgabe wird man insbesondere bei Lagerstabilitätsuntersuchungen im Falle von periodischen Kräften geführt. Das instationäre Verhalten eines radialen Gleitlagers kann erst als vollständig geklärt betrachtet werden, wenn beide Fundamentalaufgaben gelöst sind. In der vorliegenden Abhandlung wird die Theorie für die Lösung der ersten Hauptaufgabe dargestellt. In weiteren Veröffentlichungen werden Anwendungen dieser Theorie und die Lösung der zweiten Hauptaufgabe folgen.

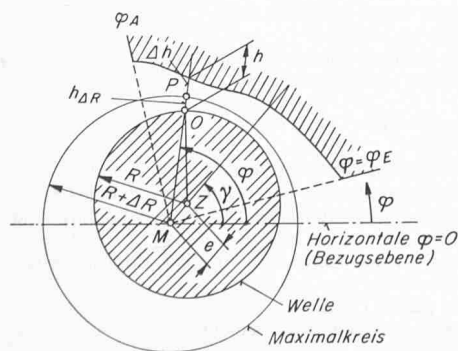


Bild 2.3. Segment mit Welle in allgemeiner Lage

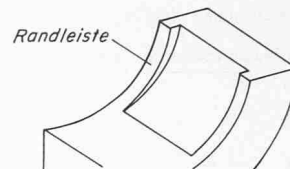


Bild 2.2. Segment mit Rand-  
leisten

Es wurde oben erwähnt, dass die bisherigen theoretischen und experimentellen Untersuchungen sich vorwiegend auf kreiszylindrische Gleitlager beschränkten, während über Lager, die aus mehreren Teilgleitflächen (starren Segmenten) zusammengesetzt sind und eine nicht-kreiszylindrische Oberfläche aufweisen, nur wenige Untersuchungen existieren [14] [15].

Die nachstehende theoretische Untersuchung gibt eine Methode für die Berechnung des instationär laufenden segmentierten Radiallagers endlicher Breite, wobei (mit gewissen Einschränkungen) beliebige Schmierspaltformen zugelassen sind. Dabei werden die in der elementaren Lagertheorie üblichen vereinfachenden Voraussetzungen gemacht: inkompressibles Schmiermittel (im folgenden „Öl“ genannt) von konstanter Zähigkeit, Gültigkeit des Newtonschen Flüssigkeitsreibungsgesetzes, laminarer Strömungszustand mit vernachlässigbaren Trägheitskräften, verschwindender Druckgradient senkrecht zur Gleitfläche, vernachlässigbare Krümmung der Schmierschicht, glatte Oberflächen, starre Lagerschale, konstante Drehzahl der Welle; siehe zum Beispiel [5].

Da für allgemeine Schmierspaltformen die Lösung der auftretenden Differentialgleichungen hier durch Überführung in ein Differenzengleichungssystem vorgenommen wird, ist das nachstehend entwickelte Berechnungsverfahren auf die Verwendung von digitalen Rechenautomaten zugeschnitten. Auch wenn sehr schnelle Maschinen zur Verfügung stehen, zeigt es sich, dass das gestellte Problem (und insbesondere die zweite Fundamentalaufgabe) bei den gewählten Randbedingungen nur dann mit tragbarem Aufwand an Rechenzeit bewältigt werden kann, wenn bei der Lösung vereinfachende Ansätze gemacht werden. Das gilt insbesondere für die Berücksichtigung der endlichen Lagerbreite.

Die nachstehend entwickelte instationäre Theorie enthält selbstverständlich als Spezialfall auch den stationären Betriebszustand der untersuchten Lager. In einzelnen Abschnitten wird auf den stationären Fall besonders eingegangen.

## 2. Geometrie des Lagers

Bild 2.1 zeigt ein Lager, das mehrere feste Teilgleitflächen (Segmente) aufweist. Zwischen diesen Segmenten wird Öl zugeführt. Im Grenzfall kann sich das Lager auf ein Segment mit einer Ölzufuhrstelle beschränken («360°-Lager» mit einem einzigen Öleintritt). Auch können zwischen den Segmenten in Umfangsrichtung nicht nur Ölzuführungen, sondern auch grössere Lücken liegen.

Zunächst werde nur der Fall betrachtet, in welchem die Spaltform über die Lagerbreite konstant ist. Im Anhang wird ein Näherungsverfahren angegeben, mit dem auch Segmente mit Randleisten (wie sie bei Dreikeil- und Taschenlagern vorkommen, Bild 2.2) berechnet werden können.

Der grösste Kreis, der in das Lagerprofil eingeschrieben werden kann, werde als Maximalkreis bezeichnet.<sup>1)</sup> Sein Radius ist um  $\Delta R$  grösser als der Wellenradius  $R$ . Wir bezeichnen die durch den Mittelpunkt  $M$  des Maximalkreises laufende Parallele zur Wellenachse als Achse der (aus Segmenten zusammengesetzten) Lagerschale. Die in Bild 2.1 gezeigte Wellenlage wird als zentrisch bezeichnet. Die Oberflächenform der Lagerschalen-Segmente ist gegeben durch den Verlauf  $\Delta h(\varphi)$ ; die Länge eines Segmentes sei begrenzt durch den Eintrittswinkel  $\varphi_E$  und den Endwinkel  $\varphi_A$ . Die Grössen  $\Delta R$  und  $\Delta h$  seien klein gegenüber dem Radius  $R$ .

Für die Einführung des Maximalkreises besteht kein zwingender Grund. Die ganze Betrachtung könnte auch ohne diesen Kreis durchgeführt werden. Er erweist sich jedoch als praktisch, weil viele Lager-

<sup>1)</sup> Wenn mehrere gleich grosse Maximalkreise existieren (was praktisch denkbar ist), wird einer davon ausgewählt und als Maximalkreis definiert.

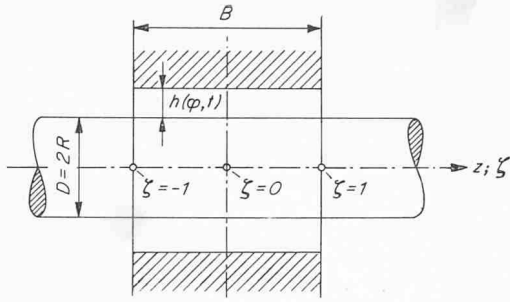


Bild 2.4. Längsschnitt durch Lager

formen relativ wenig von einem Kreiszylinder abweichen. Im folgenden wird zunächst ein einziges Segment behandelt. Wenn mehrere vorhanden sind, ist die Berechnung für diese analog durchzuführen.

Bild 2.3 zeigt ein Segment mit der Welle in allgemeiner Lage. Für die Spaltweite  $h$  an der Stelle  $\varphi$  folgt

$$(2.1) \quad h = h_{\Delta R} + \Delta h$$

wobei  $\Delta h$  als Segmentvertiefung bezeichnet wird.

Mit Rücksicht auf eine später vorzunehmende Variablentransformation, bei der eine Potenz von  $h$  als Faktor auftritt, wird vorausgesetzt, dass  $h(\varphi)$  eine stetige Funktion ist. Die Ableitungen brauchen hingegen nicht stetig zu sein.

Der Spaltanteil  $h_{\Delta R}$  zwischen Welle und Maximalkreis beträgt, wenn die Exzentrizität  $e$  gegenüber dem Wellenradius  $R$  klein ist,

$$(2.2) \quad h_{\Delta R} = \Delta R - e \cos(\varphi - \gamma).$$

Darin ist  $\gamma$  der Lagewinkel des Wellenzentrums  $Z$ . Die ganze Spalthöhe beträgt

$$(2.3) \quad h = \Delta R - e \cos(\varphi - \gamma) + \Delta h.$$

Um diese Beziehung dimensionslos zu schreiben, führt man folgende bezogenen Größen ein:

$$(2.4) \quad \text{relative Exzentrizität} \quad \varepsilon = \frac{e}{\Delta R}$$

$$(2.5) \quad \text{relative Spalthöhe} \quad \chi = \frac{h}{\Delta R}$$

$$(2.6) \quad \text{relative Segmentvertiefung} \quad \Delta\chi = \frac{\Delta h}{\Delta R}$$

Ausserdem wird später das relative Maximalkreis-Lagerspiel  $\psi$  verwendet, das durch die Gleichung

$$(2.7) \quad \psi = \frac{\Delta R}{R}$$

definiert ist.

Gleichung (2.3) lässt sich mit den eingeführten Größen auf folgende Form bringen:

$$(2.8) \quad \chi = 1 - \varepsilon \cos(\varphi - \gamma) + \Delta\chi$$

Es ist hier darauf hinzuweisen, dass  $\varepsilon$  auch grösser als Eins werden kann, doch wird  $\chi$  immer positiv oder Null sein:

$$(2.9) \quad \varepsilon \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \chi \geq 0.$$

Für jede Lagerform existiert für  $\varepsilon$  eine Grenzlinie  $\varepsilon_{max}$ , die im allgemeinen vom Lagewinkel  $\gamma$  abhängt (anschauliches Beispiel: Zitronenspiellager). Bei instationärem Betrieb ändern sich die Größen  $\varepsilon$  und  $\gamma$  und damit auch  $\chi$  zeitlich, während  $\Delta\chi$  nur vom Winkel  $\varphi$  des festen Polarkoordinatensystems abhängt. Die relative Spalthöhe ist somit vom Ort auf dem Segment und von der Zeit abhängig. Auf die zeitliche Änderung des Schmierpals werden wir im Abschnitt 6 noch näher eingehen.

Für den Spezialfall einer kreiszylindrischen Lagerschale ist in den Gleichungen dieses Kapitels  $\Delta h$  bzw.  $\Delta\chi$  gleich Null zu setzen. Für die relative Exzentrizität gilt dann  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  und  $\chi$  variiert im Bereich  $0 \leq \chi \leq 2$ .

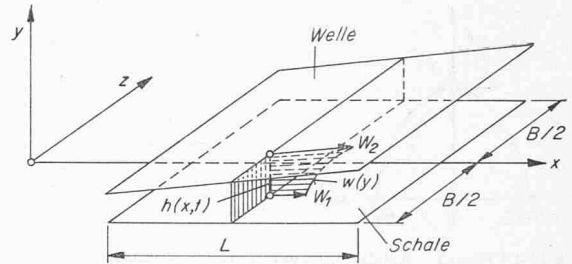


Bild 3.1. Geschwindigkeitsverteilung im Schmierpalt

Die Breite des betrachteten Lagers betrage  $B$  (Bild 2.4). Der Nullpunkt der  $z$ -Achse wird in die Symmetrieebene des Lagers gelegt. Die seitlichen Ränder des Lagers liegen folglich bei  $z = \pm B/2$ . In  $z$ -Richtung führt man als dimensionslose Koordinate

$$(2.10) \quad \zeta = \frac{z}{B/2}$$

ein. Das Lager erstreckt sich somit über den Bereich  $-1 \leq \zeta \leq +1$ .

Hinsichtlich der Spaltform halten wir fest, dass in unserer Rechnung der Schmierpalt über die Lagerbreite konstant ist.

$$(2.11) \quad \frac{\partial}{\partial z} h(\varphi, t) = 0$$

Wir werden jedoch in Abschnitt 17 ein Näherungsverfahren für die Berücksichtigung von seitlichen Randleisten (Staurändern) angeben.

### 3. Differentialgleichung für den Druck im Schmierpalt

Die bekannte Differentialgleichung für den Druck  $p$  in einem Schmierpalt, dessen Grenzflächen gemäss Bild 3.1 die tangentialen Geschwindigkeiten  $W_1$  und  $W_2$  besitzen und dessen örtliche Spalthöhe  $h(x, t)$  beträgt, lautet (siehe z. B. [4]):

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \left[ (W_1 + W_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right].$$

Unter dem Druck  $p$  sei hier der Überdruck gegenüber dem Umgebungsdruck, das heisst dem (konstanten) Druck an den Rändern der Segmente verstanden.

Für die Berechnung der Reibungskräfte an der Welle benötigt man ausserdem später den Geschwindigkeitsgradienten an der oberen, mit  $W_2$  bewegten Spaltfläche. Aus der bekannten Geschwindigkeitsverteilung über die Spalthöhe (siehe z. B. [4])

$$(3.2) \quad w(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 - \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} - \frac{W_2 - W_1}{h} \right) y + W_1$$

folgt

$$(3.3) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left( y - \frac{h}{2} \right) + \frac{W_2 - W_1}{h}$$

und daraus

$$(3.4) \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h + \frac{W_2 - W_1}{h}.$$

Wir wenden uns wieder der Differentialgleichung (3.1) für den Druck im Schmierpalt zu. Sie wird dem Fall des Radiallagers angepasst, indem wir in Bild 3.1 annehmen, dass die obere Gleitfläche die mit  $\omega$  rotierende Welle und die untere Fläche die ruhende Lagerschale darstellt. Folglich gilt

$$(3.5) \quad \begin{aligned} W_1 &= 0 \\ W_2 &= R\omega. \end{aligned}$$

Die Koordinate  $x$  in Umfangsrichtung geht über in

$$(3.6) \quad x = R\varphi.$$

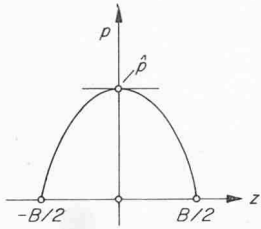


Bild 4.1 (links). Axiale Druckverteilung im Schmierspalt

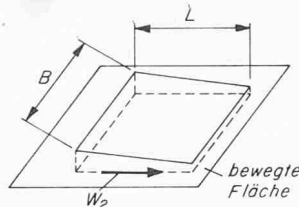


Bild 4.2 (rechts). Abmessungen des endlich breiten Segmentes

Wenn man die Gleichungen (2.5) und (2.7) und die Voraussetzung

$$(3.7) \quad \eta = \text{konst}$$

berücksichtigt und den Druck  $p$  gemäss

$$(3.8) \quad \frac{p\psi^2}{\eta\omega} \equiv \Pi$$

in den dimensionslosen Druck  $\Pi$  überführt, so wird aus der Differentialgleichung (3.1)

$$(3.9) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \chi^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi^3 \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) = 6 \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \frac{2}{\omega} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right]$$

Diese Gleichung kann mit der dimensionslosen Zeit  $\theta$  gemäss

$$(3.10) \quad \theta = \omega t$$

und der relativen Lagerbreite

$$(3.11) \quad \beta = \frac{B}{D} = \frac{B}{2R}$$

sowie unter Berücksichtigung der Gleichung (2.10) auf die Form

$$(3.12) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \chi^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \chi^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \right) = 6 \left( \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right)$$

gebracht werden.

Die Gleichung (3.12) stellt bezüglich der gesuchten Funktion  $\Pi(\varphi, \zeta, \theta)$  eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung dar. Da keine Ableitungen der gesuchten Funktion  $\Pi$  nach der dimensionslosen Zeit  $\theta$  vorkommen, hat  $\theta$  die Bedeutung eines Parameters. Für jeden Zeitpunkt ergibt sich auf der rechten Seite eine bestimmte Funktion  $f(\varphi)$ , die das Störglied der inhomogenen Differentialgleichung für die dem betreffenden Zeitpunkt  $\theta$  zugeordnete gesuchte Funktion  $\Pi(\varphi, \theta)$  darstellt.

#### 4. Vereinfachung der Differentialgleichung durch einen Ansatz für den axialen Druckverlauf im Schmierspalt

Die Lösung der vorliegenden partiellen Differentialgleichung für ein Segment mit allgemeiner Spaltform und physikalisch vertretbaren Randbedingungen in Umfangsrichtung ist nur mit numerischen Methoden möglich. Erfahrung mit der Integration der partiellen Druckdifferentialgleichung für segmentierte Gleitlager im stationären Fall zeigt, dass die numerische Integration der partiellen Differentialgleichung mit sehr beträchtlichem Rechenaufwand verbunden ist. Im Hinblick darauf, dass die Druckgleichung bei der Behandlung der zweiten Fundamentalaufgabe (siehe Abschnitt 1) für sehr viele Fälle gelöst werden muss, drängt sich ein vereinfachtes Lösungsverfahren für die Integration der Gleichung (3.12) auf.

Man erreicht die Vereinfachung in bekannter Weise (siehe z. B. [4]) durch einen parabolischen Ansatz für den Druckverlauf in axialer Richtung,

$$(4.1) \quad p = \hat{p} \left[ 1 - \left( \frac{|z|}{B/2} \right)^m \right]$$

der zugleich automatisch die Randbedingungen an den Seitenrändern ( $z = \pm B/2$ ) erfüllt, wo der Druck verschwindet ( $p = 0$ ). Mit  $\hat{p}$  bezeichnen wir den Druck in der Mittelebene des Lagers. Analog zur Gleichung (4.1) lautet die entsprechende dimensionslose Beziehung

$$(4.2) \quad \Pi = \hat{\Pi} (1 - |\zeta|^m)$$

wobei für  $\hat{\Pi}$  eine zu (3.8) analoge Definitionsgleichung gilt. Es wird vorausgesetzt, dass dieser Ansatz ohne Unterschied sowohl für den stationären als auch den instationären Betrieb eines Lagers gilt, was als Annahme naheliegender, aber nicht nachgewiesen ist.

Der Ansatz für die axiale Druckverteilung gemäss Gleichung (4.2) wird in die Differentialgleichung (3.1) eingesetzt und diese gliedweise über den Bereich von  $\zeta = -1$  bis  $\zeta = +1$  integriert:

$$(4.3) \quad \int_{-1}^{+1} \left( 1 - |\zeta|^m \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \chi^3 \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \right) d\zeta - \frac{1}{\beta^2} \chi^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \hat{\Pi} |\zeta|^m \right) \Big|_{\zeta = -1}^{\zeta = +1} = \int_{-1}^{+1} 6 \left( \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) d\zeta$$

Daraus folgt nach Auswertung der einzelnen Summanden

$$(4.4) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \chi^3 \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \right) - \frac{m+1}{\beta^2} \chi^3 \hat{\Pi} = 6 \frac{m+1}{m} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right)$$

Damit hat man die partielle Differentialgleichung (3.9) für die Druckverteilung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung (4.4) für den dimensionslosen Druck  $\hat{\Pi}$  in der Mittelebene des Lagers zurückgeführt; auch hier spielt die dimensionslose Zeit  $\theta$  wieder die Rolle eines Parameters.

Die dimensionslose Spaltfunktion  $\chi$  ist durch die Gleichung (2.8) gegeben. Ihre zeitliche Ableitung, die auf der rechten Seite von Gleichung (4.4) auftritt, werden wir in Abschnitt 6 noch näher betrachten. Zur Lösung der Differentialgleichung (4.4) für eine gegebene Spaltfunktion  $\chi(\varphi)$  muss der Parabelexponent bekannt sein. Beim stationär betriebenen Lager existieren zwei Grenzfälle. Für das sehr schmale Lager liefert die Theorie ([2], [4]) den Wert  $m = 2$ ; beim «unendlich breiten», das heisst seitlich abgeschlossenen Lager beträgt  $m = \infty$ . Für Lager endlicher Breite muss mit einem  $m$ -Wert zwischen diesen Grenzfällen gerechnet werden.

Aus der Literatur ist bekannt, dass bei kreiszylindrischen Lagern der Exponent  $m$  einer Näherungsparabel über die Länge der Gleitfläche nicht konstant ist und auch mit der relativen Exzentrizität variiert. Der als konstant festzulegende «mittlere»  $m$ -Wert kann nach verschiedenen Gesichtspunkten gewählt werden. Beispielsweise könnte gefordert werden, dass er so angenommen werden soll, dass das Druckmaximum im Spalt möglichst genau wiedergegeben wird. Im allgemeinen interessiert jedoch vor allem die Tragfähigkeit des Lagers, so dass man  $m$  so wählen wird; dass in erster Linie das Integral des Druckes über die ganze Druckzone mit der exakten Lösung möglichst gut übereinstimmt.

Vergleiche mit exakten Lösungen zeigen, dass der Parabelexponent wesentlich vom Seitenverhältnis

$$(4.5) \quad \lambda = \frac{B}{L}$$

abhängt (Bild 4.2). Ferner hat auch die Spaltform einen Einfluss auf  $m$ . Dabei zeigt sich, dass bei relativ einfachen Spaltformen, wie sie praktisch vorkommen, das Verhältnis der mittleren Spalthöhe  $\bar{h}_L$  in der Druckzone zur minimalen Spalthöhe  $h_{min}$  als Parameter eingeführt werden kann.

Für Kreisschalen hat sich der heuristische Ansatz

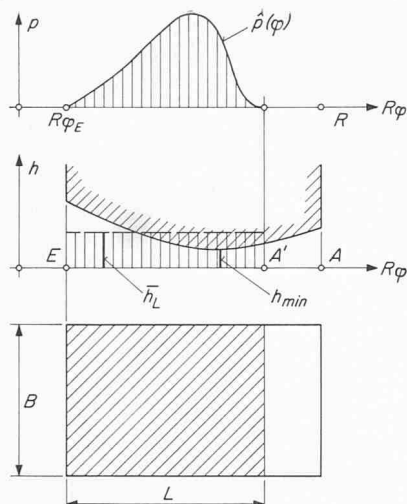
$$(4.6) \quad m = 2 + \left( \frac{3 \bar{h}_L / h_{min}}{2 + \bar{h}_L / h_{min}} \right) \frac{\lambda^2}{1 + 0,55 \lambda}$$

als brauchbar erwiesen.<sup>2)</sup> Anstelle des Verhältnisses  $\bar{h}_L / h_{min}$  kann auch  $\bar{\chi}_L / \chi_{min}$  geschrieben werden.

Der Aufbau und die Konstante des Ansatzes (4.6) wurden so gewählt, dass für eine Reihe von Kreisschalen mit verschiedenen

<sup>2)</sup> Unveröffentlichte Untersuchung aus dem Institut für Grundlagen der Maschinenkonstruktion an der ETH Zürich. In [16] ist anstelle von Gleichung (4.6) ein früherer Ansatz verwendet worden. Der Unterschied ist nicht erheblich.



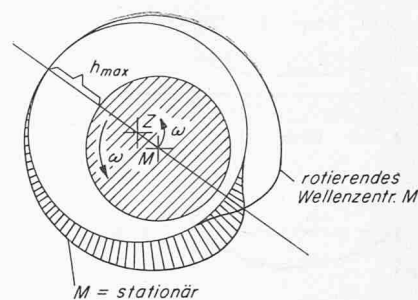


Links:

Bild 4.3. Zur Definition der mittleren Spalthöhe des druckbeaufschlagten Spaltteils (Länge der Druckzone =  $L$ )

Rechts:

Bild 5.4. Druckverteilung im zylindrischen Gleitlager (bei stationärer Wellenlage und bei Rotation des Wellenzentrums mit  $\omega$ )



Breiten und Umfangslängen bei gegebenen Wellenlagen (Exzentrizität und Lagewinkel) mit der Näherungsgleichung (4.4) genügend genau die gleiche Schalentragskraft erhalten wird wie bei Lösungen der partiellen Differentialgleichung; auf solche exakten Lösungen ist in [16] verwiesen. Der verwendete  $m$ -Ansatz (4.6) führt auch auf gute Näherungen für Reibung und Schmiermitteldurchsatz.

Der Wert von  $m$  ist gemäss den gemachten Annahmen von der Erstreckung des Segmentes in Umfangsrichtung abhängig. Das Längsverhältnis  $\lambda$ , das durch Gleichung (4.5) definiert ist, beträgt für das Segment eines Radialgleitlagers

$$(4.7) \quad \lambda = \frac{B}{R\Phi} = \frac{B}{R(\varphi_A - \varphi_E)}$$

Wenn die Druckzone nicht die ganze Segmentlänge ausfüllt, muss bei der Bestimmung des Seitenverhältnisses  $\lambda$  im Hinblick auf die Ermittlung des Exponenten  $m$  nicht die geometrische Segmentlänge, sondern nur die druckbeaufschlagte Länge eingesetzt werden (Bild 4.3). Da die Umfangslänge des Druckberges zunächst unbekannt ist, muss ein iteratives Verfahren angewandt werden.

## 5. Randbedingungen in Umfangsrichtung

Es wird angenommen, dass bei jedem Segment an den Grenzen  $\varphi_E$  und  $\varphi_A$  Schmiermittel mit dem Druck  $p = 0$  vorhanden ist. Da gemäss dem Ansatz (4.1) auch der Druck an den Seitenrändern verschwindet, beträgt der Druck somit an allen Segmentgrenzen Null.

Im einfachsten Fall hat man somit einen Druckverlauf, der sich nach Bild 5.1 über die ganze Segmentlänge erstreckt: Fall a. Aus Experimenten an stationär belasteten Lagern ist bekannt, dass im Schmierpalt keine oder im Vergleich zu den vorkommenden Überdrücken nur verschwindend kleine Unterdrücke auftreten können. Dieser Tatsache tragen die schon von O. Reynolds [1] vorgeschlagenen und durch Gümbel verwendeten Auslauf-Randbedingungen Rechnung,

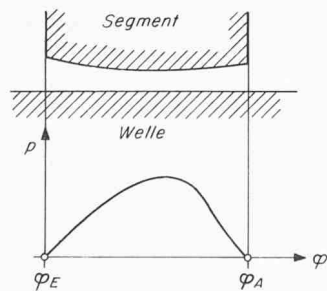


Bild 5.1 Druckverteilung im Fall a

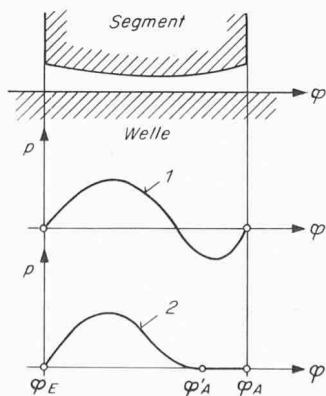


Bild 5.2 Druckverteilung im Fall b<sub>1</sub>

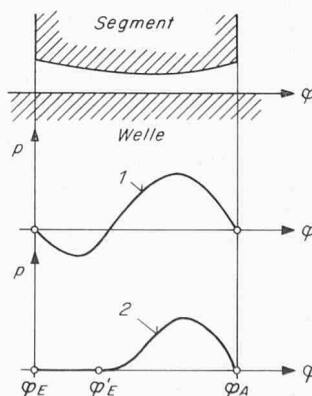


Bild 5.3 Druckverteilung im Fall b<sub>2</sub>

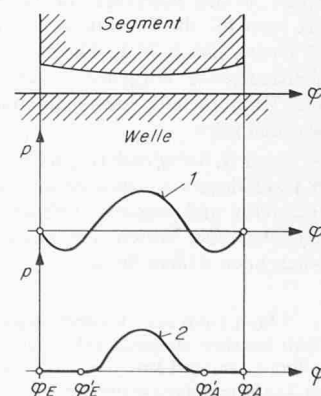


Bild 5.5 Druckverteilung im Fall b<sub>3</sub>

nach denen die Druckentwicklung dort endet, wo gleichzeitig die Bedingungen

$$(5.1) \quad p = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

erfüllt sind. In einem Schmierpalt, der gemäss Bild 5.2 mit den Randbedingungen  $p = 0$  an den Stellen  $\varphi_A$  und  $\varphi_E$  den Druckverlauf nach Kurve 1 ergeben würde, stellt sich mit den Randbedingungen (5.1) der Druckverlauf gemäss Kurve 2 ein: Fall b<sub>1</sub>. Im Gebiet zwischen  $\varphi_A'$  und  $\varphi_A$  reist der Schmierfilm bei konstantem Druck  $p = 0$  auf und füllt den Spalt nur teilweise [12]. Es sei hier daran erinnert, dass unter  $p$  der Überdruck gegenüber dem Umgebungsdruck zu verstehen ist.

Sowohl beim stationär wie beim instationär betriebenen Lager kommen Fälle vor, bei denen sich gemäss Bild 5.3 mit den Randbedingungen  $p = 0$  für  $\varphi_E$  und  $\varphi_A$  im Segment ein Druckverlauf entsprechend Kurve 1 einstellen würde. Da auch in diesem Fall keine Unterdrücke zu erwarten sind, drängt sich die Annahme auf, dass hier auf Eintrittsseite die Randbedingungsgleichungen (5.1) anzusetzen sind und sich ein Druckverlauf gemäss Bild 5.3, Kurve 2 einstellt: Fall b<sub>2</sub>. Ein einfaches Beispiel eines derartigen Falles ist das kreiszylindrische Lager, dessen Wellenachse mit der Winkelgeschwindigkeit der Welle um die Lagerachse rotiert. Wie leicht zu zeigen ist, erhält man hier eine Druckverteilung, die bezüglich der Verbindungsgeraden Lagermitte – Wellenmitte zur Druckverteilung im stationären Fall spiegelbildlich ist (sofern in beiden Fällen der Druck an der weitesten Spaltstelle gleich Null angenommen wird). Wenn die Randbedingungen gemäss Bild 5.2, Kurve 2 für den stationären Fall zutreffen, so müssen sie naheliegenderweise für eine drehende und gleichzeitig synchron umlaufende Welle entsprechend Bild 5.3, Kurve 2 angesetzt werden, was auf die in Bild 5.4 aufgezeichnete Druckverteilung führt.

Weiter ziehen wir einen Fall b<sub>3</sub> in Betracht, in welchem die Differentialgleichung beim Druck Null am Ein- und Austritt auf Unterdruckgebiete an beiden Enden führt (Bild 5.5, Kurve 1). Analog zu den Fällen b<sub>1</sub> und b<sub>2</sub> setzen wir bei Fall b<sub>3</sub> am Ein- und Austritt die Randbedingungsgleichungen (5.1) an, so dass sich ein Druckverlauf nach Bild 5.4, Kurve 2 ergibt. Der Fall b<sub>3</sub> kann beispielsweise im stationären Betrieb bei einer 360°-Kreisschale mit einem einzigen Öleintritt auftreten. Dieser Fall lässt sich mit den oben vorgeschlagenen Randbedingungen allerdings nur näherungsweise erfassen; eine exakte Betrachtung führt auf eine etwas andere Eintrittsseiten-Randbedingung

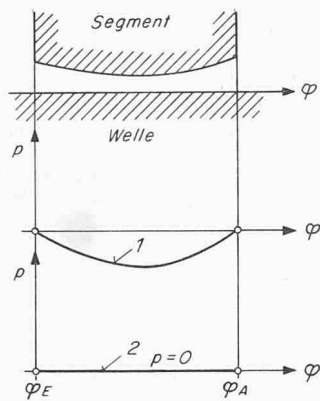


Bild 5.6 Druckverteilung im Fall c

Schliesslich kann ein Fall c eintreten, bei dem sich mit Druck Null am Rand im ganzen Segment Unterdruck ergeben würde. Hier reisst der Schmierfilm auf, und es stellt sich annähernd der Umgebungsdruck ein, so dass wir mit  $p = 0$  rechnen (Bild 5.6).

Wir setzen im Hinblick auf die Programmierung voraus, dass keine Segmentformen in Betracht gezogen werden, die auf andere als die fünf aufgeführten Druckverteilungsfälle führen. Auf eine Formulierung der dafür notwendigen Bedingungen wird hier jedoch verzichtet, weil man bei zweckmässigen Lagerformen mit den obigen Fällen auskommt<sup>3)</sup>.

Man muss sich an dieser Stelle fragen, wie weit die hier angenommenen Randbedingungen mit experimentellen Befunden übereinstimmen. Unter den wenigen diesbezüglichen Untersuchungen sind die Messungen von Th. E. Carl [9] zu erwähnen, aus denen hervorgeht, dass die hier vorgeschlagenen Randbedingungen nicht in Widerspruch zu den gemessenen Druckverläufen stehen.

Oben wurde bereits angedeutet, dass bei komplizierten Spaltformen noch andere als die aufgezählten Lösungsfälle denkbar sind. Wir beschränken uns hier jedoch ausdrücklich auf solche Spaltformen, deren Lösungen im Bereich der oben erwähnten Fälle liegen. Die bei sinnvollen Lagerkonstruktionen in der Praxis vorkommenden Fälle erfüllen diese Bedingung.

Es ist an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass der Parabelansatz für die axiale Druckverteilung und die hier in Betracht gezogenen Randbedingungen für den Druck in der Mittelebene die Aussage in sich schliessen, dass der Druckberg im Schmierpalt über die ganze Lagerbreite an der gleichen Stelle  $\varphi$  beginnt bzw. endet. Wie Rechnungen von H. W. Hahn [4] und von H. Sassenfeld und A. Walter [11] und die Messungen von Th. E. Carl [9] zeigen, ist dies nicht genau, aber immerhin mit annehmbarer Näherung erfüllt.

Die in diesem ganzen Abschnitt für den Überdruck  $p$  gemachten Überlegungen gelten auch für die durch Gleichung (3.8) definierte dimensionslose Druckgrösse  $\Pi$  und insbesondere für den dimensionslosen Druck  $\hat{\Pi}$  in der Mittelebene des Lagers.

Zu den in älteren Arbeiten über das instationäre Lager verwendeten Randbedingungen ist zu sagen, dass dort vorwiegend kreiszylindrische Lager mit periodisch angesetzten Druckverteilungen betrachtet werden; in den Bereichen, wo die Rechnung negative Drücke liefert, setzt man für die Ermittlung der resultierenden Kraft in der Regel den Druck gleich Null. Dieses vom physikalischen Standpunkt aus unbefriedigende Vorgehen wurde meist damit begründet, dass ohne diese Vereinfachung der mathematische Aufwand untragbar gross geworden wäre.

Auch G. Schaffrath [15] rechnet in seiner Theorie des segmentierten Radiallagers so, dass er an allen Rändern den Überdruck Null vorschreibt und negative Drücke im Segmentinnern einfach gleich Null setzt. Hier besteht ein wesentlicher Unterschied gegenüber der vorliegenden Abhandlung.

<sup>3)</sup> Man kann zum Beispiel zeigen, dass mit ungünstig gewähltem Öleintritt bei einer stationär belasteten 360°-Schale ein mit  $b_4$  zu bezeichnender Fall eintreten kann, der am Anfang und am Ende des Segmentes eine Druckzone und dazwischen ein Unterdruckgebiet aufweist. Als Näherungslösung bietet sich hier eine Aufteilung in zwei getrennt zu behandelnde Segmente an.

## 6. Die zeitliche Änderung des Schmierpaltess

Für die Gleichung (4.4) benötigt man die Ableitung der dimensionslosen Spalthöhe  $\chi$  nach der dimensionslosen Zeit  $\theta$ . Aus Gleichung (2.8) folgt unmittelbar:

$$(6.1) \quad \frac{d\chi}{d\theta} = -\cos(\varphi - \gamma) \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \varepsilon \sin(\varphi - \gamma) \frac{d\gamma}{d\theta}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass in Gleichung (4.4) die Grösse  $\frac{d\chi}{d\theta}$  mit dem Faktor 2 vorkommt, definieren wir

$$(6.2) \quad 2 \frac{d\varepsilon}{d\theta} \equiv E$$

$$(6.3) \quad 2 \frac{d\gamma}{d\theta} \equiv G$$

Wegen der Definitionsgleichung (3.10) für  $\theta$  kann man auch schreiben

$$(6.4) \quad \frac{2}{\omega} \frac{d\varepsilon}{dt} = E$$

$$(6.5) \quad \frac{2}{\omega} \frac{d\gamma}{dt} = G$$

$E$  ist die dimensionslose Radial- und  $G$  die dimensionslose Tangentialgeschwindigkeit des Wellenzentrums.

Somit folgt

$$(6.6) \quad 2 \frac{d\chi}{d\theta} = - \left[ E \cos(\varphi - \gamma) + G \varepsilon \sin(\varphi - \gamma) \right]$$

## 7. Transformation der Differentialgleichung für den Druckverlauf

Aus der Literatur ist bekannt (siehe z. B. [4]), dass die Differentialgleichung (4.4) einfacher wird, wenn man statt der Variablen  $\hat{\Pi}$  eine neue Grösse

$$(7.1) \quad u = \chi^{\kappa} \hat{\Pi}$$

einführt. Wird  $\kappa = 3/2$  gesetzt, so verschwindet in der Differentialgleichung die erste Ableitung nach  $\varphi$ . Wir setzen also

$$(7.2) \quad \hat{\Pi} = \chi^{-\frac{3}{2}} u$$

und die erforderlichen Ableitungen dieser Transformationsgleichung in Gleichung (4.4) ein. Mit der vereinfachten Schreibweise

$$(7.3) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \quad \right) \equiv \left( \quad \right)_{\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \quad \right) \equiv \left( \quad \right)_{\theta}$$

lautet die umgeformte Differentialgleichung

$$(7.4) \quad u_{\varphi\varphi} - \left[ \frac{3}{2\chi^2} \left( \chi_{\varphi\varphi} \chi + \frac{1}{2} \chi_{\varphi}^2 \right) + \frac{m+1}{\beta^2} \right] u = \\ = 6 \frac{m+1}{m} \chi^{-\frac{3}{2}} \left( \chi_{\varphi} + 2 \chi_{\theta} \right)$$

Da die dimensionslose Zeit  $\theta$  die Bedeutung eines Parameters besitzt, liegt eine lineare, gewöhnliche, inhomogene Differentialgleichung für  $u$  vor.

Wir schreiben die Gleichung (7.4) mit

$$(7.5) \quad A \equiv \frac{3}{2\chi^2} \left( \chi_{\varphi\varphi} \chi + \frac{1}{2} \chi_{\varphi}^2 \right) + \frac{m+1}{\beta^2}$$

$$(7.6) \quad Z \equiv 6 \frac{m+1}{m} \chi^{-\frac{3}{2}} \left( \chi_{\varphi} + 2 \chi_{\theta} \right)$$

in der abgekürzten Form

$$(7.7) \quad u_{\varphi\varphi} - A u = Z.$$

Die in den Gleichungen (7.4) bis (7.6) vorkommende Spaltfunktion ist durch Gleichung (2.8) gegeben. Ihre Ableitungen nach  $\varphi$  lauten

$$(7.8) \quad \chi_{\varphi} = \varepsilon \sin(\varphi - \gamma) + \Delta \chi_{\varphi}$$

$$(7.9) \quad \chi_{\varphi\varphi} = \varepsilon \cos(\varphi - \gamma) + \Delta \chi_{\varphi\varphi}$$

Für das durch Gleichung (7.6.) definierte Störglied  $Z$  kann unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.8), (6.6) und (7.8) geschrieben werden

$$(7.10) \quad Z = 6 \frac{m+1}{m} \frac{(1-G)\varepsilon \sin(\varphi - \gamma) - E \cos(\varphi - \gamma) + \Delta \chi_{\varphi}}{[1 - \varepsilon \cos(\varphi - \gamma) + \Delta \chi]^3/2}$$

In einigen Spezialfällen ergeben sich wesentliche Vereinfachungen des Störgliedes:

- stationärer Betrieb:  $G = 0$   
 $E = 0$
- reine Radialbewegung des Wellenzentrums:  $G = 0$
- reine Tangentialbewegung des Wellenzentrums:  $E = 0$
- $\omega/2$ -Rotation des Wellenzentrums:  $E = 0$   
 $G = 1$
- Radialbewegung bei gleichzeitiger  $\omega/2$ -Rotation des Wellenzentrums («reine Verdrängungsströmung»):  $G = 1$

## 8. Randbedingungen für die Variable $u$

Im Anschluss an die Umformung der Differentialgleichung sind noch die für  $u$  geltenden Randbedingungen anzugeben. Da an den Spaltstellen, wo nach Abschnitt 5 der Druck  $p$  Null wird, weder der in Gleichung (3.8) vorkommende Faktor  $\psi^2/\eta\omega$  noch die in der Gleichung (7.2) auftretende dimensionslose Spalthöhe  $\chi$  verschwinden, gelten die Randbedingungen für  $p$  auch für die neue Variable  $u$ , und man hat auch hier die in Abschnitt 5 aufgeführten fünf Fälle.

## 9. Integration der Differentialgleichung für $u$

Die vorliegende Differentialgleichung für  $u$  lässt sich nicht geschlossen integrieren. Sie kann in ein lineares Differenzen-Gleichungssystem übergeführt werden, das numerisch gelöst wird. Wie sich zeigen wird, ist die Anpassung der Lösung an die Randbedingungen in bestimmten Fällen nur mit einem iterativen Verfahren möglich.

Gemäss der gestellten Aufgabe suchen wir die Lösung  $u$  der gegebenen Gleichung (7.7) für ein Segment im Bereich  $\varphi_E \leq \varphi \leq \varphi_A$ . Wir teilen dieses Segment in  $n$  gleiche Teile ein, deren Länge

$$(9.1) \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi_A - \varphi_E}{n} = \frac{\Phi}{n}$$

beträgt. Die Intervall-Grenzen werden nach Bild 9.1 mit  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$  bezeichnet.

Es gilt also

$$(9.2) \quad \varphi_0 = \varphi_E \quad \text{und} \quad \varphi_n = \varphi_A.$$

Da die Differenzenausdrücke im nachfolgenden Verfahren im allgemeinen mit 5 Stützstellen gebildet werden, soll

$$(9.3) \quad n \geq 4$$

sein.

Die Ersetzung der Differentialgleichung durch ein Differenzengleichungssystem geht so vor sich, dass man von der gesuchten Lösung  $u$  die Werte  $u_0, u_1, \dots, u_n$  an den Intervall-Grenzen sucht. Diese Werte  $u_v$  sind gegenseitig durch lineare Gleichungen verknüpft, die durch Überführung der gegebenen Differentialgleichung in eine Differenzengleichung entstehen.

Die gegebene Gleichung (7.7) verlangt einen Differenzenausdruck für die zweite Ableitung  $u_{\varphi\varphi}$ . Dieser lautet nach [13] für eine Stelle  $\varphi_v$ , bei der beidseitig des Aufpunktes noch je 2 Stützstellen herangezogen werden können [ $2 \leq v \leq (n-2)$ ]

$$(9.4) \quad u_{\varphi\varphi} \approx \frac{1}{12 (\Delta\varphi)^2} (-u_{v-2} + 16 u_{v-1} - 30 u_v + 16 u_{v+1} - u_{v+2})$$

Liegt der Aufpunkt  $\varphi_v$  in der Nähe der Segmentränder, so stehen uns nicht beidseitig je 2 Stützstellen zur Verfügung. Es lassen sich jedoch auch Differenzenausdrücke für asymmetrische Verteilung der

Stützstellen angeben. Die hier benötigten Gleichungen lauten (sie stammen entweder aus [13] oder wurden speziell hergeleitet):

$$(9.5) \quad u_{\varphi\varphi} \Big|_{v=0} \approx \frac{1}{12 (\Delta\varphi)^2} (35 u_0 - 104 u_1 + 114 u_2 - 56 u_3 + 11 u_4)$$

$$(9.6) \quad u_{\varphi\varphi} \Big|_{v=1} \approx \frac{1}{12 (\Delta\varphi)^2} (11 u_0 - 20 u_1 + 6 u_2 + 4 u_3 - u_4)$$

$$(9.7) \quad u_{\varphi\varphi} \Big|_{v=n-1} \approx \frac{1}{12 (\Delta\varphi)^2} (-u_{n-4} + 4 u_{n-3} + 6 u_{n-2} - 20 u_{n-1} + 11 u_n)$$

$$(9.8) \quad u_{\varphi\varphi} \Big|_{v=n} \approx \frac{1}{12 (\Delta\varphi)^2} (11 u_{n-4} - 56 u_{n-3} + 114 u_{n-2} - 104 u_{n-1} + 35 u_n)$$

Dabei sind die Ausdrücke direkt für jene  $v$ -Werte hingeschrieben, für welche die Gleichungen verwendet werden (Randpunkte und je der erste Punkt innerhalb des Segment-Bereiches).

Mit Hilfe der obigen Differenzenausdrücke lässt sich für jeden Punkt  $\varphi_v = \varphi_0 + v (\Delta\varphi)$  des Segment-Bereiches die der Differentialgleichung entsprechende Differenzengleichung schreiben:

$$(9.9) \quad v=0: \quad (35 - c A_0) u_0 - 104 u_1 + 114 u_2 - 56 u_3 + 11 u_4 = c Z_0$$

$$(9.10) \quad v=1: \quad 11 u_0 - (20 + c A_1) u_1 + 6 u_2 + 4 u_3 - u_4 = c Z_1$$

$$\vdots$$

$$(9.11) \quad 2 \leq v \leq (n-1): \quad -u_{v-2} + 16 u_{v-1} - (30 + c A_v) u_v + 16 u_{v+1} - u_{v+2} = c Z_v$$

$$\vdots$$

$$(9.12) \quad v=n-1: \quad -u_{n-4} + 4 u_{n-3} + 6 u_{n-2} - (20 + c A_{n-1}) u_{n-1} + 11 u_n = c Z_{n-1}$$

$$(9.13) \quad v=n: \quad 11 u_{n-4} - 56 u_{n-3} + 114 u_{n-2} - 104 u_{n-1} + (35 - c A_n) u_n = c Z_n$$

In diesen Gleichungen bedeuten

$$(9.14) \quad c = 12 (\Delta\varphi)^2$$

$$(9.15) \quad A_v = A \Big|_{\varphi = \varphi_E + v \Delta\varphi}$$

$$(9.16) \quad Z_v = Z \Big|_{\varphi = \varphi_E + v \Delta\varphi}$$

wobei die Grössen  $A$  und  $Z$  durch die Gleichungen (7.5) und (7.10) gegeben sind.

Bis hierher wurde rein formal die Differentialgleichung für  $u$  in ein System von  $(n+1)$  linearen Gleichungen für die Grössen  $u_0, \dots, u_n$  übergeführt, ohne die Randbedingungen zu berücksichtigen. Wie aus Abschnitt 8 hervorgeht, liegt der einfachste Fall  $a$  dann vor, wenn mit den Randwerten  $u=0$  für  $\varphi_E$  und  $\varphi_A$  die Lösung  $u$  im ganzen Segment positiv ist. Aber auch wenn dies nicht zutrifft, muss die Differentialgleichung in jedem Fall zunächst einmal mit diesen Randbedingungen gelöst werden, damit festgestellt werden kann, ob tatsächlich Fall  $a$  oder möglicherweise ein anderer Fall vorliegt. Die Frage, wie die anderen Fälle festgestellt werden, soll vorerst nicht weiter verfolgt werden, und wir wenden uns der Lösung für  $u=0$  an den Rändern zu. Diese wird einfach dadurch erhalten, dass die Gleichungen (9.9) für  $v=0$  und (9.13) für  $v=n$  durch die Bedingungen

$$(9.17) \quad u_0 = 0$$

$$(9.18) \quad u_n = 0$$

ersetzt werden. Das Gleichungssystem reduziert sich damit auf  $(n-1)$  Gleichungen mit  $(n-1)$  Unbekannten, die somit bestimmt sind.



Wir bezeichnen diese Lösung, die die Grundlage für die Ermittlung der verschiedenen Fälle bildet, mit  $u^*$ .

$$(9.19) \quad u^* = (0, u_1^*, \dots, u_{\nu}^*, \dots, u_{n-1}^*, 0).$$

Sie stellt die Lösung dar, die sich unabhängig von der Art des Verlaufes von  $u$  ergibt, wenn  $u$  an den Rändern  $\varphi_E$  und  $\varphi_A$  des Segmentes gleich Null gesetzt wird. Wenn alle  $u_{\nu}^* \geq 0$  sind, liegt Fall  $a$  vor.

## 10. Ausscheidung der verschiedenen Randbedingungsfälle

Wir behandeln in diesem Abschnitt ein Verfahren, mit dem bei einer zahlenmässig vorliegenden Lösung  $u^*$  festgestellt werden kann, welchen Randbedingungsfall man vor sich hat; die Bedeutung von  $u^*$  ist aus Gleichung (9.19) ersichtlich. Wir erinnern daran, dass wir nur solche Spaltformen voraussetzen, die auf keine anderen Druckverläufe führen als solche, die nach Abschnitt 5 zugelassen sind<sup>4)</sup>.

Die Identifikation der Lösungen kann nach dem auf Bild 10.1 dargestellten Schema erfolgen, das auf die Anwendung von digitalen Rechenautomaten zugeschnitten ist. Wie aus Bild 10.1 hervorgeht, werden für die Identifikation der Fälle  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  die Tangentensteigungen  $\partial u^* / \partial \varphi$  an den Stellen  $\varphi_E$  und  $\varphi_A$  benötigt. Da uns  $u^*$  in der Form von Gleichung (9.19) gegeben ist, haben wir diese Tangentensteigungen durch die gegebenen Funktionswerte  $u_{\nu}^*$  auszudrücken. Wenn wir für die Neigungen an den Rändern noch je die vier benachbarten Funktionswerte heranziehen, so ergibt sich nach [13], wenn wir noch  $u_0^* = 0$  und  $u_n^* = 0$  berücksichtigen:

$$(10.1) \quad \left. \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \right|_E = \frac{1}{12 \Delta \varphi} (48 u_1^* - 36 u_2^* + 16 u_3^* - 3 u_4^*)$$

$$(10.2) \quad \left. \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \right|_A = \frac{1}{12 \Delta \varphi} (3 u_{n-4}^* - 16 u_{n-3}^* + 36 u_{n-2}^* - 48 u_{n-1}^*)$$

Wie aus dem Schema in Bild 10.1 hervorgeht, ist die gesuchte Funktion  $u$  bekannt, wenn die Lösung  $u^*$  auf die Fälle  $a$  oder  $c$  führt. Im Falle  $a$  ist  $u^*$  bereits die gesuchte Lösung, und im Fall  $c$  lautet die Lösung (gemäss Bild 5.6)  $u_{\nu} = 0$ , das heisst  $u$  ist an allen Stellen im betreffenden Segment gleich Null zu setzen.

In den Fällen  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  ist das Gleichungssystem (9.9) ... (9.13) entsprechend den Bildern 5.2 ... 5.4 mit geänderten Randbedingungen zu lösen (Druckberggrenzen im Innern des Segmentes; siehe Abschnitt 11).

## 11. Ermittlung der Lösung $u$ für die Fälle mit tangentialen Grenzen des Druckberges im Schmierspalt-Innern (Fälle $b_1$ , $b_2$ und $b_3$ )

Zunächst soll der komplizierteste der drei Fälle, der Fall  $b_3$  behandelt werden. Wenn er gelöst ist, lassen sich die Lösungen für die beiden übrigen Fälle durch Spezialisierung gewinnen.

<sup>4)</sup> Mathematisch kann diese Bedingung so formuliert werden, dass die Lösung  $u^*$  ausser am Rand höchstens noch an zwei weiteren Stellen verschwinden darf und im Fall von 2 inneren Nullstellen zwischen diesen ein Maximum besitzt.

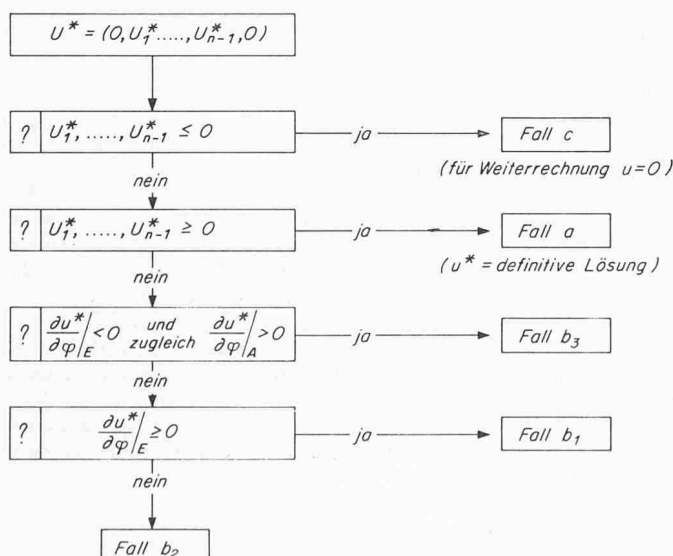


Bild 10.1. Identifikationsschema für die verschiedenen Lösungen

## 11.1 Fall $b_3$

Wir setzen voraus, dass die Lösung  $u^*$  unseres Problems die in Bild 11.1 dargestellte Form hat. Verändert man nach Bild 11.2 die Randwerte  $u_0$  und  $u_n$ , so ergeben sich zu jedem Wertepaar  $(u_0, u_n)$  für die beiden Minima die Ordinaten  $u_{m1}$  und  $u_{m2}$ . Wir können somit schreiben

$$u_{m1} = f_1(u_0, u_n)$$

$$u_{m2} = f_2(u_0, u_n)$$

Die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  können als gekrümmte Flächen über der Ebene  $(u_0, u_n)$  aufgefasst werden.

Wir suchen nun jenes Wertepaar  $(u_{00}, u_{n0})$ , das gleichzeitig  $u_{m1} = 0$  und  $u_{m2} = 0$  liefert, das heisst jene Lösung, bei der die Minima auf der Achse  $u = 0$  liegen (Bild 11.3).

Da die Lösung  $u(\varphi)$  in einer Form entsprechend Gleichung (9.19) erhalten wird, können die vorerwähnten Minima-Bedingungen als erfüllt betrachtet werden, wenn die Randwerte  $u_{00}$  und  $u_{n0}$  so liegen, dass die tiefsten Ordinaten  $u_{\alpha}$  und  $u_{\xi}$  im Bereich der beiden Minima gleich Null sind (Bild 11.4). Bei genügend feiner Einteilung des Integrationsintervalls kann auf ein verfeinertes Verfahren (etwa mit Approximation der Lösungsfunktion im Bereich des Minimums durch eine Parabel) verzichtet werden.

Auf die praktische Durchführung der iterativen Randwertanpassung zur Erfüllung der Tangenten-Bedingungen sei hier nicht eingegangen, da es sich hier um ein Problem der numerischen Rechen-technik handelt.

## 11.2 Fälle $b_1$ und $b_2$

Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt bemerkt, ergeben sich diese Fälle als Spezialfälle von Fall  $b_3$ . Die Spezialisierung besteht darin, dass am einen oder anderen Rand des Segmentes (d. h. bei  $\varphi_E$  oder  $\varphi_A$ ) die feste Randbedingung  $u = 0$  gegeben ist. Das andere Ende des Druckberges mit der «horizontalen» Drucktangente wird entsprechend dem Fall  $b_3$  behandelt.

\*

Abschliessend ist noch darauf hinzuweisen, dass Fälle, die sich aufgrund der Lösung  $u^*$  als Fall  $b_3$  mit einem sehr schwachen Unterdruckgebiet an einem der beiden Enden ergeben, nach durchgeführter Anpassung an die Randbedingung in den Fall  $b_1$  oder  $b_2$  übergehen können; dies bedeutet jedoch für die praktische Durchführung der Rechnung keine Komplikation.

## 12. Resultierende Öldräfte eines Segmentes (Druck- und Schubkräfte)

Nachdem der Verlauf von  $u$  und damit der Druckverlauf im Spalt bekannt ist, können die auf die Welle wirkende resultierende Ölkraft und das Moment berechnet werden.

Am Flächenelement  $df$  wirken der Druck  $p$  und die Schubspannung  $\tau_w$ . Daraus ergeben sich an der Welle eine resultierende Kraft und ein Moment.

### 12.1 Resultierende Wellenkraft eines Segmentes (auf die Welle wirkende Ölkraft)

Auf das Flächenelement wirken die Komponenten

$$(12.1) \quad \begin{Bmatrix} dP_V \\ dP_H \end{Bmatrix} = -p \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} df + \tau_w \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} df$$

Wir ersetzen  $df$  durch  $R d\varphi dz$  und integrieren:

$$(12.2) \quad \begin{Bmatrix} P_V \\ P_H \end{Bmatrix} = \int_{\varphi_E}^{\varphi_A} \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \left[ -p \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} + \tau_w \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} \right] R dz d\varphi$$

Aus den Komponenten folgt als Resultierende

$$(12.3) \quad P = \sqrt{P_V^2 + P_H^2}$$

und der Richtungswinkel  $\sigma$  beträgt

$$(12.4) \quad \sigma = \arctg \frac{P_V}{P_H}$$

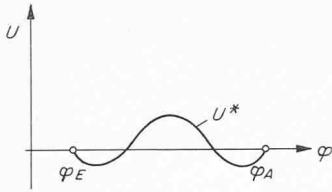


Bild 11.1. Verlauf der Funktion  $u^*$  im Fall  $b_3$

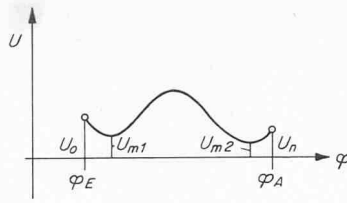


Bild 11.2. Verlauf der Funktion  $u$  mit angehobenen Randwerten (Fall  $b_3$ )

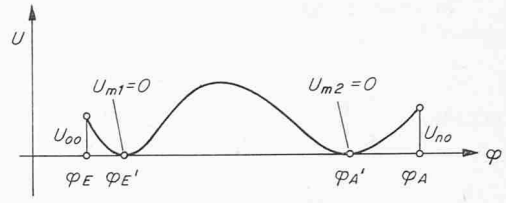


Bild 11.3. Verlauf der Funktion  $u$  mit erfüllten Tangenten-Bedingungen (Fall  $b_3$ )

Für die an der Welle angreifende Schubspannung  $\tau_w$ , deren positive Richtung durch Bild 12.1 definiert ist, gilt unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.4), (3.5), (3.6), (2.5) und (2.7) nach Newton

$$(12.5) \quad \tau_w = -\eta \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=h} = -\left( \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \chi \psi + \frac{\eta \omega}{\chi \psi} \right)$$

Setzt man Gleichung (12.5) in (12.2) ein, so folgt

$$(12.6) \quad \left. \begin{matrix} P_V \\ P_H \end{matrix} \right\} = - \int_{\varphi_{E'}}^{\varphi_{A'}} \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \left[ p \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \chi \psi + \frac{\eta \omega}{\chi \psi} \right) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} \right] R dz d\varphi$$

Als Grenzen des Integrationsbereichs sind die Grenzen des Druckgebietes  $\varphi_{E'}$  und  $\varphi_{A'}$  angeschrieben, weil Gleichung (12.6) nur dann gilt, wenn der Schmierspalt mit Öl gefüllt ist. Dort, wo sich die Druckzone bis an den Rand erstreckt, ist als Grenze  $\varphi_E$  bzw.  $\varphi_A$  einzusetzen.

Wir greifen auf den Ansatz (4.1) für  $p(z)$  zurück, setzen ihn in Gleichung (12.6) ein und integrieren diese Gleichung über die Lagerbreite, das heisst von  $z = -\frac{B}{2}$  bis  $z = +\frac{B}{2}$ . Das Ergebnis lautet

$$(12.7) \quad \left. \begin{matrix} P_V \\ P_H \end{matrix} \right\} = - \int_{\varphi_{E'}}^{\varphi_{A'}} \left[ \frac{m}{m+1} B \hat{p} \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} + \left( \frac{1}{2} \frac{m}{(m+1)} B \frac{\partial p}{\partial \varphi} \chi \psi + B \frac{\eta \omega}{\chi \psi} \right) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} \right] R d\varphi$$

Nun definieren wir

$$(12.8) \quad \frac{P_V}{2RB} \frac{\psi^2}{\eta \omega} \equiv V$$

$$(12.9) \quad \frac{P_H}{2RB} \frac{\psi^2}{\eta \omega} \equiv H$$

und analog auch für die Resultierende

$$(12.10) \quad \frac{P}{2RB} \frac{\psi^2}{\eta \omega} \equiv S_o$$

Die neu eingeführten Grössen  $V$ ,  $H$ , und  $S_o$  sind die Sommerfeldzahlen der Kräfte  $P_V$ ,  $P_H$  und  $P$ . Gleichung (12.7) schreibt sich mit

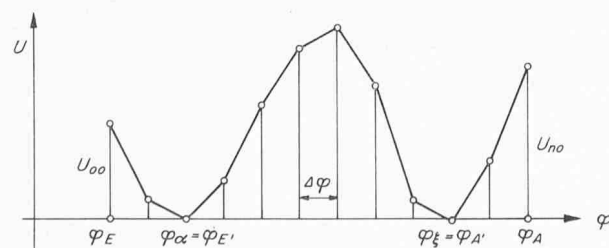


Bild 11.4. Verlauf der Funktion  $u$  als Lösung des Differenzengleichungs-Systems (Fall  $b_3$ )

diesen neuen Grössen, wenn wir ausserdem für  $\hat{p}$  nach Gleichung (3.8) den dimensionslosen Druck  $\hat{\Pi}$  einführen:

$$(12.11) \quad \left. \begin{matrix} V \\ H \end{matrix} \right\} = - \int_{\varphi_{E'}}^{\varphi_{A'}} \left[ \frac{m}{2(1+m)} \hat{\Pi} \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} + \psi \left( \frac{m}{4(1+m)} \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \chi + \frac{1}{2\chi} \right) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} \right] d\varphi$$

Bei gliedweiser Integration tritt das Integral

$$(12.12) \quad J = \int_{\varphi_{E'}}^{\varphi_{A'}} \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \chi \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} d\varphi$$

auf. Durch partielle Integration erhält man

$$(12.13) \quad J = \hat{\Pi} \chi \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} \Big|_{\varphi_{E'}}^{\varphi_{A'}} - \int_{\varphi_{E'}}^{\varphi_{A'}} \hat{\Pi} \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} - \chi \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} \right] d\varphi$$

Der erste Summand ist Null, weil  $\hat{\Pi}$  an den Rändern verschwindet. Das verbleibende Integral setzen wir in Gleichung (12.11) ein und gelangen zu

$$\left. \begin{matrix} V \\ H \end{matrix} \right\} = - \frac{m}{2(1+m)} \int_{\varphi_{E'}}^{\varphi_{A'}} \left( 1 + \frac{\psi \chi}{2} \right) \hat{\Pi} \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} d\varphi - \psi \int_{\varphi_{E'}}^{\varphi_{A'}} \left( \frac{1}{2\chi} - \frac{m}{4(1+m)} \hat{\Pi} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} d\varphi$$

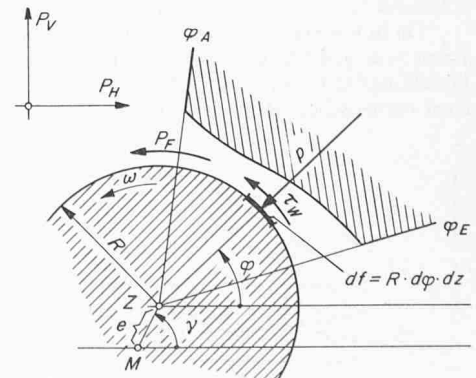


Bild 12.1. Vom Öl her auf die Welle wirkende Kräfte

Im ersten Integral ist in allen interessierenden Fällen  $\chi\psi \ll 1$ , so dass sich

$$(12.14) \quad \frac{V}{H} = - \frac{m}{2(1+m)} \int_{\varphi_E'}^{\varphi_A'} \hat{\Pi} \left\{ \begin{array}{c} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{array} \right\} d\varphi - \psi \int_{\varphi_E'}^{\varphi_A'} \left( \frac{1}{2\chi} - \frac{m}{4(1+m)} \hat{\Pi} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right) \left\{ \begin{array}{c} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{array} \right\} d\varphi$$

ergibt. Im allgemeinen sind das erste und das zweite Integral von gleicher Grössenordnung, so dass man das mit  $\psi$  multiplizierte zweite Integral gegenüber dem ersten vernachlässigen kann. Dann erhält man

$$(12.15) \quad \frac{V}{H} = - \frac{m}{2(1+m)} \int_{\varphi_E'}^{\varphi_A'} \hat{\Pi} \left\{ \begin{array}{c} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{array} \right\} d\varphi$$

Dieses Resultat ergibt sich auch direkt, wenn man in Gleichung (12.2) nur die Druckkräfte auf die Welle berücksichtigt. Es gibt auch Fälle, in denen die beiden Summanden in Gleichung (12.14) klein und etwa gleich gross sind, so dass Gleichung (12.15) einen grossen relativen Fehler ergibt.

An Stelle von  $\hat{\Pi}$  kann nach Gleichung (7.2)  $u$  eingeführt werden. Das Resultat (12.14) schreibt sich dann

$$(12.16) \quad \frac{V}{H} = - \frac{m}{2(1+m)} \int_{\varphi_E'}^{\varphi_A'} u \chi - \frac{3}{2} \left\{ \begin{array}{c} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{array} \right\} d\varphi - \psi \left[ \int_{\varphi_E'}^{\varphi_A'} \frac{1}{2\chi} \left\{ \begin{array}{c} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{array} \right\} d\varphi - \frac{m}{4(1+m)} \int_{\varphi_E'}^{\varphi_A'} u \chi - \frac{3}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \left\{ \begin{array}{c} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{array} \right\} d\varphi \right]$$

wobei auch hier wieder die mit  $\psi$  multiplizierte eckige Klammer in vielen Fällen vernachlässigt werden kann.

Es ist hier noch darauf hinzuweisen, dass in Gleichung (12.16) im ersten und dritten Integral in allen Fällen  $\varphi_E$  und  $\varphi_A$  als Grenzen eingesetzt werden dürfen, da die Funktion  $u$  dann, wenn sich der Druckberg nicht über die ganze Segmentlänge erstreckt, zwischen  $\varphi_E$  und  $\varphi_E'$  einerseits und zwischen  $\varphi_A$  und  $\varphi_A'$  andererseits Null gesetzt wird (vgl. Bilder 5.5 und 11.4). Beim mittleren Integral ist jedoch nur über das Gebiet  $\varphi_E' \leq \varphi \leq \varphi_A'$  zu integrieren, da ausserhalb dieses Bereiches der Spalt beim Druck  $p = 0$  nur teilweise gefüllt ist und sich dort die Schubspannung im allgemeinen instationären Fall nicht angeben lässt. (Für den stationären Fall besteht ein Ansatz; siehe Abschnitt 12.2).

Da in unserem Berechnungsverfahren sich die Funktion  $u$  in der Form von gleichmässig verteilten Funktionswerten ergibt, sind in Gleichung (12.16) zum mindesten das erste und das dritte Integral mit einer numerischen Methode zu berechnen.

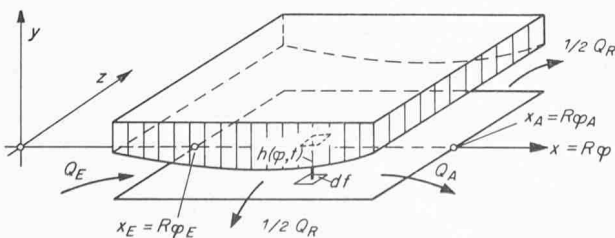


Bild 13.1. Ölfluss an den Segmenträndern

Mit Gleichung (12.16) sind die dimensionslosen Komponenten der resultierenden Kraft gefunden. Grösse und Richtung der Resultierenden sind daraus nach den Gleichungen

$$(12.17) \quad S_o = \sqrt{H^2 + V^2}$$

$$(12.18) \quad \sigma = \arctan \frac{V}{H}$$

zu berechnen.

### 12.2 Resultierende Umfangskraft eines Segmentes

Die am Wellenelement  $df$  wirkende Umfangskraft  $dP_F$ , die das an der Welle angreifende Reibungsmoment bewirkt, beträgt

$$(12.23) \quad dP_F = \tau_W df$$

wobei die Kraft  $P_F$  positiv ist, wenn sie in positiver  $\omega$ -Richtung läuft (Bild 12.1). Für  $\tau_W$  setzen wir den Wert aus Gleichung (12.5) ein und erhalten

$$(12.24) \quad P_F = - \int_{\varphi_E'}^{\varphi_A'} \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \chi \psi + \frac{\eta \omega}{\chi \psi} \right) R dz d\varphi + \Delta P_F.$$

Die Integrationsgrenzen sind auch hier (wie bei der Berechnung der resultierenden Kraft) für den allgemeinsten Fall angeschrieben, in welchem sich der Druckberg nur über den Bereich  $\varphi_E' \leq \varphi \leq \varphi_A'$  erstreckt. Die Fälle, in denen die Druckentwicklung am Rand beginnt, können als Spezialfälle aufgefasst werden.

Das Glied  $\Delta P_F$  ist die Umfangskraft in den nur teilweise mit Öl gefüllten Schmierspaltteilen  $\varphi_E \leq \varphi \leq \varphi_E'$  und  $\varphi_A' \leq \varphi \leq \varphi_A$ . Für den instationären Fall lässt sich über den Füllungsstand dieser Spaltteile im allgemeinen kaum etwas aussagen. Es liegt jedoch nahe, den Reibungsanteil  $\Delta P_F$  der teilweise gefüllten Spaltbereiche in Anlehnung an den Ansatz von W. Frössel [12], der für den stationären Fall gilt, näherungsweise zu berechnen, was hier nicht näher ausgeführt wird.

Sowohl  $P_F$  wie  $\Delta P_F$  können entsprechend Gleichung (12.8) ... (12.10) dimensionslos dargestellt werden. Die entsprechenden dimensionslosen Grössen lauten

$$(12.25) \quad F = \frac{P_F \psi^2}{2 RB \eta \omega}$$

$$(12.26) \quad \Delta F = \frac{\Delta P_F \psi^2}{2 RB \eta \omega}.$$

Entsprechend der Vorzeichenfestlegung für  $\tau_W$  und  $P_F$  in Bild 12.1 wird  $F$  im allgemeinen negativ sein.

### 13. Öldurchsatz eines Segmentes

Wir betrachten das in Bild 13.1 abgewickelt dargestellte Segment. Die angeschriebenen Ölströme  $Q_R$ ,  $Q_E$  und  $Q_A$  sind pro Zeiteinheit fliessende Volumina.

Zunächst sei angenommen, dass im ganzen Segment innerer Überdruck herrsche, das heisst wir betrachten Fall a (vgl. Bild 5.1). Das an beiden seitlichen Rändern austretende Öl beträgt gemäss dem bekannten Gesetz für die laminare Strömung in einem Parallelschlitz von der Weite  $h$  <sup>5)</sup>

$$(13.1) \quad Q_R = - 2 \int_{\varphi_E}^{\varphi_A} \frac{h^3}{12 \eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z = \frac{B}{2}} R d\varphi$$

Der Druckgradient am Rand ergibt sich aus Gleichung (4.1) zu

$$(13.2) \quad \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z = \frac{B}{2}} = - \frac{2 m \hat{p}}{B}$$

so dass

$$(13.3) \quad Q_R = \frac{m}{3 \eta B} \int_{\varphi_E}^{\varphi_A} \hat{p} h^3 R d\varphi$$

<sup>5)</sup> durch Integration der sinnigermäss angepassten Gl. (3.2) leicht herzuleiten.

folgt. Eine elementare Umrechnung führt auf die dimensionslose Darstellung

$$(13.4) \quad \frac{Q_R}{R^3 \omega \psi} = \frac{m}{6\beta} \int_{\varphi_E}^{\varphi_A} \hat{\Pi} \chi^3 d\varphi$$

wobei  $\beta$  die durch Gleichung (3.11) definierte relative Lagerbreite bedeutet.

Wenn wir allgemein

$$(13.5) \quad \frac{Q}{R^3 \omega \psi} \equiv K$$

definieren und ausserdem Gleichung (7.2) berücksichtigen, so lautet Gleichung (13.4)

$$(13.6) \quad K_R = \frac{m}{6\beta} \int_{\varphi_E}^{\varphi_A} u \chi^{\frac{3}{2}} d\varphi$$

Für das eintretende Öl  $Q_E$  ergibt sich durch Integration von Gleichung (3.2) über die Spalthöhe  $h_E$

$$(13.7) \quad dQ_E = \left( \frac{1}{2} R \omega h_E - \frac{h_E^3}{12 \eta R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) dz$$

Die Integration über die Lagerbreite führt auf

$$Q_E = \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \left[ \frac{1}{2} R \omega h_E - \frac{h_E^3}{12 \eta R} \left( \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_E \right] dz$$

Unter Berücksichtigung der axialen Druckverteilung nach Gleichung (4.1) erhält man

$$(13.8) \quad Q_E = \frac{1}{2} R \omega h_E B - \frac{m}{(m+1)} \frac{h_E^3}{12 \eta R} \left( \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_E B$$

und in dimensionsloser Darstellung

$$(13.9) \quad K_E = \beta \chi_E \left[ 1 - \frac{m}{6(m+1)} \chi_E^2 \left( \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \right)_E \right]$$

Für  $\hat{\Pi}$  kann wiederum nach Gleichung (7.2)  $\chi^{-\frac{3}{2}} u$  eingesetzt werden. Auf die Berechnung der Ableitung  $\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \chi^{-\frac{3}{2}} u \right)$  treten wir später ein.

In völlig analoger Weise berechnet man den Öldurchsatz am Austritt des Segmentes:

$$(13.10) \quad K_A = \beta \chi_A \left[ 1 - \frac{m}{6(m+1)} \chi_A^2 \left( \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \right)_A \right]$$

Da unser Rechnungsgang die Druckverteilung  $\hat{\Pi} = \chi^{-\frac{3}{2}} u$  über die diskret verteilten  $u$ -Werte liefert, ist eine Rechenvorschrift für die Ableitungen  $\left( \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \right)_E$  und  $\left( \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \right)_A$  zu geben.

Wir benutzen dieselben Formeln wie in den Gleichungen (10.1) und (10.2) und erhalten

$$(13.11) \quad \left( \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \right)_E = \frac{1}{12 \Delta \varphi} \left( 48 \hat{\Pi}_1 - 36 \hat{\Pi}_2 + 16 \hat{\Pi}_3 - 3 \hat{\Pi}_4 \right)$$

$$(13.12) \quad \left( \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} \right)_A = \frac{1}{12 \Delta \varphi} \left( 3 \hat{\Pi}_{n-4} - 16 \hat{\Pi}_{n-3} + 36 \hat{\Pi}_{n-2} - 48 \hat{\Pi}_{n-1} \right)$$

wobei  $\Delta \varphi$  nach Gleichung (9.1) zu berechnen ist.

Die vorstehende Betrachtung bezieht sich auf ein Segment, welches der Druckberg völlig ausfüllt. Wenn dies nicht zutrifft, das heisst wenn einer der Fälle  $b_1$ ,  $b_2$  oder  $b_3$  vorliegt, rücken die Integrationsgrenzen in der Gleichung (13.6) an die Stellen  $\varphi_E'$  und/oder  $\varphi_A'$ . In den Gleichungen (13.9) und (13.10) ist sodann bei nicht bis an den Rand reichendem Druckberg der Druckgradient Null. Für den Fall  $b_3$  lauten somit die Ölmengen-Gleichungen:

$$(13.13) \quad K_R = \frac{m}{6\beta} \int_{\varphi_E'}^{\varphi_A'} \hat{\Pi} \chi^3 d\varphi = \frac{m}{6\beta} \int_{\varphi_E'}^{\varphi_A'} u \chi^{\frac{3}{2}} d\varphi$$

$$(13.14) \quad K_E' = \beta \chi_E'$$

$$(13.15) \quad K_A' = \beta \chi_A'$$

Im Fall  $b_1$  gelten die Gleichungen (13.9) und (13.15), im Fall  $b_2$  die Gleichungen (13.14) und (13.10).

Im Fall  $c$ , in welchem für das ganze Segment  $\hat{\Pi} = 0$  gesetzt wird, ist der seitliche Ausfluss Null, das heisst

$$(13.16) \quad K_R = 0$$

Im Einströmquerschnitt kann ein Einströmen ohne Druckgefälle angenommen werden; folglich gilt

$$(13.17) \quad K_E = \beta \chi_E$$

Über den Ölstrom am Segmentaustritt (Stelle  $\varphi_A$ ) lässt sich nichts Sicheres aussagen, da der Ölfilm im Innern des Schmierspalt als strähnig zerteilt anzunehmen ist und dieser somit nicht mit Sicherheit als ausgefüllt betrachtet werden kann.

In den Fällen, in welchen der Segment-Schmierspalt oder bestimmte Teile davon mit Öl ausgefüllt sind, lässt sich eine Volumenbilanz aufstellen. Dazu benötigt man ausser den Durchsatzzahlen  $K_R$ ,  $K_E$  und  $K_A$  die dimensionslose Änderung des Schmierspaltvolumens pro Zeiteinheit.

Die Änderung  $Q_S$  des Spaltvolumens beträgt — wir betrachten zunächst wieder Fall  $a$  —

$$(13.18) \quad Q_S = \int_{\varphi_E}^{\varphi_A} B \frac{\partial h}{\partial t} R d\varphi$$

Rein formal kann diese Grösse in gleicher Weise wie ein volumetrischer Öldurchsatz dimensionslos gemacht werden. Wir führen

$$(13.19) \quad K_S \equiv \frac{Q_S}{R^3 \omega \psi}$$

ein und erhalten

$$(13.20) \quad K_S = 2\beta \int_{\varphi_E}^{\varphi_A} \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} d\varphi$$

wobei die dimensionslose Zeit  $\vartheta$  durch Gleichung (3.10) definiert und  $\frac{\partial \chi}{\partial \vartheta}$  nach Gleichung (6.6) zu berechnen ist.

In den Fällen  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  ergibt sich ein zu Gleichung (13.20) analoger Ausdruck, nur sind für die Integrationsgrenzen die Grenzen des positiven Druckbereiches einzusetzen.

Die Volumenbilanz lautet für den Schmierspaltteil, der den Druckberg enthält,

$$(13.21) \quad K_E = K_R + K_A + K_S$$

Alle Glieder dieser Gleichung wurden einzeln direkt berechnet. Da jedoch die Druckdifferentialgleichung nicht streng gelöst ist, wird die Gleichung (13.21) nicht exakt stimmen.

Unter den Grössen  $K_E$ ,  $K_R$  und  $K_A$  interessiert im Hinblick auf die Berechnung ganzer zusammengesetzter Lager vor allem die Grösse  $K_R$ . Wir können nun die Volumenbilanz dazu benutzen, um  $K_R$  auf einem zweiten, indirekten Weg über  $K_E$ ,  $K_A$  und  $K_S$  zu bestimmen



$$(13.22) \quad K'_R = K_E - K_A - K_S$$

und den Mittelwert  $\bar{K}_R$  aus dem nach Gleichung (13.13) direkt und dem nach Gleichung (13.22) indirekt berechneten Wert zu bilden, wodurch ein verbessertes Ergebnis zu erwarten ist:

$$(13.23) \quad \bar{K}_R = \frac{1}{2} (K_R + K_E - K_A - K_S)$$

Alle in diesem Abschnitt berechneten Öldurchsätze sind – sofern man nicht einen stationären Spezialfall vor sich hat – Momentanwerte. In der Praxis interessiert meist der zeitliche Mittelwert über bestimmte Zeitintervalle; bei periodisch variierendem Betriebszustand ergibt sich der Durchschnittsdurchsatz durch Mittelbildung über das Periodenintervall.

#### 14. Resultierende Kraft, Reibung und Öldurchsatz des mehrsegmentigen Lagers

Wir betrachten ein mehrsegmentiges Radiallager gemäss Bild 14.1. Alle Grössen der einzelnen Segmente sind mit den Indizes I, II, III ... gekennzeichnet.

Für jedes Segment sind nach Gleichung (12.14) oder gegebenenfalls (12.15) die Komponenten der resultierenden (dimensionslosen) Kraft zu berechnen und zu summieren

$$(14.1) \quad V_{res} = \sum_{i=I, \dots} V_i$$

$$(14.2) \quad H_{res} = \sum_{i=I, \dots} H_i$$

Die Resultierende ist gleich der resultierenden, momentanen Sommerfeldzahl des Lagers

$$(14.3) \quad S_{Ores} = \sqrt{V_{res}^2 + H_{res}^2}$$

Die Richtung  $\sigma_{res}$  der resultierenden Kraft ist gegeben durch

$$(14.4) \quad \sigma_{res} = \arctan \frac{V_{res}}{H_{res}}$$

Die Sommerfeldzahl ist durch Gleichung (12.10) definiert; die Bedeutung des Winkels  $\sigma$  ist aus Bild 12.2 ersichtlich.

Mit vorstehenden Gleichungen ist das in der Einleitung (Abschnitt 1) als «erste Hauptaufgabe» bezeichnete Problem gelöst.

Die gesamte Reibungskraft ist die Summe der Reibungskräfte der einzelnen Segmente. Folglich gilt auch

$$(14.5) \quad F_{res} = \sum_{i=I, \dots} F_i$$

wobei die Bedeutung von  $F$  aus Gleichung (12.25) hervorgeht. Die Reibungszahl des gesamten Lagers beträgt

$$(14.6) \quad \mu_{res} = \frac{P_{Fres}}{P_{res}} = \frac{F_{res}}{S_{Ores}}$$

und die auf  $\psi$  bezogene Reibungszahl berechnet sich zu

$$(14.7) \quad \frac{\mu_{res}}{\psi} = \frac{\sum_{i=I, \dots} \left( \frac{F_i}{\psi} \right)}{S_{Ores}}$$

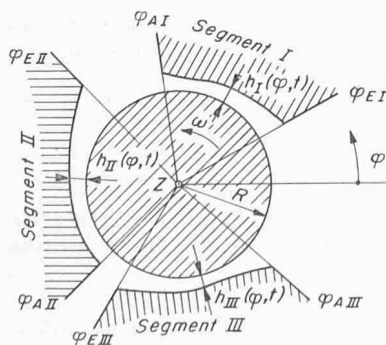


Bild 14.1. Mehrsegmentiges Lager

Der gesamte volumetrische Öldurchsatz ist die Summe des am Seitenrand aller Segmente austretenden Öls. Für die Gesamtdurchsatz-Zahl gilt folglich

$$(14.8) \quad K_{tot} = \sum_{i=I, \dots} \bar{K}_{Ri}$$

wobei die  $K_R$  der einzelnen Segmente nach Gleichung (13.23) zu rechnen sind und die Bedeutung von  $K$  aus Gleichung (13.5) hervorgeht<sup>6)</sup>.

Aus Reibungsarbeit und Öldurchsatz lässt sich bei bekannter spezifischer Wärme des Öls dessen Temperaturerhöhung im Lager berechnen, wobei das Lager als adiabat vorausgesetzt werden kann. Alle vorstehend berechneten Werte sind Momentanwerte und es gilt auch hier die am Schluss von Abschnitt 13 gemachte Bemerkung.

#### 15. Anwendungsbeispiele und Vergleich mit Berechnungsverfahren anderer Autoren

Vor allem stellt sich hier die Frage, wie die Ergebnisse des vorliegenden Berechnungsverfahrens zu den Ergebnissen anderer Autoren liegen. Insbesondere ist ein Vergleich mit dem Rechnungsgang von G. Schaffrath [15] wichtig, da dort wesentlich andere Randbedingungen verwendet werden. Diese Gegenüberstellung und einige Berechnungsbeispiele werden demnächst hier veröffentlicht [17].

#### 16. Bahn des Wellenzentrums bei vorgegebenem Verlauf der resultierenden Kraft

Es handelt sich hier um das in der Einleitung als zweite Hauptaufgabe bezeichnete Problem, bei dem aus einer gegebenen zeitlich veränderlichen Kraft die Bewegung des Wellenmittelpunktes zu ermitteln ist.

Die Aufgabe kann entweder so gestellt sein, dass bei irgend einer Anfangs-Wellenlage eine in ihrem zeitlichen Verlauf gegebene Kraft einsetzt und die zugehörige Wellen-Bahn zu ermitteln ist (Anfangswertproblem), oder dass ein zeitlich periodischer Kraftverlauf gegeben ist und die zugehörige periodische Bewegung der Welle gesucht wird (periodisches Problem). Da eine direkte Lösung des periodischen Problems nicht möglich erscheint, führt man es auf das Anfangswertproblem zurück. Man rechnet mit einer zweckmässigen Anfangslage der Welle die ganze Kraft-Periode durch und vergleicht die Endlage mit der Anfangslage; wenn die beiden übereinstimmen, ist die gesuchte periodische Wellenbewegung gefunden. Im allgemeinen wird man die Anfangslage mehrfach korrigieren und den Zyklus durchrechnen müssen, bis sich die gesuchte periodische Lösung einstellt. Man kann auch den Kraftzyklus (ohne die erwähnte Anfangslagen-Korrektur) so lange wiederholend durchrechnen, bis die Bewegungsbahn periodisch wird. Diese Methode ist jedoch weniger rasch, als wenn die Anfangslage immer wieder korrigiert wird. Eine auf der vorliegenden Abhandlung beruhende Berechnung der Wellenbewegung aus einer gegebenen Kraft ist bereits durchgeführt und soll demnächst veröffentlicht werden.

### Anhang

#### 17. Segmente mit Staurändern

Nachstehend wird die näherungsweise Ausdehnung der vorliegenden Theorie auf Lager mit Randleisten behandelt. Es werden heute zahlreiche Gleitlager verwendet, deren Lauffläche am Einlauf der Segmente Taschen aufweisen (Bild 2.2). Der Schmierpalt ist deshalb in Richtung der Wellenachse nicht konstant, wie dies in der vorliegenden Arbeit vorausgesetzt ist. Die zu beiden Seiten der eingearbeiteten Taschen vorstehenden Randleisten behindern den seitlichen Abfluss und führen zu einem «volleren» Druckberg; die axiale Druckverteilung nähert sich also derjenigen des «unendlich breiten», das heisst seitlich abgesperrten Lagers. Damit erreicht man bei gegebener Lagerbreite eine höhere Tragfähigkeit. Die axiale Breite der Randleisten beträgt normalerweise nur wenige Prozent der Lagerbreite. Es wird nachstehend ein Näherungsverfahren angegeben, nach welchem ein Randleisten-Segment auf ein gleichwertiges Segment mit axial konstantem Spalt umgerechnet werden kann.

Wie erwähnt, führen Randleisten zu volleren axialen Druckprofilen. Dies kann in unserer Theorie durch Einführen eines höheren

<sup>6)</sup> Dies gilt unter der Voraussetzung, dass der Austritt des Schmierpaltens in eine Ölzufuhrnute mündet. Wenn das nicht zutrifft (freier Abfluss), beträgt  $K_{tot} = \sum_{i=I, \dots} K_{Ei}$ .

Parabelexponenten  $m$  berücksichtigt werden. Nach Abschnitt 4 ist  $m$  vom Verhältnis  $\lambda$  abhängig (Gl. 4.6). Es muss somit bei Randleisten-Segmenten für die Berechnung von  $m$  eine fiktive Lagerbreite benützt werden, die grösser ist als die tatsächliche.

Wir betrachten das seitliche Ausströmen unter der Randleiste eindimensional, das heisst wir vernachlässigen alle Änderungen in Umfangsrichtung.

Ersetzt man nach Bild 17.1 die Randleistenbreite  $B_R$  durch einen fiktiven Spaltabschnitt von der Breite  $(B_R + \Delta B)$  und der Spalthöhe  $h$  so, dass bei gegebener Druckdifferenz  $\Delta p$  axial der gleiche Durchfluss  $q_z$  auftritt, so erhält man als Bedingung

$$(17.1) \quad q_z = \frac{h_R^3}{12 \eta} \frac{\Delta p}{B_R} = \frac{h^3}{12 \eta} \frac{\Delta p}{B_R + \Delta B}$$

wobei  $q_z$  der volumetrische Durchsatz pro Umfangs-Längeneinheit des Spaltes bedeutet.

Daraus folgt für die fiktive Segmentverbreiterung  $\Delta B$

$$(17.2) \quad \Delta B = \left[ \left( \frac{h}{h_R} \right)^3 - 1 \right] B_R$$

Für ein Taschensegment gemäss Bild 17.2 folgt als mittlere fiktive Lagerverbreiterung  $\Delta \bar{B}$

$$(17.3) \quad \Delta \bar{B} = \frac{B_R}{\Phi} \int_{\varphi_E}^{\varphi_R} \left[ \left( \frac{h}{h_R} \right)^3 - 1 \right] d\varphi$$

Das zur Berechnung von  $m$  nach Gleichung (4.5) massgebende Breitenverhältnis  $\lambda_{fikt}$  beträgt folglich

$$(17.4) \quad \lambda_{fikt} = \frac{B_{fikt}}{R\Phi} = \frac{B + 2\Delta \bar{B}}{R\Phi}$$

und das Breitenverhältnis  $\beta_{fikt}$  hat den Wert

$$(17.5) \quad \beta_{fikt} = \frac{B_{fikt}}{2R}$$

Die Grössen  $\Delta \bar{B}$  und damit auch  $m$  sind nur von der Geometrie des Schmierpaltes abhängig; jede Änderung der Wellenlage führt zu einer Veränderung von  $\Delta \bar{B}$ .

Die Berechnung von Randleisten-Segmenten hat beim vorliegenden Näherungsverfahren in nachstehender Weise zu geschehen:

Für die dimensionslose Druckverteilung und die Berechnung der dimensionslosen resultierenden Wellenkraft (Sommerfeldzahl) werden  $m$  und  $\beta$  gemäss Gleichung (17.4) und (17.5) gerechnet und das Lager im übrigen behandelt, wie wenn es von der Breite  $B_{fikt}$  und randleistenlos wäre, das heisst man rechnet bis an den Rand mit der Spaltform in der Mitte.

Für die Reibungsberechnung hingegen ist mit der effektiven Spalthöhenverteilung zu rechnen. Man kann von Gleichung (12.24) ausgehen und die auftretenden Integrale gemäss der tatsächlichen Spaltform ausrechnen. Das Problem wird etwas einfacher, wenn man von der Reibung für axial konstanten Spalt ausgeht und eine Korrektur

für die grössere Reibung unter den Seitenrändern anbringt. Da die Ränder schmal sind, kann man den axialen Druckverlauf über den Rand näherungsweise durch die Randtangente der Druckparabel ersetzen (Bild 17.3).

Die Randneigung der Parabel  $p(z)$  beträgt nach Gleichung (13.2)

$$(17.5) \quad \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_R = - \frac{2 m \hat{p}}{B}$$

und der mittlere Druck über der Randleiste

$$(17.6) \quad \bar{p}_R = m \hat{p} \frac{B_R}{B}$$

Wir setzen im folgenden voraus, dass die Druckentwicklung am Anfang des Segmentes, das heisst bei  $\varphi_E$  einsetzt. An der Gleichung (12.24) ist somit für beide Ränder zusammen die additive Reibungskraft-Korrektur

$$(17.7) \quad \delta P_F = - \int_{\varphi_E}^{\varphi_R} \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_R}{\partial \varphi} \chi_R \psi + \frac{\eta \omega}{\chi_R \psi} \right) - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_R}{\partial \varphi} \chi \psi + \frac{\eta \omega}{\chi \psi} \right) \right] 2 B_R R d\varphi$$

anzubringen. Diese Korrekturgrösse kann entsprechend Gleichung (12.25) dimensionslos dargestellt werden, und man erhält

$$(17.8) \quad \delta F = - \psi \beta_R \left\{ \int_{\varphi_E}^{\varphi_R} \left( \frac{1}{\chi_R} - \frac{1}{\chi} \right) d\varphi - \frac{m \beta_R}{2} \int_{\varphi_E}^{\varphi_R} u \chi - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\chi_R - \chi) d\varphi \right\}$$

wobei als relative Randbreite  $\beta_R \equiv \frac{B_R}{B}$  definiert ist.

Schliesslich ist noch anzugeben, wie der Öldurchsatz von Randleisten-Segmenten zu rechnen ist. Hier können die Beziehungen für  $K_R$  und  $K_A$  aus Abschnitt 13 unverändert übernommen werden, wobei die Seitenausflusszahl  $K_R$  mit der wirklichen Spalthöhe am Rand zu rechnen ist. Bei der Einströmzahl  $K_E$  bzw.  $K'_E$  ist eine Anpassung vorzunehmen, da der Einströmquerschnitt durch die Randleisten vermindert wird. Wir berechnen die Durchflussänderung wie bei der Reibung durch ein additives Korrekturglied  $\delta K_E$ , das mit den gleichen vereinfachenden Voraussetzungen berechnet wird wie die Reibungskorrektur.

Die Durchflusskorrektur beträgt (vgl. Gleichung (13.7) für beide Ränder

$$(17.11) \quad \delta Q_E = \left[ R \omega h_{ER} - \frac{h_{ER}^3}{6 \eta R} \left( \frac{\partial \bar{p}_R}{\partial \varphi} \right)_E \right] B_R - \left[ R \omega h_E - \frac{h_E^3}{6 \eta R} \left( \frac{\partial \bar{p}_R}{\partial \varphi} \right)_E \right] B_R$$

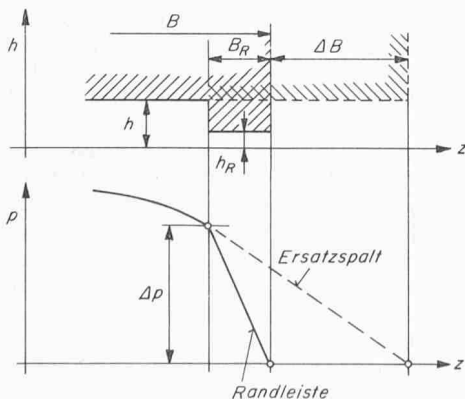


Bild 17.1. Geometrie und Druckverteilung eines Segmentes mit Staurand

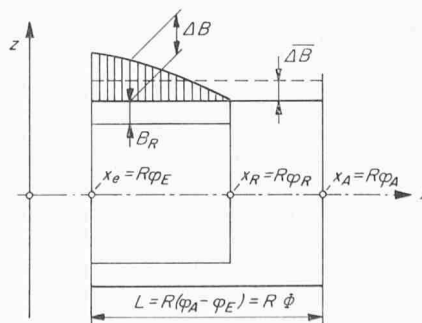


Bild 17.2. Zur Definition der fiktiven Segmentverbreiterung

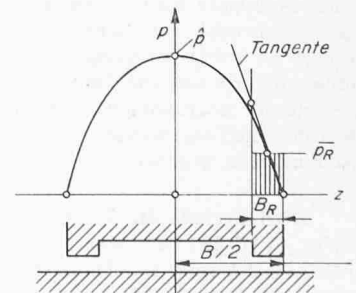


Bild 17.3. Näherungsberechnung der Druckverteilung in der Staurand-Zone

Wir setzen  $\bar{p}_R$  aus Gleichung (17.6) ein und gehen auf dimensionslose Grössen über:

$$(17.12) \quad \delta K_E = \beta_R \beta \left[ \frac{m}{3} \beta_R \left( \chi_E^3 - \chi_{ER}^3 \right) \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right)_E - 2 \left( \chi_E - \chi_{ER} \right) \right]$$

Die Neigung der Drucktangente ist nach Gleichung (13.11) zu berechnen.

Die Korrekturgrösse  $\delta K_E$  ist zu  $K_E$  aus Gleichung (13.9) zu addieren. Die Gleichung (17.12) ist sinngemäss anzupassen, wenn die Druckzone im Segmentinnern mit verschwindender Druckneigung beginnt. In vielen Fällen sind die Korrekturen  $\delta K_E$  und vor allem deren erstes Glied vernachlässigbar klein.

Adresse des Verfassers: Prof. Dr. H. H. Ott, Institut für Grundlagen der Maschinenkonstruktion der ETH, Leonhardstrasse 33, 8006 Zürich.

#### Literaturverzeichnis

- [1] Reynolds, O.: On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. B. Towers Experiments. Trans. Roy. Soc., London. Bd. 177, 1886.
- [2] Fränkel, A.: Berechnung von zylindrischen Gleitlagern. Diss. ETH Zürich, Gebr. Leemann & Co., 1944.
- [3] Ott, H.H.: Zylindrische Gleitlager bei instationärer Belastung. Diss. ETH Zürich, Gebr. Leemann & Co., 1948.
- [4] Hahn, H.W.: Das zylindrische Gleitlager endlicher Breite unter zeitlich veränderlicher Belastung. Diss. TH Karlsruhe, 1957.
- [5] Radermacher, K.: Das instationär belastete zylindrische Gleitlager. Diss. TH Karlsruhe, 1962.

- [6] Holland, J.: Beitrag zur Erfassung der Schmierverhältnisse in Verbrennungskraftmaschinen. VDI-Forsch.-Heft 475, 1959.
- [7] Someya, T.: Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden unwuchtfreien Welle. Diss. TH Karlsruhe, 1962.
- [8] Shawki, G.S.A. and Freeman, P.: Journal Bearing Performance under Sinusoidally Alternating and Fluctuating Loads. Proc. Inst. Mech. Engrs. 169, 1955.
- [9] Carl, Th. E.: Das zylindrische Gleitlager unter konstanter und sinusförmiger Belastung. Diss. TH Karlsruhe, 1962.
- [10] Eberhard, A. und Lang, O.: Zur Berechnung der Gleitlager im Verbrennungsmotor mittels elektronischer Digitalrechner. «MTZ» 22 (1961), H. 7.
- [11] Sassenfeld, H. und Walther, A.: Gleitlagerberechnungen. VDI-Forsch.-Heft 441, 1954.
- [12] Frössel, W.: Reibungswiderstand und Tragkraft eines Gleitschuhes. «Forschung» Bd. 13 (1942), H. 2, S. 65-75.
- [13] Stiefel, E.: Einführung in die numerische Mathematik. Stuttgart 1963, B.G. Teubner.
- [14] Glienicke, J.: Feder- und Dämpfungskonstanten von Gleitlagern für Turbomaschinen und deren Einfluss auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Rotors. Diss. TH Karlsruhe, 1966.
- [15] Schaffrath, G.: Das Gleitlager mit beliebiger Schmierspaltform. Verlagerung bei zeitlich veränderlicher Belastung. Diss. TH Karlsruhe, 1967.
- [16] Ott, H.H., Buchter, J.-E. und Frey, U.: Wellenlage, Reibung und Öldurchsatz von Radial-Gleitlagern mit zwei zusammengeschobenen Kreisschalen (Zitronenspiellager). «Schweiz. Bauzeitung» 87 (1969), H. 12, S. 207-212.
- [17] Ott, H.H. und Varga, Z.: Anwendungsbeispiele zur Berechnung segmentierter Radialgleitlager endlicher Breite bei instationärem Betrieb. Demnächst in «Schweiz. Bauzeitung».

## Buchbesprechungen

**Baubeschriebtexte für den Hoch- und Tiefbau.** Baubeschreib-Lehr- und Textbuch für Architekten, Ingenieure, Bauunternehmer usw. mit Anwendungsbeispielen und Tabellen. Von H. Banz. 478 S. Teufen 1969, Verlag Arthur Niggli AG. Preis 65 Fr.

Es ist ein alter Wunsch, für das Erstellen von Leistungsverzeichnissen Vorlagen konsultieren zu können, die mithelfen, Formulierungsschwierigkeiten zu bewältigen und Vollständigkeit sicherzustellen. In diesem Sinn sind schon früher Positionensammlungen herausgegeben worden, die sich jedoch alle nicht durchsetzen vermochten. Das Werk von Hans Banz lehnt sich durchaus an diese herkömmlichen Positionsverzeichnisse an. Die einleitenden Bedingungen und Messvorschriften, teilweise in Anlehnung an die SIA-Normen, dienen eher der Verunklärung; besser wäre eine kompromisslose Übernahme dieser Normen gewesen. Eine ausdrückliche Bezugnahme auf SIA-Bedingungen und -Messvorschriften fehlt überhaupt. Es ist schwer verständlich, wie solch grundlegende und allgemein anerkannte Verständigungsmittel einfach übergangen werden können.

Das selbe wäre in bezug auf Positionssammlungen an sich zu sagen. Noch vor vier Jahren hätte man ein Werk wie dieses begrüsst. Nachdem aber heute ein schweizerischer Normpositionen-Katalog besteht, der sowohl auf den SIA-Normen aufbaut als auch mit den Unternehmerverbänden zum Erreichen einer optimalen Kalkulation abgesprochen ist, werden unkoordinierte Arbeiten – ungeachtet ihrer Qualitäten – fragwürdig. Nicht zuletzt ist daran zu erinnern, dass die moderne Datenverarbeitung, die wir auf die Dauer nicht entbehren können, nur auf gesamthaft anerkannten und allgemein verbreiteten Systemen wirtschaftlich angewendet werden kann. Auch diese Voraussetzung ist hier nicht gegeben.

Heinz Joss, CRB, Zürich

**Digitaltechnik II.** Schaltelemente. Von W. Seifert. Aus der Reihe «VDI-Taschenbücher, T 4». 74 S. mit 93 Abb. Düsseldorf 1969, VDI-Verlag m.b.H., Verlag des Vereins Deutscher Ingenieure. Preis kart. DM 10.80.

Das Thema des Taschenbuches «Digitaltechnik I» war die Synthese von digitalen Netzwerken auf Grund von Schaltelementen. Im Band «Digitaltechnik II» werden diese Elemente genauer untersucht – es handelt sich im wesentlichen um logische Ver-

knüpfungselemente (UND- und ODER-Tore, und Inverter) und Kippstufen (binäre Speicherelemente und Impulsformer). Die Bauelemente sind Halbleiterdioden und Transistoren, deren wesentliche Eigenschaften kurz angeführt werden. Darauf folgt eine übersichtliche und vergleichende Beschreibung der wichtigen Techniken, mittels welcher die Dioden und Transistoren zu Schaltelementen verknüpft werden: DTL (Dioden-Transistor-Logik), DCTL (Direkt gekoppelte Transistor-Logik), TTL (Transistor-Transistor-Logik) und andere mehr. Auch magnetische Elemente werden angeführt als Bausteine für logische Netzwerke, doch liegt berechtigterweise die Betonung in ihrer Anwendung als Speicherelemente. Ringkerne, Dünnschichtelemente und Biax-Speicherelemente werden behandelt. Die verschiedenen Anordnungstechniken von Magnetkernen (Zwei- und Mehrdrahttechnik) in Grossspeichern werden erläutert und verglichen.

Ein eigenes, gemessen an ihrer heutigen Bedeutung in der Technik etwas umfangreich ausgefallenes Kapitel ist den pneumatischen Schaltelementen gewidmet. Es wird dabei klar unterschieden zwischen «statischen» Elementen, welche mechanisch bewegliche Teile enthalten wie Schieber, Kugeln oder Membranen, und «dynamischen» Elementen, welche auf physikalischen Eigenschaften und Effekten von Fluidstrahlen beruhen.

Das Taschenbuch bildet eine willkommene und notwendige Ergänzung zu «Digitaltechnik I». Die beiden Bände eignen sich bestens als Grundlage eines einführenden Kurses in die (elektronische) Digitaltechnik.

Prof. N. Wirth, ETH Zürich

**Die Montagebauarten des Wohnungsbaues in Beton.** Von K. Berndt. 284 S. mit rund 600 Photos. Grundrissen und Detailzeichnungen. Wiesbaden 1969, Bauverlag G.m.b.H. Preis 62 DM.

Der Verfasser legt eine umfangreiche und nahezu vollständige Dokumentation der auf dem mitteleuropäischen Markt für den Wohnungsbau angebotenen Montagebauarten in Beton vor. Die einzelnen Verfahren werden durch Knotendetails, Grundrisse gebauter Beispiele, Isometrien und teilweise auch durch den Nachweis der Einbindung der sanitären Installation vorgestellt. Eine Beschreibung der Bauarten ergänzt die Dokumentation.

Die vom Verfasser gewählte alphabetische Katalogisierung der Bauarten nach dem Namen der Hersteller bzw. Lizenzgeber