

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 87 (1969)
Heft: 6

Artikel: Der Computer formt die statischen Methoden
Autor: Wolf, John P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-70591>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Studientagung über aktuelle Ingenieurprobleme vom 18. und 19. Oktober 1968 in Zürich

Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Fachgruppe der Ingenieure für Brückenbau und Hochbau (FGBH)

Heute und in den nächsten Heften veröffentlichen wir die an der Studientagung gehaltenen Vorträge. Alle Aufsätze werden in einem Sonderheft zusammengefasst.

Der Computer formt die statischen Methoden

DK 624.04:681.142

Von John P. Wolf, dipl. Ing. ETH, Zürich

Als anfangs der fünfziger Jahre die ersten statischen Berechnungen mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen bewältigt wurden, kamen die von der Handrechnung her bekannten Verfahren zur Anwendung, wie zum Beispiel die Methode Cross, die Festpunkt-methode und, falls die (kleine) Anzahl von überzähligen Grössen einfach erfasst werden konnte, auch die Kraftmethode. Gewisse dieser Verfahren vermischen sehr stark das Aufstellen der grundlegenden Gleichungen, die das physikalische Verhalten beschreiben, mit deren meistens iterativen Lösung, um das Lösen eines grösseren Gleichungssystems von Hand zu vermeiden. Der Computer ist aber sehr gut in der Lage, grosse Gleichungssysteme direkt zu lösen. Andere Handmethoden stellen direkt «anschauliche» Zwischenresultate auf (zum Beispiel die Schnittkraftverteilungen infolge der überzähligen Grössen = 1); diese in einem allgemeinen Computerprogramm direkt zu erfassen, kann aufwendig sein. Es ist günstiger, die verschiedenen Zwischenresultate im Computer, ausgehend von den gleichen grundlegenden Beziehungen selbst zu berechnen (zum Beispiel ergeben sich die oben erwähnten Schnittkraftverteilungen als Resultat einfacher Matrizenoperationen mit der sogenannten Gleichgewichtsmatrix).

Mit der Zeit kam es deshalb zur Entwicklung von den Möglichkeiten der elektronischen Maschine besser angepassten Methoden, das heisst einer eigentlichen computerorientierten Stabstatik. Die physikalischen Beziehungen werden — unabhängig davon, wie diese im Lösungsprozess verwendet werden — allgemein formuliert: erstens die Gleichgewichtsbedingungen in Kräften und zweitens die Kraft-Deformationsgleichungen (wobei diese durch Elimination der Verzerrungen aus den Kraft-Verzerrungs- und den Verzerrungs-Deformationsbeziehungen hervorgegangen sind), völlig analog zur allgemeinen Elastizitätstheorie.

Die eigentliche Lösung erfolgt nach mathematischen Gesichtspunkten, ausgehend von den grundlegenden Beziehungen, wobei die Matrizenrechnung mit Vorteil herangezogen wird. Drückt man in der ersten Gruppe «möglichst viele» Kräfte durch die restlichen (= überzähligen Grössen) aus und führt die dadurch möglich werdende Substitution in der zweiten Gruppe durch, wo zusätzlich noch alle Deformationen eliminiert werden, wird man zu einem Gleichungssystem in den überzähligen Grössen geführt (Kraftmethode). Um zur Deformationsmethode zu gelangen, werden in der zweiten Gruppe die Kräfte durch die Deformationen ausgedrückt und in der ersten eingeführt, die dann nur noch Deformationen als Unbekannte aufweisen. In beiden Methoden können rein mathematische Verfahren zur Lösung der Gleichungen verwendet werden. Entsprechende Substitutionen in Zwischenresultaten führen dann zu den andern Unbekannten. Es ist interessant festzustellen, dass die am Schluss anfallenden Gleichungssysteme und damit auch ihre Lösungen identisch sind mit denen, die mit Handmethoden erhalten werden.

Trotzdem ist diese computerorientierte Stabstatik von grosser Bedeutung: Neben der Tatsache, dass diese Methode für eine elektronische Berechnung geeignet ist, erlaubt sie ein klares Trennen der (sauber formulierten) physikalischen Beziehungen vom eigentlichen mathematischen Lösungsprozess; sie lässt sich auch zum Beispiel auf nichtlineare Probleme der Stabstatik und auf Flächentragwerke ausdehnen.

Damit waren die Grundlagen zur Entwicklung neuer Methoden geschaffen, die das Lösen von Aufgaben ermöglichen, die bis-

her überhaupt nicht oder nur sehr approximativ rechnerisch erfasst werden konnten. Der Aufbau und jeder Teil dieser Verfahren sind von den Möglichkeiten des Computers, und damit auch der numerischen Mathematik, sehr stark beeinflusst. Sie sind verschieden von Rechenprozessen, die sich auf klassische mathematische Methoden (Fourierreihen, zum Teil auch Differenzmethoden) stützen und in denen somit der Computer nur zur Erledigung des schon längst feststehenden, früher anders, vielleicht nur approximativ bewältigten Rechenaufwandes herangezogen wird.

Im folgenden sollen zwei dieser neuen Methoden, die im soeben fertiggestellten Statikprogrammsystem STRIP (siehe Literaturhinweis) verwendet werden, an Beispielen beleuchtet werden: Die sogenannte Finite Element Methode in der Analysis von Flächentragwerken und die Optimierung der Grösse der Kraft und des Verlaufes der Kabel in einer vorgespannten Konstruktion als Beispiel eines Bemessungsproblems.

Finite Element Methode (Analyse von Flächentragwerken)

In der Analyse der in Bild 1 dargestellten Schale (Eurogas in Genf, Projektverfasser Ingenieurbüro *Heinz Hossdorf*, Basel), müsste nach herkömmlichen Methoden versucht werden, die Differentialgleichungen aufzustellen, was infolge der variablen Stärke und des komplizierten Verlaufes der Mittelfläche, auch mit Hilfe des Computers, sehr schwierig ist. Diese wären dann numerisch (zum Beispiel durch passend gewählte Reihen- oder Differenzenausdrücke) zu lösen und, um Ausdrücke für die Schnittkräfte zu erhalten, wären komplizierte Differentiationen approximativ durchzuführen. Dieser Weg scheint nicht vielversprechend zu sein.

Mit der Finite Element Methode, die wir von zwei Seiten, der mathematischen und der baustatischen, betrachten wollen, ist die Analyse heute routinemässig möglich. Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen, stellt die Differentialgleichung bereits ein Zwischenresultat dar; sie ist durch Anwendung der Variationsrechnung auf ein Energieminimalprinzip der Statik hergeleitet worden. Die in diesem Prinzip vorkommenden Ausdrücke sind einfacher als diejenigen in den Differentialgleichungen. Es empfiehlt sich deshalb, die numerischen Approximationen bereits auf der Stufe der Energieausdrücke einzuführen¹⁾, und erst dann das Minimalprinzip anzuwenden. Die numerische Approximation, bestehend je nach dem Verfahren aus Deformations- und/oder Spannungsansätzen, wird für jeden Bereich der Mittelfläche (zum Beispiel Dreiecke, Bild 1) gewählt, wobei die Energien durch die ebenfalls eingetragenen Deformationen und verallgemeinerten Knotenkräfte einfach dargestellt werden können. Dies kann nun auch baustatisch gedeutet werden. Die Schale wird in Elemente aufgeteilt, die Verformungseigenschaften jedes Elementes werden durch die Deformationen und verallgemeinerten Kräfte dargestellt (Steifigkeitsmatrix) und die so erfassten Elemente werden (wie in der Stabstatik die einzelnen Balkenelemente) in den Knoten durch Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen zur gesamten Konstruktion zusammengefügt. Die veränderliche Schalenstärke und

¹⁾ Zusätzlich ergibt sich, dass das endgültige Gleichungssystem positiv definit ausfällt, also zum Beispiel auch symmetrisch ist und die numerische Lösung, je nach Art der eingeführten Approximation entweder «zu steif» oder «zu weich» ausfällt. Solche Aussagen können in der oben beschriebenen herkömmlichen Methode nicht gemacht werden.

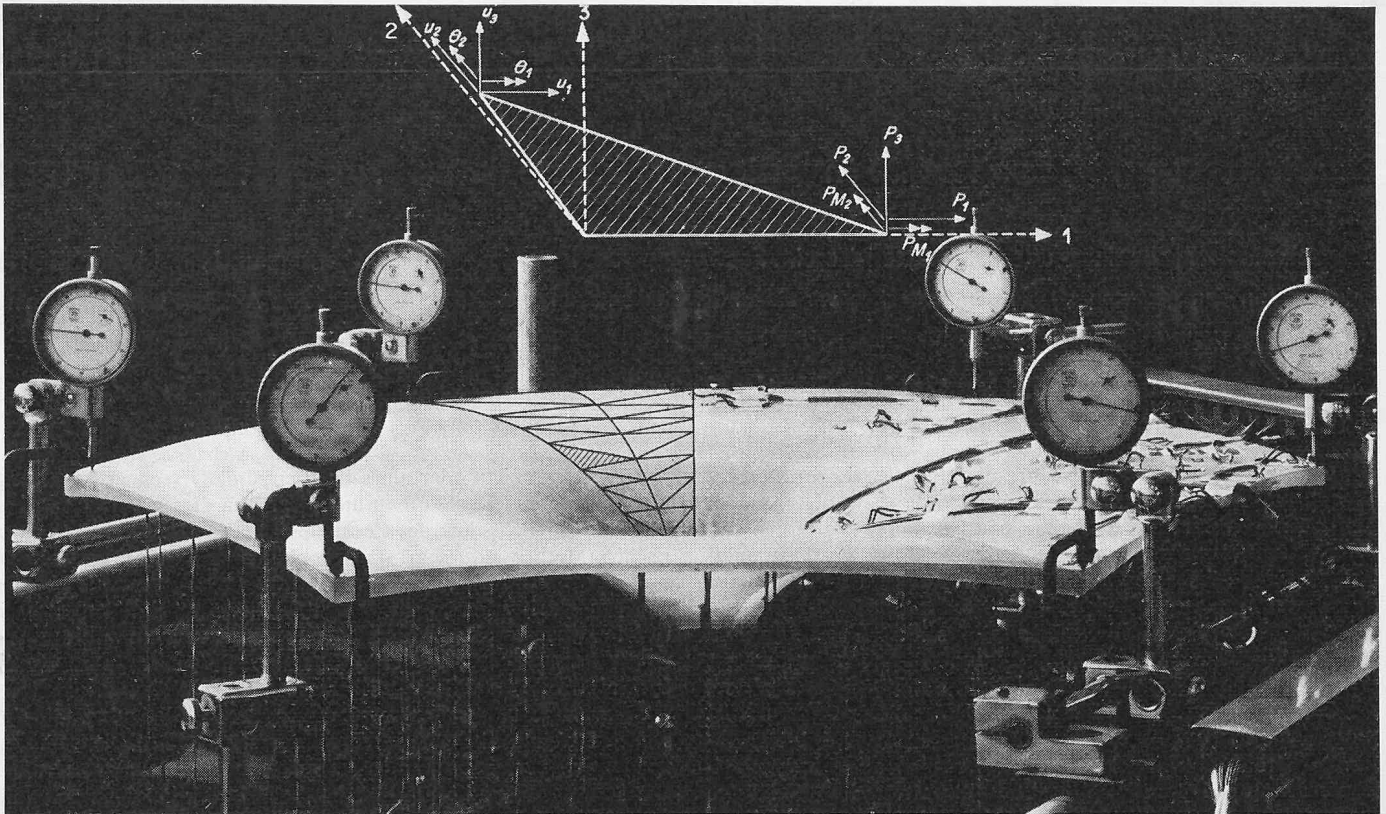


Bild 1. Eurogas-Schale mit Element-Einteilung

die komplizierte Form der Mittelfläche lassen sich einfach berücksichtigen.

Die Schale in Bild 1, belastet durch Eigengewicht und gleich-grosse vertikale Punktlasten, die in den Ecken angreifen, ist mit STRIP nach der Finite Element Methode berechnet worden. Dank der Symmetrie muss nur ein Sektor erfasst werden; die verwendete Elementeinteilung ist ebenfalls im Bild eingetragen. Als Beispiel der Resultate ist in Bild 2 der Verlauf des Biegemomentes M_2 (Momentenvektor gegen das Zentrum der Schale weisend) in jenem Schnitt, der durch die Falllinie, beginnend in einer Ecke und gegen das Innere der Schale verlaufend, bestimmt wird, dargestellt. Ebenfalls eingetragen sind die sich aus einem Modellversuch, durchgeführt im Labor Hossdorf, ergebenden Werte. Die Übereinstimmung ist gut; es ist dabei zu beachten, dass sehr grosse Elemente (Bild 1) der Berechnung zugrunde gelegt worden sind (nur eine Reihe von Knoten innerhalb der Schale), also eine grobe Approximation eingeführt worden ist. Die Rechenzeit auf einem UN/1108/Computer beträgt etwas unter einer Minute im endgültigen Gleichungssystem treten 96 Unbekannte auf (mit STRIP sind schon Finite Element Aufgaben, die auf ein Gleichungssystem mit zweitausend Unbekannten führen, mit Erfolg gelöst worden).

Als weiteres Beispiel einer Finite Element Berechnung soll die im Wasserturm Riyadh (Projektverfasser *Vattenbyggnadsbyran*, Stockholm) vorkommende Rotationsschale variabler Stärke, die aus Zylinder-, Kegel- und parabolisch gekrümmten Stücken zusammengesetzt ist, und in denen auch Versteifungsringe vor-

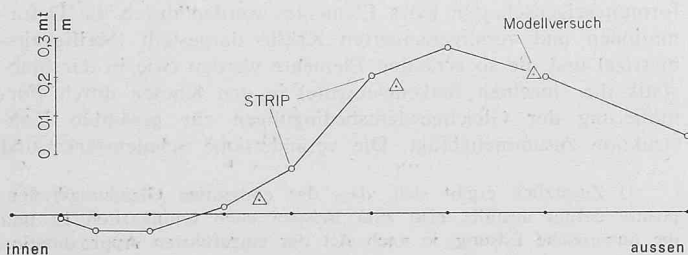


Bild 2. Vergleich der Finite Element Berechnung STRIP mit dem Modellversuch

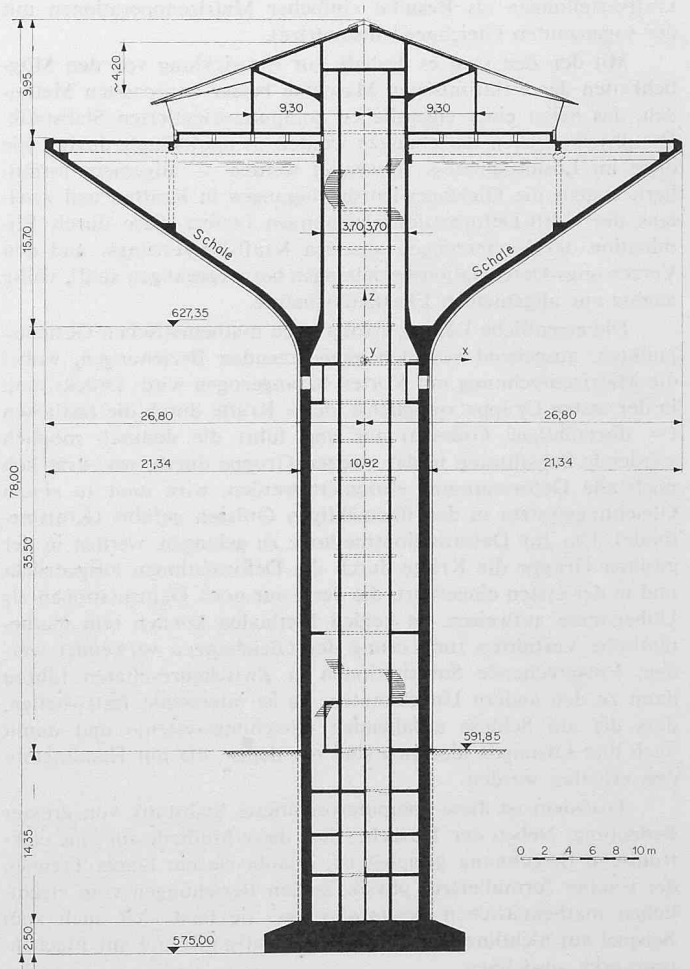


Bild 3. Wasserturmschale Riyadh, Vertikalschnitt 1:650

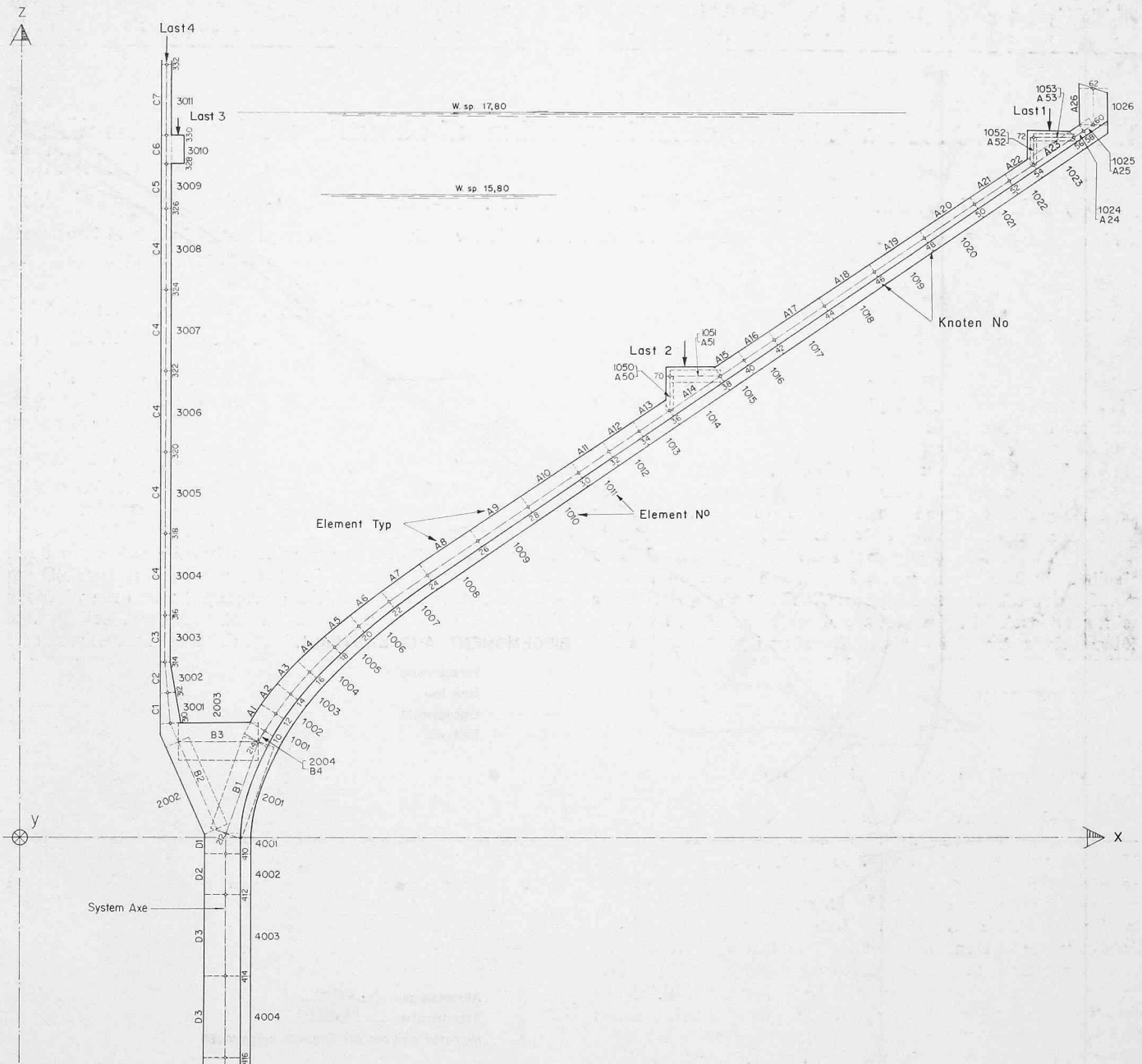


Bild 4. Elemententeilung (Schnitt 1:150)

kommen, angeführt werden (Bild 3). Infolge Symmetrie der Lasten muss keine Elementaufteilung in der Rotationsrichtung durchgeführt werden; in Richtung der Erzeugenden ist sie in Bild 4 dargestellt. Bild 5 zeigt die Resultate der Berechnung für das Biegemoment M_2 (Momentenvektor parallel zum Meridian) infolge der angegebenen Lastfälle. Ein Vergleich der Resultate im Bereiche der parabolisch gekrümmten Schale (Knotennummern 214, 10, 12 usw. bis 24) für ein angreifendes Randmoment und eine Randhorizontalkraft mit der theoretischen Lösung zeigt, dass bei der gewählten Elemententeilung die Abweichung in allen Knoten ein Prozent nicht überschreitet; wird die Anzahl der Elemente halbiert, bleibt im gesamten Bereich der Fehler unter drei Prozent. Die gesamte Rechenzeit (Kontrolle der Eingabedaten, Aufstellen der Ausgangsmatrizen, Matrizenoperationen, Lösung des Gleichungssystems, Kombinationen der Lastfälle zu Grenzwerten, die in Bild 5 der Übersichtlichkeit wegen nicht eingetragen worden sind) beläuft sich auf sechs Minuten (UN 1108).

In STRIP's Flächentragwerksprogramm können neben Schalen und Membranen auch Scheiben und Platten berechnet werden. Für die in Bild 6 dargestellte Scheibe (Projektverfasser Ingenieurbüro *Aschwanden und Speck*, vormals *M. R. Roß*, Zürich) sind

trapez- und dreieckförmige Finite Elemente verwendet worden; die Schnittkräfte längs der Symmetrieachse 1 infolge eines Einheitsinnendruckes p_1 sind in Bild 7 enthalten. Für die schiefe, punktförmig gelagerte Platte des Bildes 8 (zweigleisige Eisenbahnbrücke, Projektverfasser Ingenieurbüro *Aldorfer, Cogliatti und Schellenberg*, Zürich) sind im Stützenbereich kleinere (parallelogrammförmige) Elemente als im Feld gewählt worden; durch einen exzentrischen Anschluss der Elemente ähnlich wie in Bild 4 in der Zone des aufgelösten Versteifungsringes (Knoten 310 und 212) hätten auch die Abmessungen des Stützkörpers berücksichtigt werden können. Für den Lastfall Eigengewicht sind die Längsmomente M_x und die Durchbiegungen in zwei parallelen Schnitten angegeben. Bemerkenswert ist, wie die im Randschnitt recht verschiedenen Biegelinien der beiden Spannweiten im innern Schnitt sich kaum noch unterscheiden; auch weisen wir auf die damit zusammenhängende Lageänderung des maximalen Stützmomentes hin. Als letztes Beispiel soll eine Wildbachtalsperre betrachtet werden (Bild 9, Eidgenössisches Amt für Strassen- und Flussbau, Bern, bearbeitet durch das Ingenieurbüro *W., R. und Dr. W. Heierli*, Zürich). Sie wurde als Platte mit einer Stärke $d = 2,2$ m und als (Zylinder) Schale mit $d = 1,0$ m berechnet.

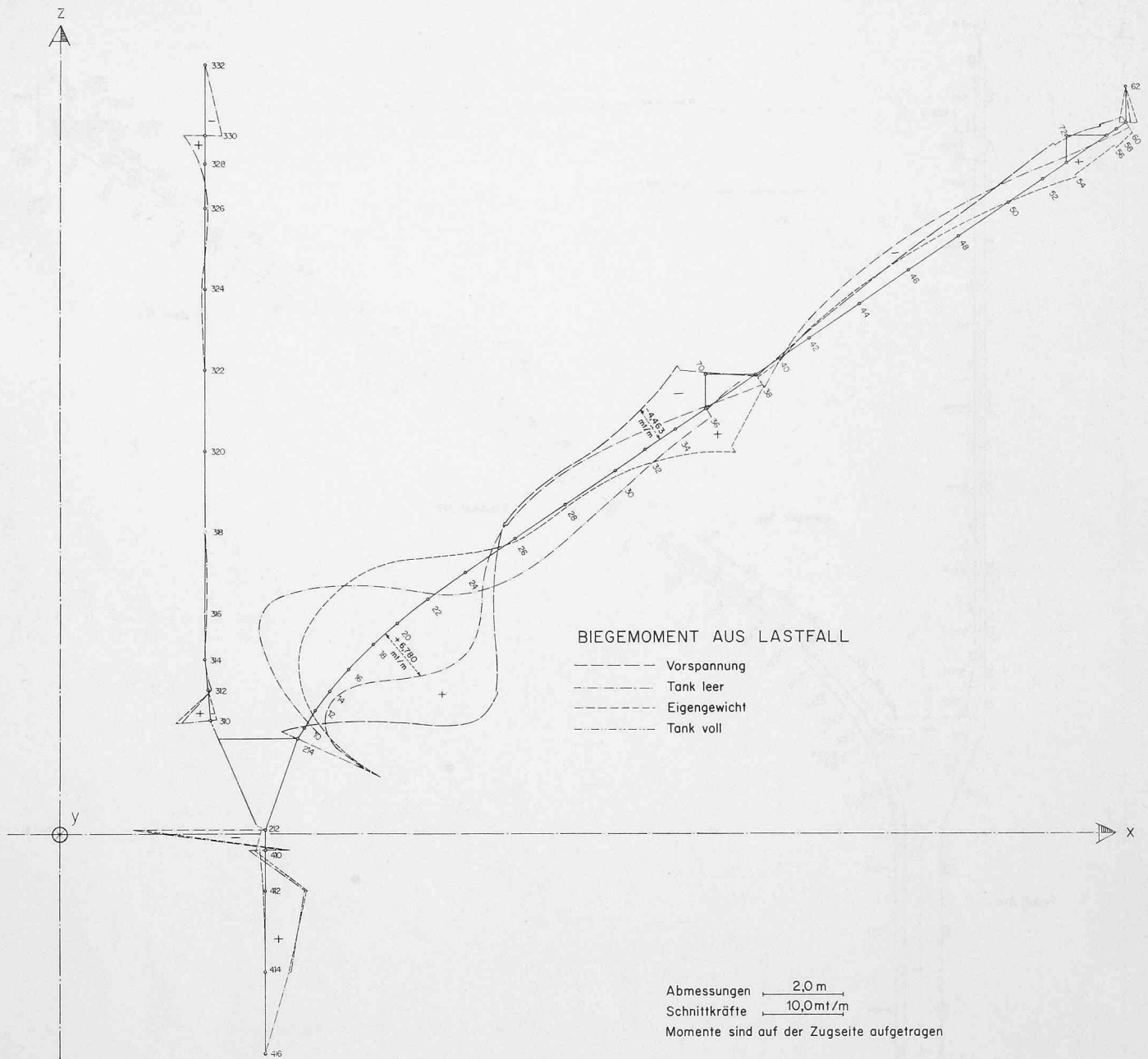


Bild 5. Verlauf des Biegemomentes M_2

Für den Lastfall Wasserdruck sind die Durchbiegungen und die Randspannungen im angegebenen Schnitt für die beiden statischen Systeme in Bild 9 miteinander verglichen worden.

Vorspannkabeldimensionierung (Optimierung der Grösse der Kraft und des Verlaufes der Kabel bei gegebenen Betonabmessungen)

Die folgende Dimensionierungsaufgabe soll gelöst werden (Bild 10): Gegeben sind die Betonabmessungen einer symmetrischen Dreifeldbrücke und damit auch die Querschnittswerte und die Belastungen (ohne Vorspannung), aus denen die Grenzwertlinien der Spannungen an der Ober- und Unterkante des Trägers berechnet werden können. Gesucht ist die Grösse der Vorspannkraft und die Lage des durchlaufenden Kabels, wobei die Vorspannkraft möglichst klein (minimaler Stahlverbrauch) gehalten werden soll. Dabei müssen die folgenden drei Gruppen von Bedingungen eingehalten werden:

- Die Spannung im Gebrauchszustand muss sowohl in Ober- und Unterkante zwischen den gegebenen zulässigen Werten liegen. In diesem Beispiel: σ_{min} (zul.) = -800 t/m^2 , σ (zul.) $_{max} = 0 \text{ t/m}^2$.
- Das Kabel muss innerhalb des im wesentlichen konstruktiv

bedingten Schlauches liegen, Bild 11 (Sicherung genügender Betonüberdeckung, Möglichkeit, die Kabel zu verankern usw., aber auch Berücksichtigung des Schub- und Bruchverhaltens).

- Kein Unterschreiten des minimal zulässigen Krümmungsradius (in diesem Beispiel $R_{min} = 4 \text{ m}$).

Diese Aufgabe wird mit Hilfe eines linearen Programmes gelöst: Als Unbekannte werden die Exzentrizitäten des Kabels (in den Achtelpunkten der Felder) und die Vorspannkraft (genauer: der reziproke Wert) eingeführt. Die Optimalfunktion drückt aus, dass die Vorspannkraft minimal sein soll (der reziproke Wert maximal). Die einzuhaltenden Bedingungen führen in jedem betrachteten Schnitt (Achtelpunkte) zu folgenden Ungleichungen:

- 4 Spannungsungleichungen. Beim flüchtigen Betrachten dieser Ungleichungen könnte man darauf schliessen, dass diese quadratisch sind, also mit einem linearen Programm nicht zu behandeln wären (Moment = Exzentrizität mal Vorspannkraft). Dividiert man die Ungleichungen aber mit der Vorspannkraft, so werden sie linear, falls der reziproke Wert der Vorspannkraft als Unbekannte eingeführt wird. Die statisch unbestimmten Grössen aus Vorspannung werden berücksichtigt.

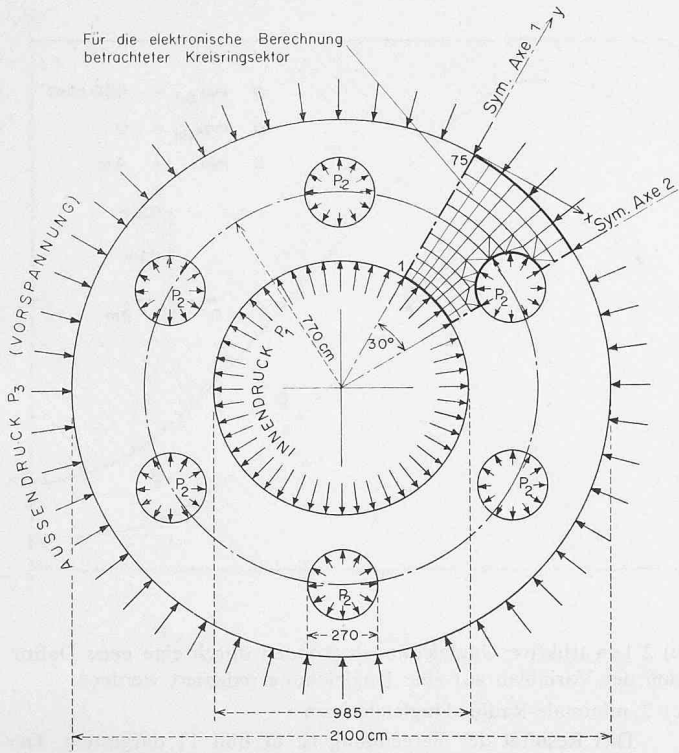
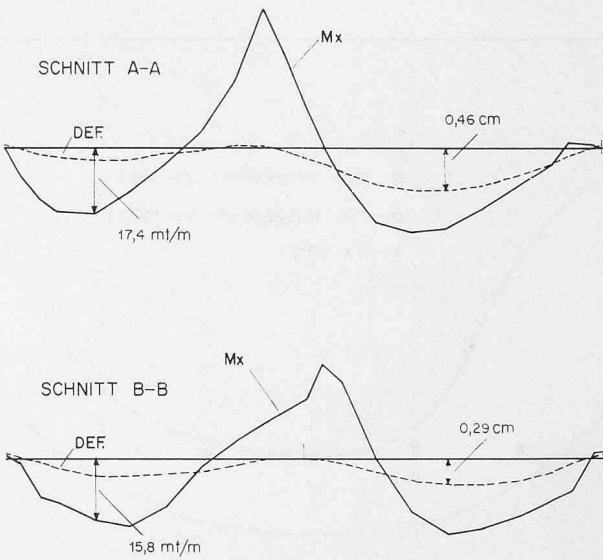


Bild 6. Statisches System und Elementeteilung der Reaktorscheibe



b) Biegemomente und Deformationen infolge Eigengewicht $g = 1,75 \text{ t/m}^2$

ANSICHT MIT ELEMENTEINTEILUNG

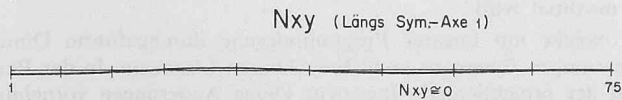
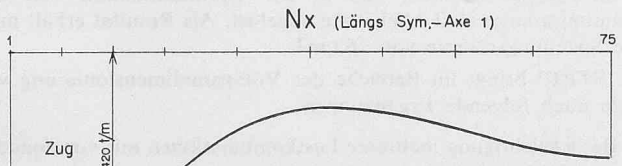
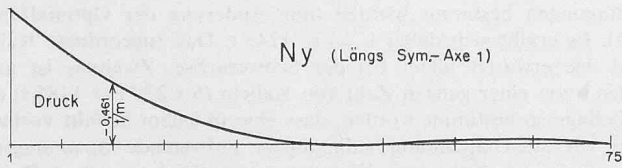
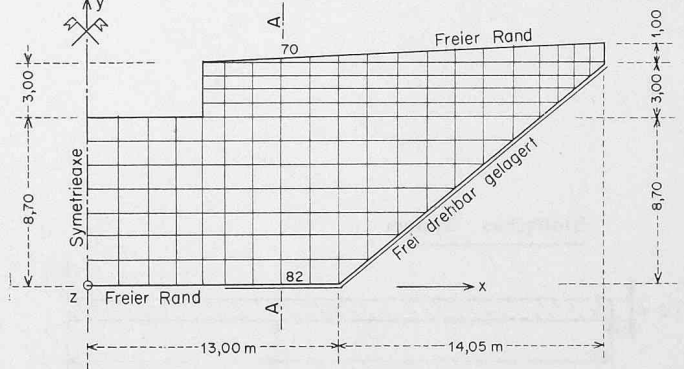


Bild 7. Schnittkraftverlauf infolge Innendruck $p_1 = 1 \text{ t/m}$

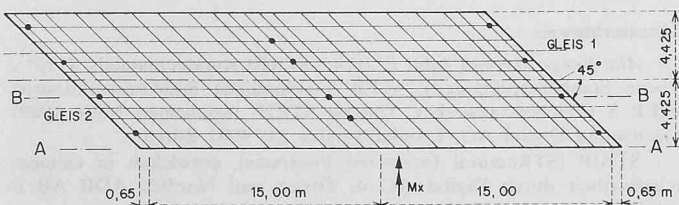
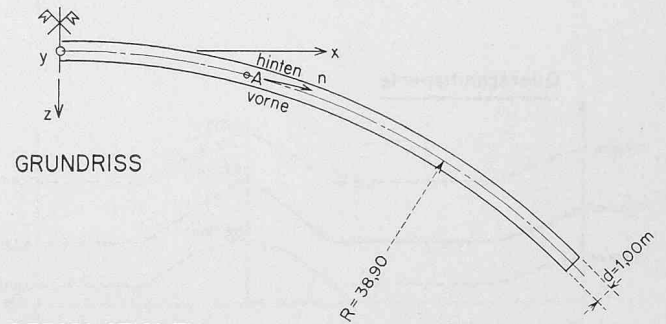
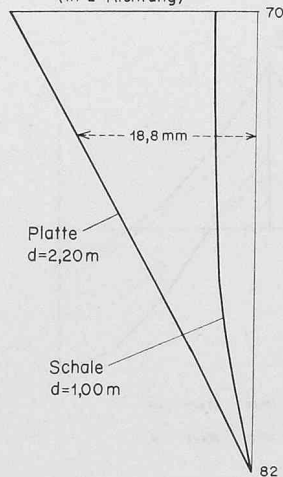


Bild 8. Schiefe punktförmig gelagerte Platte
a) Grundriss mit Elementeteilung



DEFORMATIONEN (in z-Richtung)



SPANNUNGEN σ_n

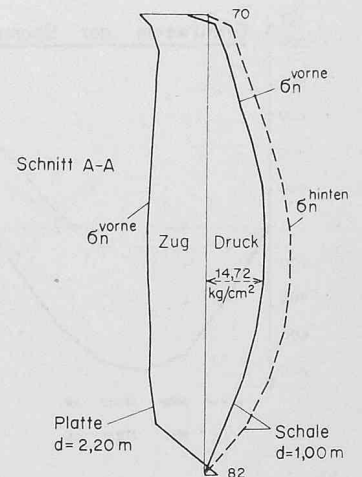


Bild 9. Wildbachsperre

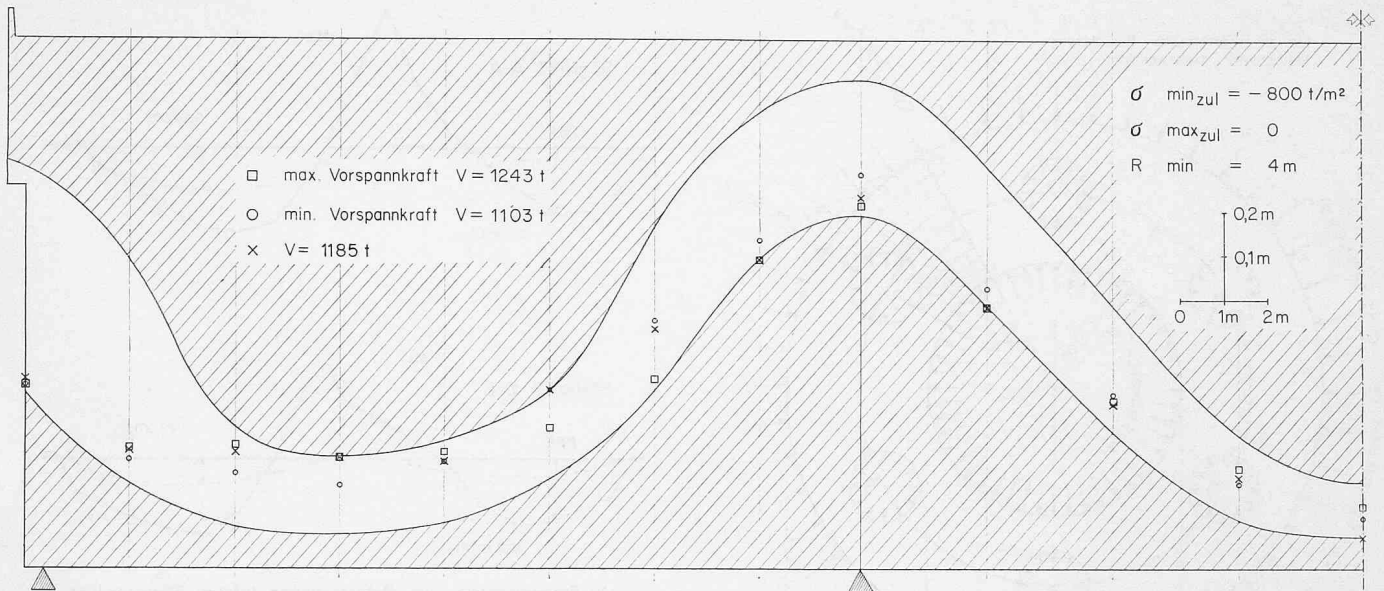


Bild 11. Vorspannkabeldimensionierung bei einer symmetrischen Dreifeldbrücke. Konstruktiv zulässiger Schlauch. Resultat der drei Vorspanndimensionierungen

b) 2 konstruktive Ungleichungen (können durch eine neue Definition der Variablen auf eine Ungleichung reduziert werden).
c) 2 minimale-Radius-Ungleichungen.

Das Resultat der Berechnung ist in Bild 11 dargestellt. Der minimalen Vorspannkraft $V_{min} = 1103 \text{ t}$ ist eine vernünftige Kabellage zugeordnet. Zwei alternative Dimensionierungen sind in Bild 11 ebenfalls eingetragen worden. Erstens ist die grösstmögliche Vorspannkraft und deren Kabellage unter Einhaltung der gleichen Bedingungen bestimmt worden (nur Änderung der Optimalfunktion). Es ergibt sich dabei $V_{max} = 1243 \text{ t}$. Das zugeordnete Kabel liegt wie erwartet näher bei der Schwerachse. Zweitens ist ausgehend von einer ganzen Zahl von Kabeln ($5 \times 237 \text{ t} = 1185 \text{ t}$) die Kabellage so bestimmt worden, dass eine in jedem Schnitt vorhandene, in allen Spannungsbedingungen auftretende Spannungsreserve maximal wird, unter Einhaltung der gleichen andern Bedingungen. Die gegebene Vorspannkraft wird in diesem Fall in den Spannungsungleichungen und in der Optimalfunktion von der Spannungsmarge als Unbekannte abgelöst. Als Resultat erhält man eine Spannungsreserve von 16 t/m^2 .

STRIP bringt im Bereiche der Vorspanndimensionierung vor allem noch folgende Ergänzungen:

- Berücksichtigung mehrerer Lastkombinationen mit voneinander verschiedenen zulässigen Spannungen.
- Approximative Berücksichtigung der Reibung und des Kriechens.
- Verarbeitung mehrerer Kabelgruppen, die verschiedene Einheitspreise aufweisen können.
- Bestimmt wird die preisgünstigste Zahl der einzelnen Kabelgruppen und deren Verlauf, so dass die in jedem Schnitt und in allen Spannungsbedingungen auftretende Spannungsreserve maximal wird.

Solche mit linearer Programmierung durchgeführte Dimensionierungen führen zu recht brauchbaren Lösungen. In der Regel wird der projektierende Ingenieur kleine Änderungen vornehmen und dann bei gegebener Spannkraft und Kabellage eine normale Analyse unter exakter Berücksichtigung der Reibung und des Kriechens und Schwindens vornehmen, was mit STRIP ebenfalls möglich ist.

Literaturhinweis

Ake Bengtsson und John P. Wolf: STRIP Kundenmanuals STEP 2 (ebene Stabkonstruktionen), STEP 3 (räumliche Stabkonstruktionen), STEP S (Flächentragwerke), Theorie STRIP (erscheinen Mitte 1969). Eigenverlag Digital AG, Leonhardshalde 21, 8001 Zürich.

STRIP (STRuctural Integrated Programs), entwickelt in Gemeinschaftsarbeit durch Digital AG in Zürich und Nordisk ADB AB in Stockholm.

Adresse des Verfassers: John P. Wolf, dipl. Ing. ETH, Digital AG, Leonhardshalde 21, 8001 Zürich.

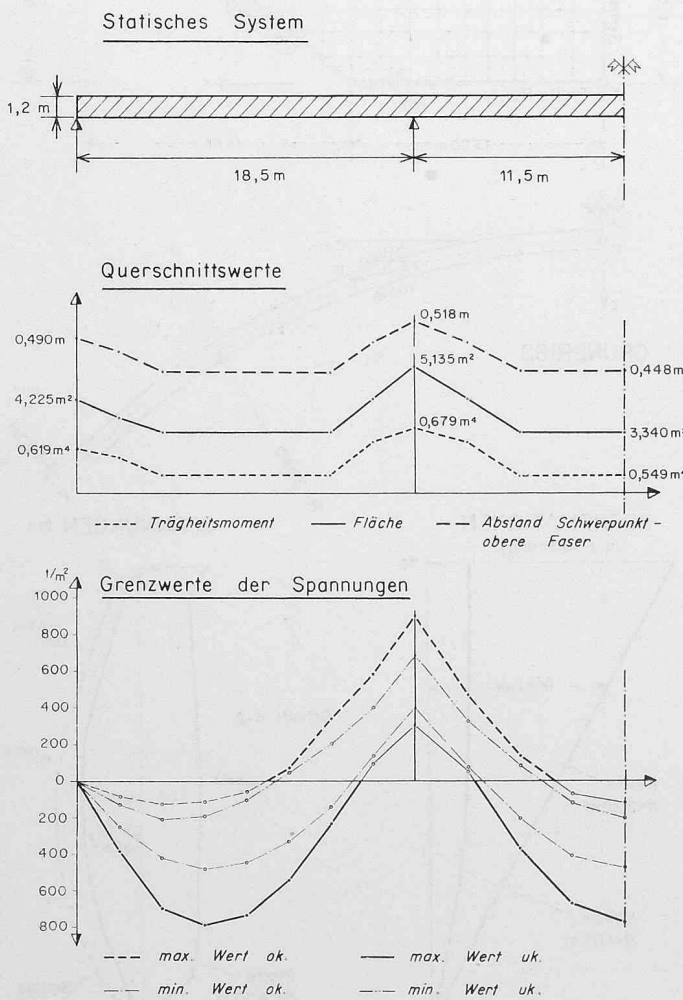


Bild 10. Statisches System. Querschnittswerte und Grenzwerte der Spannungen