

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 87 (1969)
Heft: 49

Artikel: Gesetze der geometrischen Ähnlichkeit hydraulischer Turbomaschinen bei Einbeziehung betriebsbedingter Deformation und Spaltänderungen der Laufschaufeln
Autor: Osterwalder, J. / Gast, P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-70822>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Gesetze der geometrischen Ähnlichkeit hydraulischer Turbomaschinen bei Einbeziehung betriebsbedingter Deformation und Spaltänderungen der Laufschaufeln

DK 621.224.001.5

Von Prof. J. Osterwalder und Dipl.-Ing. P. Gast, Technische Hochschule Darmstadt

1. Einleitung

Die im Versuchswesen angestrebte geometrische Ähnlichkeit der durch- und umströmten Teile bezieht sich in der Regel auf unbelastete bzw. stillstehende leere Turbomaschinen. Erweitert man diese Forderung auf durchströmte belastete Maschinen, so ergeben sich einige Probleme, die Gegenstand der vorliegenden Untersuchung sind. Es handelt sich dabei um die Ähnlichkeit der durch Fliehkraft und hydrodynamische Kraftwirkung bedingten elastischen Schaufeldeformation. Die Durchbiegung der Laufschaufeln und die damit zusammenhängende Auswirkung auf die Grösse des Spaltes haben bekanntlich einen u. U. wesentlichen Einfluss auf den Wirkungsgrad. Der Beitrag behandelt die massgebenden Ähnlichkeitsgesetze und zeigt am Beispiel, wie die experimentellen Voraussetzungen zu wählen sind, wenn unterschiedliche Laufradwerkstoffe und Strömungsmedien beim Modellversuch Verwendung finden.

Die Untersuchung beschränkt sich auf kranzlose Turbinen für kleine und mittlere Fallhöhen. Die Ergebnisse sind grundsätzlich auch auf Pumpen vergleichbarer Bauart anwendbar. Beim Studium des elastizitätsbedingten Verhaltens wird den verschiedenen Möglichkeiten der Modellversuchspraxis Rechnung getragen. Der Fallhöhenbereich, die Werkstoffwahl (Laufschaufeln) und das Strömungsmedium stellen dabei wichtige Kriterien dar. Deformationen durch Eigengewicht, Wärmedehnungen und entsprechende Auswirkungen auf den Laufradspalt werden nicht berücksichtigt. Eine nähere Untersuchung der betreffenden Ähnlichkeitsgesetze erscheint sinnvoll, insbesondere wenn man sich den grossen Arbeitsaufwand für die genaue Herstellung und Kontrolle von Turbinenbeschaufelungen vergegenwärtigt. Im Hinblick auf das Wirkungsgrad- und Kavitationsverhalten (z. B. Spaltkavitation) werden bekanntlich Bruchteile von Millimetern kritisch beurteilt. Es ist daher verständlich, wenn hiermit versucht wird, die aufgewendete Sorgfalt in geeigneter Form auf die in Betrieb befindliche Maschine zu übertragen. Die Forderung nach Modellähnlichkeit ist dann besonders berechtigt und von hohem Interesse.

2. Hydrodynamische Kraftwirkungen

Geometrisch ähnliche Maschinen, die unter vergleichbaren Strömungsbedingungen arbeiten (Ku_1 ; Q_{11} ; σ gleich; Re -Einfluss wird vernachlässigt)¹⁾, haben innerhalb des Hookeschen Gesetzes ähnliche elastische Schaufeldeformationen und Spaltänderungen $\Delta s_K/D_1$ durch hydrodynamische Kraftwirkungen, wenn die Voraussetzungen gemäss Formel (2) wie folgt erfüllt sind:

$$(1) \quad \frac{\Delta s_K}{D_1} = C_K H \frac{\gamma_{St}}{E}$$

$$(2) \quad \frac{H_{Mod}}{H_{Anl}} = \frac{E_{Mod}}{E_{Anl}} \frac{\gamma_{St Anl}}{\gamma_{St Mod}}$$

Die dimensionslose Ziffer C_K ist für geometrisch und hydraulisch ähnliche Maschinen gleich. Formel (1) gilt, sofern druckbedingte Änderungen des Manteldurchmessers vernachlässigbar sind. Im Falle der Verwendung eines Plexiglasmanells aus Gründen der Kavitationsbeobachtung sollte dieser Einschränkung besondere Beachtung geschenkt werden.

3. Fliehkraftwirkung

Die Fliehkraft verursacht elastische Verformungen der Laufschaufeln durch Zugspannung, Biegebeanspruchung (exzentrischer Zug) und Torsion. Geometrisch und hydraulisch ähnliche Turbinen haben innerhalb des Hookeschen Gesetzes gleiche bezogene Spaltänderungen $\Delta s_F/D_1$ durch Fliehkraftwirkung, wenn die Formel (4) beachtet wird (C_F = Konstante entsprechend Hinweis für C_K):

$$(3) \quad \frac{\Delta s_F}{D_1} = C_F H \frac{\gamma_W}{E}$$

$$(4) \quad \frac{H_{Mod}}{H_{Anl}} = \frac{\gamma_W Anl}{\gamma_W Mod} \frac{E_{Mod}}{E_{Anl}}$$

Wird vollständige geometrische Ähnlichkeit der Schaufeldeformation und Spaltänderung verlangt, so müssen die Formeln (2) und (4) zu ein und demselben Fallhöhenverhältnis und daher zu folgender Beziehung führen:

$$(5) \quad \left(\frac{\gamma_{St}}{\gamma_W} \right)_{Mod} = \left(\frac{\gamma_{St}}{\gamma_W} \right)_{Anl}$$

Bei gleichen Strömungsmedien (Normalfall) und Werkstoffen von Modell und Grossanlage ergibt sich gemäss Formeln (2) und (4) das Fallhöhenverhältnis $H_{Mod}/H_{Anl} = 1$. Werden beim selben Strömungsmedium Laufschaufelmaterialien mit annähernd gleichem spezifischen Gewicht, jedoch unterschiedlichem Elastizitätsmodul E verwendet (z. B. Stahlguss für die Grossanlage und Aluminiumbronze beim Modell), so kann die Modellfallhöhe den Gegebenheiten des Prüfstandes u. U. entsprechend der Gleichung angepasst werden.

$$(5a) \quad \frac{H_{Mod}}{H_{Anl}} = \frac{E_{Mod}}{E_{Anl}}$$

Da Prüfstände bezüglich Leistung und Fallhöhe nach unterschiedlichen Gesichtspunkten bemessen werden, lässt sich vollständige geometrische Ähnlichkeit leider nicht immer verwirklichen. Weil mit dieser Forderung eine erhebliche und auch unerwünschte Einschränkung der experimentellen Möglichkeiten verbunden wäre, soll im folgenden Teil des Berichtes auf Kompromisse bzw. Näherungslösungen eingegangen werden.

4. Näherungslösungen

Auf der Suche nach entsprechenden Gesetzmässigkeiten wird zunächst vom Laufradspalt s ausgegangen, da dieser bekanntlich einen erheblichen Einfluss auf den Wirkungsgrad ausübt. Für ihn gilt:

$$(6) \quad \frac{s}{D_1} = \frac{\Delta s_K - \Delta s_F + s_0}{D_1} = C_K H \frac{\gamma_{St}}{E} - C_F H \frac{\gamma_W}{E} + \frac{s_0}{D_1}$$

s_0 ist der Spalt der leeren, stillstehenden Turbine (Nullspalt), und das Minuszeichen deutet an, dass die Deformation durch Fliehkraft spaltverkleinernd wirkt. Ausgehend von der Annahme, dass die erwähnte Kompromisslösung in der Wahl verschiedener bezogener Nullspalte bei Modell und Anlage liegen kann, soll vorerst der betreffende Unterschied wie folgt bestimmt werden:

$$\frac{\Delta s_0}{D_1} = \left(\frac{s_0}{D_1} \right)_{Mod} - \left(\frac{s_0}{D_1} \right)_{Anl}$$

Die Forderung nach geometrischer Ähnlichkeit des Spaltes $(s/D_1)_{Mod} = (s/D_1)_{Anl}$ ergibt:

$$(7) \quad \frac{\Delta s_0}{D_1} = \left(\frac{\Delta s_K - \Delta s_F}{D_1} \right)_{Anl} - \left(\frac{\Delta s_K - \Delta s_F}{D_1} \right)_{Mod}$$

In Verbindung mit den Gleichungen (1) und (3) erhält man:

$$(8) \quad \frac{\Delta s_0}{D_1} = C_F \left[H_{Anl} \frac{\gamma_W Anl}{E_{Anl}} \left(\frac{C_K \gamma_{St Anl}}{C_F \gamma_W Anl} - 1 \right) - H_{Mod} \frac{\gamma_W Mod}{E_{Mod}} \left(\frac{C_K \gamma_{St Mod}}{C_F \gamma_W Mod} - 1 \right) \right]$$

¹⁾ Eine Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen findet sich am Schluss des Aufsatzes.

Tabelle 1. Materialkonstanten und Kennzahlen verschiedener im Versuchswesen gebräuchlicher Laufradwerkstoffe.

Werkstoff	γ_w kp/cm ³	E kp/cm ²	$C_1 = \gamma_w/E$ 1/cm	$C_2 = \gamma_{st}/\gamma_w$ (Wasser)	$C_2 = \gamma_{st}/\gamma_w$ (Gase)
Aluminium-bronze	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$8,0 \cdot 10^5$	$0,95 \cdot 10^{-8}$	0,1315	~ 0
Epoxydharz (mit Glas- fasern)	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$8,0 \cdot 10^4$	$2,0 \cdot 10^{-8}$	0,625	~ 0
Silumin	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$7,2 \cdot 10^5$	$3,61 \cdot 10^{-9}$	0,385	~ 0
Stahlguss	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^6$	$3,71 \cdot 10^{-9}$	0,128	~ 0

Mit $A = C_K/C_F$ und $C_1; C_2$ gemäss Tabelle 1 ist:

$$(9) \quad \frac{\Delta s_0}{D_1} = C_F \left[H_{Anl} C_1 Anl \left(A C_2 Anl - 1 \right) - H_{Mod} C_1 Mod \left(A C_2 Mod - 1 \right) \right]$$

Der aus (8) und (9) berechnete Nullspaltunterschied gewährleistet keine geometrische Ähnlichkeit der Schaufeldurchbiegung. Es können hingegen die Versuchsbedingungen ($H_{Mod}; s_0 Mod$) angegeben werden, bei denen beispielsweise die mittlere Spaltgrösse s ähnlich ausfällt; weitere diesbezügliche Hinweise folgen.

Aus Formel (9) ergibt sich eine weitere Gesetzmässigkeit unter Annahme $\Delta s_0/D_1 = 0$ wie folgt:

$$(10) \quad \frac{H_{Anl}}{H_{Mod}} = \frac{C_1 Mod}{C_1 Anl} \frac{A C_2 Mod - 1}{A C_2 Anl - 1}$$

Bei Einhaltung des Fallhöhenverhältnisses entsprechend Gleichung (10) ist:

$$\left(\frac{\Delta s_K - \Delta s_F}{D_1} \right)_{Mod} = \left(\frac{\Delta s_K - \Delta s_F}{D_1} \right)_{Anl}$$

Bei Modell und Anlage sind die bezogenen Deformationen durch hydrodynamische und Fliehkraftwirkung anteilmässig verschieden, doch als Summe gleich gross. Formel (10) gewährleistet somit geometrische Ähnlichkeit von Spaltspiel und Schaufeldurchbiegung. Einschränkung sei jedoch vermerkt, dass es sich um die den C_F - und C_K -Werten zugrunde gelegten Deformationen bzw. Spaltänderungen eines bestimmten Bezugsortes handelt (z. B. Mittelwerte). Infolge wechselnder Beanspruchungen durch hydrodynamische und Fliehkraftwirkung (Druckverteilung – Massenverteilung) kann die erwähnte Gleichheit der Summe der elastischen Verformungen nicht für die ganze Schaufel gelten, da die Grösse A und somit auch das Ergebnis der Formel (10) von Ort zu Ort sich ändern (dies wäre nur bei Berücksichtigung von Formel (5) bzw. (5a) der Fall). Die mit den Formeln (9) und (10) erreichbare Ähnlichkeit (z. B. des mittleren Spaltes) stellt immerhin eine brauchbare Ersatzlösung dar. Wird im folgenden Teil von geometrisch ähnlichen Spalten gesprochen, so handelt es sich immer um diese «Ersatzähnlichkeit».

5. Diskussion der Ziffern $C_K; C_F; A$

Voraussetzung zur praktischen Anwendung der Formeln (9) und (10) bzw. des Nomogrammes Bild 1 sind Kenntnisse über die darin enthaltenen Grössen. Nachdem $H_{Anl}; C_1; C_2$ in der Regel bekannt sind, soll anschliessend auf $C_F; C_K$ und A eingegangen werden.

Die Fliehkraftkonstante C_F kann durch Ermittlung von Δs_F (z. B. Mittelwert) an dem in Luft frei rotierenden Laufrad (z. B. Drehbank) experimentell bestimmt und in Abhängigkeit von Ku_1 wie folgt dargestellt werden:

$$(11) \quad C_F = \frac{\Delta s_F}{D_1} \frac{E}{H \gamma_w} = \frac{\Delta s_F}{D_1} \frac{2 E}{\rho w} \frac{Ku_1^2}{u_1^2}$$

Diesbezüglich sei auf Angaben von M. Fauconnet [1] über Schleuderversuche an einem ausgeführten, kranzlosen, doppelflutigen Francislaufrad mit den Daten $n_s = 212 \sqrt{2}$, $n = 428,6$ U/min, $D_1 = 1,1$ m, Werkstoff Al-Bz verwiesen. (n entspricht der Nenndrehzahl der Turbine bei $H_{Anl} = 44$ m)

Die mittlere bezogene Spaltänderung war mit dem Nullspalt s_0/D_1 identisch und wurde zu $\Delta s_F/D_1 = 0,00236$ bestimmt. Durch Ein-

setzen in Formel (11) ergibt sich $C_F = 79,5 Ku_1^2$. Bei Kaplan-Turbinen führen die fliehkraftbedingten Zugspannungen σ_Z zu relativ kleinen Spaltänderungen $\Delta s_F/D_1$, die rechnerisch ausreichend genau abgeschätzt werden können. Stellt man sich die Laufschaufel als Fortsetzung von «Zapfen und Teller» ersatzweise als Rotationskörper gleicher Massenverteilung und Festigkeitsquerschnitte über dem Radius R vor, so lässt sich deren bezogene Längenänderung $\Delta l/l \sim \Delta s_F/D_1$ wie folgt durch graphische Integration bestimmen:

$$(11a) \quad \frac{\Delta s_F}{D_1} = \frac{1}{D_1 E} \int_{R_i}^{R_1} \sigma_Z \cdot dR$$

Die kleine, durch Nabenelastizität bedingte Spaltänderung, kann überschlägig gleichfalls abgeschätzt werden. Fliehkraftbedingte Biege- spannungen (exzentrischer Zug) führen zu keiner nennenswerten Spaltänderung, da die Schaufel deformation bzw. Durchbiegung sozusagen parallel zum Kugel- oder Halbkugelmantel erfolgt. Dies trifft bei entsprechender Begrenzung (Mantelform) auch für Deriazturbinen zu. Unter dieser Voraussetzung kann C_F nach Formel (11) und (11a) berechnet werden. Für die Beschaukelung einer Niederdruck-Kaplan-turbine wurde beispielsweise $C_F = 0,3 Ku_1^2$ bestimmt.

Die Ermittlung von C_K und A führt zu vermehrten Schwierigkeiten, da die Druckverteilung am Schaufelblatt von den jeweiligen Betriebs- daten Ku_1 und Q_{11} abhängt und diese Grössen sowohl die hydro- dynamischen Kraftwirkungen als auch C_K beeinflussen. Geeignete Unterlagen sind spärlich; sie können nur auf experimentellem Weg beschafft werden. Die erwähnten Untersuchungen von Fauconnet [1] liefern dazu einige Hinweise. Es handelt sich dabei um die Modell- maschine ($D_1 = 0,4$ m) mit glasfaserverstärkten Epoxydharzschau- feln; sie wurde mit Wasser als Strömungsmedium bei verschiedenen Fall- höhen gemessen. Die für $Ku_1 = 0,808$ veröffentlichten Ergebnisse sind in etwas abgewandelter Form in Bild 2 dargestellt. Die betreffende, für $H_{Mod} = 8,5$ m eingezeichnete Kurve (Gerade) kann ausreichend genau durch $\Delta s_K/D_1 = 0,0106 Q/Q_{11}$ wiedergegeben werden. Aus Formel (1) folgt somit:

$$C_K = 0,0106 \cdot \frac{Q}{Q_{11}} \frac{E}{H_{Mod} \gamma_{st}} \approx 1000 \frac{Q}{Q_{11}}$$

Mit der gemäss Formel (11) schon berechneten Fliehkraftkon- stanten der Grossanlage ($C_F = 79,5 \cdot Ku_1^2 = 79,5 \cdot 0,808^2 = 51,7$) ergibt sich:

$$A = \frac{C_K}{C_F} = \frac{1000}{51,7} \frac{Q_{11}}{Q_{11}} = 19,35 \frac{Q_{11}}{Q_{11}}$$

Bei Kaplan-, Propeller- und Deriazturbinen ist die Ermittlung von C_K und A weniger wichtig, weil die durch hydrodynamische Kraftwirkungen bedingte Schaufeldurchbiegung im Kugel- oder Halb- kugelmantel keine nennenswerte Spaltänderung verursachen kann; somit ist $A \approx 0$. Da die fliehkraftbedingte Spaltänderung ebenfalls klein ist, werden die bezogenen Nullspalte bei Modell und Gross- anlage in der Regel gleich ausgeführt. Beim Luftversuch liegen die Verhältnisse u. U. etwas anders; ein Rechenbeispiel soll dies veran- schaulichen. Mit $A = 0$ lässt sich Formel (9) wie folgt vereinfachen:

$$(12) \quad \frac{\Delta s_0}{D_1} = C_F (C_1 Mod H_{Mod} - C_1 Anl H_{Anl})$$

Annahmen:

Werkstoff der Grossanlage, St.-G.; $H_{Anl} = 20$ m

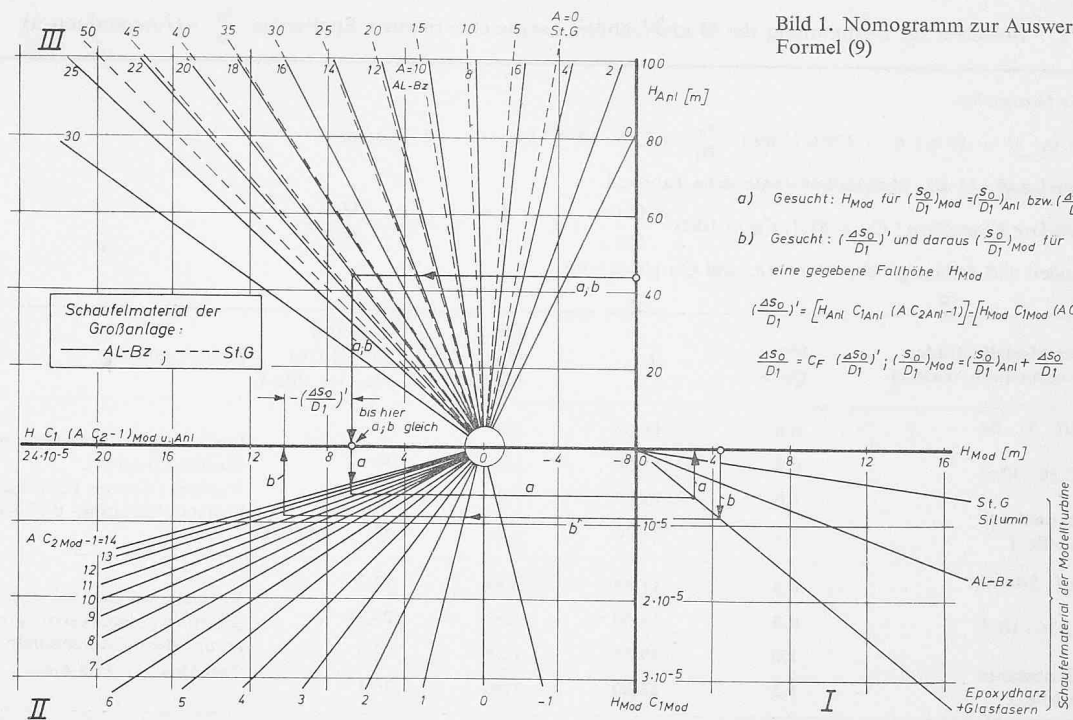


Bild 1. Nomogramm zur Auswertung von Formel (9)

- a) Gesucht: H_{Mod} für $(\frac{s_0}{D_1})_{Mod} = (\frac{s_0}{D_1})_{Anl}$ bzw. $(\frac{\Delta s_0}{D_1})' = 0$
b) Gesucht: $(\frac{\Delta s_0}{D_1})'$ und daraus $(\frac{s_0}{D_1})_{Mod}$ für eine gegebene Fallhöhe H_{Mod}
 $(\frac{\Delta s_0}{D_1})' = [H_{Anl} C_{1Anl} (A C_{2Anl} - 1)] - [H_{Mod} C_{1Mod} (A C_{2Mod} - 1)]$
 $\frac{\Delta s_0}{D_1} = C_F (\frac{\Delta s_0}{D_1})'; (\frac{s_0}{D_1})_{Mod} = (\frac{s_0}{D_1})_{Anl} + \frac{\Delta s_0}{D_1}$

Werkstoff der Modellturbine, Silumin bzw. Epoxydharz
 $\Delta p = 250 \text{ kp/m}^2$; $\gamma_{st} = 1,26 \text{ kp/m}^3$ (Luft);
 $H_{Mod} = 250/1,26 = 198,5 \text{ m}$
 C_1 vgl. Tabelle 1; $C_F = 0,3 \text{ Ku}_1^2$

Werden diese Daten in Formel (12) eingesetzt, so erhält man die folgenden, nicht unwesentlichen Nullspaltunterschiede:

$$\frac{\Delta s_0}{D_1} = 1,90 \cdot 10^{-5} \cdot \text{Ku}_1^2 \text{ (Siluminschaufeln)}$$

$$\frac{\Delta s_0}{D_1} = 0,12 \cdot 10^{-3} \cdot \text{Ku}_1^2 \text{ (Epoxydharzschaukeln)}$$

6. Anwendung der abgeleiteten Spaltgeometriegesetze

Nachdem die in den Formeln (9) und (10) enthaltenen Grössen behandelt worden sind, soll anschliessend deren Anwendung anhand des Nomogrammes Bild 1 erläutert werden. Es gibt u. a. Auskunft über die zur Gewährleistung geometrisch ähnlicher Spalte s/D_1 erforderlichen Versuchsbedingungen der Modellturbine. Die Daten der Grossanlage werden als gegeben betrachtet. Zum besseren Verständnis sind einige Auswertungsbeispiele in Tabelle 2 dargestellt. Sie beziehen sich auf die oft zitierten experimentellen Untersuchungen von M. Fauconnet, weil daraus konkrete Angaben über C_F , C_K und A hergeleitet werden können [1].

Anwendung a

Im üblichen Falle gleicher bezogener Spalte s_0/D_1 bei Modell und Anlage berechnet sich die Fallhöhe H_{Mod} nach Formel (10) oder entsprechend dem im Nomogramm angedeuteten Beispiel. Je nach Modellwerkstoff und Betriebsdaten ergeben sich verschiedene Fallhöhen der Modellturbine.

Unter bestimmten Voraussetzungen (z. B. Luftversuche) lässt sich keine Zuordnung der Schnittpunkte der Quadranten III und II in Bild 1 erzielen oder es ergeben sich unzweckmässige, das heisst zu kleine, bzw. zu grosse Fallhöhen der Modellturbine, wie sie beispielsweise in Tabelle 2 dargestellt sind. Unter diesen Umständen wird wie folgt verfahren:

Anwendung b

$\Delta s_0/D_1$ wird für eine bestimmte, geeignet erscheinende Fallhöhe der Modellturbine bestimmt. Man erhält:

$$(13) \quad \left(\frac{s_0}{D_1}\right)_{Mod} = \left(\frac{s_0}{D_1}\right)_{Anl} + \frac{\Delta s_0}{D_1}$$

Zu erwähnen bleibt noch, dass die Ergebnisse beider Anwendungen (a und b) vom jeweiligen Betriebspunkt (Q_{11} ; Ku_1) des Kennlinien-

feldes abhängen, da A und C_F Funktionen dieser Grössen sind. Diesem Einfluss kann nach Vorgehen a durch Variation von H_{Mod} Rechnung getragen werden. Beim Vorgehen b muss man sich für einen mittleren Nullspalt der Modellturbine entscheiden und Abweichungen in Kauf nehmen. Ausgehend vom inzwischen bekannten Beispiel der doppel-flutigen kranzlosen Francisturbine sind die Formeln (9) und (10) bzw. das Nomogramm Bild 1 für verschiedene experimentelle Möglichkeiten bezüglich der Wahl der Werkstoffe und Strömungsmedien ausgewertet und in den Tabellen 2 und 3 dargestellt worden.

Zur Vervollständigung soll das von M. Fauconnet [1] vorgeschlagene Verfahren nachstehend kurz erläutert werden: Beim Versuch werden sämtliche Betriebspunkte der interessierenden Kennlinie bei ein und derselben Drehzahl gefahren. Entsprechend den Modellgesetzen und unter Berücksichtigung von Formel (2) gilt für gleiche spezifische Umfangsgeschwindigkeiten [1] und Strömungsmedien:

$$\frac{n_{Mod}}{n_{Anl}} = \left(\frac{H_{Mod}}{H_{Anl}}\right)^{1/2} \frac{D_1 \text{ Anl}}{D_1 \text{ Mod}} = \left(\frac{E_{Mod}}{E_{Anl}}\right)^{1/2} \frac{D_1 \text{ Anl}}{D_1 \text{ Mod}}$$

$$n_{Mod} = n_{Anl} \left(\frac{E_{Mod}}{E_{Anl}}\right)^{1/2} \frac{D_1 \text{ Anl}}{D_1 \text{ Mod}}$$

Bei dieser Drehzahl wird das Versuchslaufrad durch Einschleifen in den Mantel eingepasst (Leerlaufbetrieb). Die durch Fliehkraft bedingte elastische Verformung gelangt bei dieser «Bearbeitungsmethode» zur Auswirkung. Es wird dabei dasselbe bezogene Laufradspiel angestrebt wie es im Falle der Grossanlage unter denselben Voraussetzungen (Leerlaufbetrieb) bereits ausgemessen wurde. Durch dieses Vorgehen wird die Wirkung der Fliehkraft und somit auch die Forderung entsprechend Formel (4) kompensiert. Geometrische Ähnlichkeit des Spaltes ist unter Einhaltung von Formel (2) bzw. bei Berücksichtigung der genannten Drehzahl n_{Mod} gewährleistet.

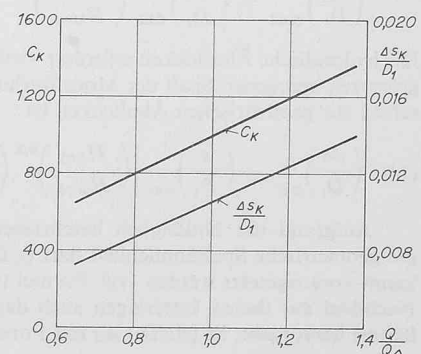


Bild 2. Darstellung des Versuchsergebnisses von M. Fauconnet ([1] Bild 8) als Grundlage zur Bestimmung von C_K
 $H_{Mod} = 8,5 \text{ m}$; $n = 500 \text{ U/min}$; $D_1 = 0,4 \text{ m}$; $Ku_1 = 0,808$

Tabelle 2: Beispiele zur Bestimmung der Modellfallhöhe bei gleicher relativer Spaltweite $\frac{s_0}{D}$ · (Anwendung a)

Daten der Grossanlage:

$$D_1 = 1,1 \text{ m}; H = 44 \text{ m}; n = 428,6 \text{ U/min}; \frac{s_0}{D_1} = 2,36 \cdot 10^{-3}; \gamma_{ST} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kp/cm}^3$$

Laufradwerkstoff: Al-Bz; Materialkonstante siehe Tabelle 1

$$\text{Dimensionslose Kennziffern}^* C_F = 51,7; C_K = 1000 \cdot \frac{Q_{11}}{Q_{11 \wedge}}; A = \frac{C_K}{C_F} = 19,35 \cdot \frac{Q_{11}}{Q_{11 \wedge}}$$

* Bei Modell und Anlage gleich, sofern Ku_1 und Q_{11} gleich sind.

Daten des Modellauftrades (Strömungsmedium Wasser)	$\frac{Q_{11}}{Q_{11 \wedge}}$	A	$\frac{H_{Anl.}}{H_{Mod}}$ Formel (10)	H_{Mod} [m] Formel (10) oder aus Bild 1	Bemerkungen
Werkstoff: Al.-Bz	0,6	11,62	1,0	44	Bedingung vollständiger geom. Ähnlichkeit gemäss Formel (5) erfüllt. Nachteil: Grosse Fallhöhen erfordern entsprechende Prüfstandsleistung- und Kosten.
$\frac{s_0}{D_1} = 2,36 \cdot 10^{-3}$	0,8	15,50	1,0	44	
Materialkonstante siehe Tabelle 1	1,0	19,35	1,0	44	
	1,2	23,20	1,0	44	
Werkstoff: Silumin	0,6	11,62	2,49	17,7	Versuche müssen bei variablen H_{Mod} bzw. Re durchgeführt werden. Relativ grosse Fallhöhen führen u. U. zu unzulässigen Schaufelbeanspruchungen da $\sigma_{zul Mod} < \sigma_{zul Anl}$
$\frac{s_0}{D_1} = 2,36 \cdot 10^{-3}$	0,8	15,50	1,81	24,3	
Materialkonstante siehe Tabelle 1	1,0	19,35	1,58	27,9	
	1,2	23,20	1,46	30,1	
Werkstoff: St. G	0,6	11,62	0,361	122	H_{Mod} ist vorteilhafterweise annähernd konstant, jedoch extrem hoch ($H_{Mod} \approx 3 \cdot H_{Anl.}$) und aus Festigkeitsgründen kaum realisierbar. ($\sigma_{zul Mod} \sim \sigma_{zul Anl}$)
$\frac{s_0}{D_1} = 2,36 \cdot 10^{-3}$	0,8	15,50	0,370	119	
Materialkonstante siehe Tabelle 1	1,0	19,35	0,374	117,5	
	1,2	23,20	0,377	116,5	
Werkstoff: Glasfaserverstärktes Epoxydharz	0,6	11,62	24,9	1,77	Versuche müssen bei sehr kleinen und noch dazu variablen H_{Mod} bzw. Re durchgeführt werden. Die von den I.E.C.-Regeln empfohlene Grenze $Re_{min} = 2,5 \cdot 10^6$ würde u.U. unterschritten. Kavitationsversuche sind problematisch (Luftausscheidung).
$\frac{s_0}{D_1} = 2,36 \cdot 10^{-3}$	0,8	15,50	17,6	2,50	
Materialkonstante siehe Tabelle 1	1,0	19,35	15,05	2,92	
	1,2	23,20	13,8	3,19	

7. Hydraulische Ähnlichkeit der Spaltströmung

Bisher standen ausschliesslich die Gesetze der geometrischen Ähnlichkeit der elastizitätsbedingten Deformationen und Spaltänderungen zur Diskussion. Es sei aber auch auf die hydraulische Ähnlichkeit bzw. das Modellgesetz der Spaltströmung verwiesen, wonach das Spaltspiel s von Modell und Anlage in der gleichen Beziehung zur Grenzschichtdicke ϑ stehen soll [2].

$$\left(\frac{s}{\vartheta}\right)_{Mod} = \left(\frac{s}{\vartheta}\right)_{Anl}$$

Grenzschichtdicke (Laufradmantel) und Strömungsstruktur innerhalb dieser Grenzschicht beeinflussen die Spaltströmung u. U. wesentlich. Da s meistens die Grössenordnung von ϑ hat, spielt das angegebene Verhältnis für den Spaltverlust eine wichtige Rolle.

Aus dem Ansatz für die Dicke der turbulenten Grenzschicht

$$\vartheta \simeq K x Re_x^{-0,2}$$

folgt das erwähnte Modellgesetz zu:

$$\left(\frac{s}{D_1}\right)_{Mod} = \left(\frac{s}{D_1}\right)_{Anl} \left(\frac{H_{Anl.}}{H_{Mod}}\right)^{0,1} \left(\frac{D_{1 Anl.}}{D_{1 Mod}}\right)^{0,2} \left(\frac{v_{Mod}}{v_{Anl}}\right)^{0,2}$$

Die hydraulische Ähnlichkeit erfordert – sofern $Re_{Mod} < Re_{Anl}$ – einen grösseren bezogenen Spalt der Modellturbine. Der betreffende Unterschied zur geometrischen Ähnlichkeit ist:

$$(14) \quad \left(\frac{\Delta s}{D_1}\right)_{HG} = \left(\frac{s}{D_1}\right)_{Anl} \left[\left(\frac{H_{Anl.}}{H_{Mod}}\right)^{0,1} \left(\frac{D_{1 Anl.}}{D_{1 Mod}}\right)^{0,2} \left(\frac{v_{Mod}}{v_{Anl}}\right)^{0,2} - 1 \right]$$

Aufgrund der hinlänglich beschriebenen Untersuchungen über die geometrische Spaltähnlichkeit darf $(s/D_1)_{Mod} = (s/D_1)_{Anl}$ als bekannt vorausgesetzt werden (vgl. Formel (6) und Tabellen 2 und 3). Nachdem aus diesen Unterlagen auch das Fallhöhen- bzw. Re -Verhältnis hervorgeht, ist $(\Delta s/D_1)_{HG}$ mit Formel (14) bestimmbar.

Wird hydraulische Spaltähnlichkeit bei der Modellturbine gefordert, so muss zum bereits errechneten Nullspalt $(\Delta s/D_1)_{HG}$ addiert werden

$$\left(\frac{s_0}{D_1}\right)_{Mod}^* = \left(\frac{s_0}{D_1}\right)_{Mod} + \left(\frac{\Delta s}{D_1}\right)_{HG}$$

Abschliessend sei vermerkt, dass die hydraulische Spaltähnlichkeit in der Praxis meistens unbeachtet bleibt. Ohne ein Werturteil abzugeben, sollte im Rahmen dieses Beitrages lediglich auf einen weiteren Aspekt der Modellähnlichkeit aufmerksam gemacht werden.

Bezeichnungen

Zeichen	Dimension
D_1 Nenndurchmesser des Laufrades	[m]
$R_1 = \frac{D_1}{2}$	[m]
s Spaltweite	[m]
H Fallhöhe	[m]
$\Delta p = H \gamma_{St}$	[kp m ⁻²]
n Drehzahl	[min ⁻¹]
Q_{11} spez. Volumenstrom $Q_{11} = \frac{Q}{D_1^2 H}$	[m ^{1/2} s ⁻¹]
Ku_1 spez. Umfangsgeschwindigkeit $Ku_1 = \frac{n \pi D_1}{60 (2g H)^{1/2}}$	[PS ^{-1/2} · min ⁻¹ · n ^{-5/4}]
n_s spez. Drehzahl	
σ Kavitationsbeiwert	
Re Reynoldssche Zahl	
ν kinematische Zähigkeit	[m ² s ⁻¹]
γ spez. Gewicht	[kp m ⁻³]
g Erdbeschleunigung	[m s ⁻²]

Tabelle 3. Beispiele zur Bestimmung der relativen Spaltweite $\left(\frac{s_0}{D_1}\right)_{\text{Mod}}$ bei vorgegebener Modellfallhöhe (Anwendung b).

Daten der Grossanlage:

$$D_1 = 1,1 \text{ m}; H = 44 \text{ m}; n = 428,6 \text{ U/min}; \frac{s_0}{D_1} = 2,36 \cdot 10^{-3}; \gamma_{St} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kp/cm}^3$$

Laufwerkstoff: Al-Bz; Materialkonstante siehe Tabelle 1

$$\text{Dimensionslose Kennziffern}^* C_F = 51,7; C_K = 1000 \cdot \frac{Q_{11}}{Q_{11 \wedge}}; A = \frac{C_K}{C_F} = 19,35 \cdot \frac{Q_{11}}{Q_{11 \wedge}}$$

* Bei Modell und Anlage gleich, sofern Ku_1 und Q_{11} gleich sind.

Daten der Modellturbine bzw. des Laufrades	$\frac{Q_{11}}{Q_{11 \wedge}}$	A	$AC_2 \text{ Mod-1}$	$\frac{\Delta s_0}{D_1}$	$\left(\frac{s_0}{D_1}\right)_{\text{Mod}}$	Bemerkungen
Werkstoff: Al-Bz $H_{\text{Mod}} = 20 \text{ m}$ Strömungsmedium Wasser	0,6	11,62	0,532	$0,629 \cdot 10^{-3}$	$2,99 \cdot 10^{-3}$	$\left(\frac{s_0}{D_1}\right)_{\text{Mod}}$ ändert sich je nach Beaufschlagung. Da der Spalt aus praktischen Gründen nicht für jeden Betriebspunkt neu angepasst werden kann, wird am besten vom Mittelwert im wichtigsten Bereich $\frac{Q_{11}}{Q_{11 \wedge}}$ ausgegangen. (Kompromiss)
	0,8	15,50	1,04	$1,225 \cdot 10^{-3}$	$3,58 \cdot 10^{-3}$	
	1,0	19,35	1,55	$1,83 \cdot 10^{-3}$	$4,19 \cdot 10^{-3}$	
	1,2	23,20	2,06	$2,43 \cdot 10^{-3}$	$4,79 \cdot 10^{-3}$	
Werkstoff: Glasfaserverstärktes Epoxydharz $H_{\text{Mod}} = 4,4 \text{ m}$ Strömungsmedium Wasser	0,6	11,62	6,26	$-1,69 \cdot 10^{-3}$	$0,67 \cdot 10^{-3}$	$\left(\frac{s_0}{D_1}\right)_{\text{Mod}}$ ist vorteilhafterweise konstant. Versuche können mit $H_{\text{Mod}} = 4,4 \text{ m}$ bei ausreichenden Re-Zahlen und Schaufelbeanspruchungen durchgeführt werden. Bei Kavitationsuntersuchungen sind Probleme der Luftausscheidungen u. U. zu beachten.
	0,8	15,50	8,70	$-1,69 \cdot 10^{-3}$	$0,67 \cdot 10^{-3}$	
	1,0	19,35	11,10	$-1,69 \cdot 10^{-3}$	$0,67 \cdot 10^{-3}$	
	1,2	23,20	13,50	$-1,69 \cdot 10^{-3}$	$0,67 \cdot 10^{-3}$	
Werkstoff: Glasfaserverstärktes Epoxydharz $\Delta p = 250 \text{ kp/m}^2$ $H = \frac{\Delta p}{\gamma_{St}} = 198,5 \text{ m}$ Strömungsmedium Luft mit $\gamma_{St} = 1,26 \text{ kp/m}^3$	0,6	11,62	-1	$21,65 \cdot 10^{-3}$	$24,01 \cdot 10^{-3}$	Hohe Umfangsgeschwindigkeiten bzw. Drehzahlen und entsprechende Spaltänderung durch Fliehkraftwirkung $\frac{\Delta s_F}{D_1}$ erfordern extreme Nullspalte. Die Beanspruchungen wären zu gross. Luftversuche sind unter solchen Voraussetzungen nicht durchführbar. (Beachte Hooke'sches Gesetz)
	0,8	15,50		$22,75 \cdot 10^{-3}$	$25,11 \cdot 10^{-3}$	
	1,0	19,35		$23,85 \cdot 10^{-3}$	$26,21 \cdot 10^{-3}$	
	1,2	23,20		$24,95 \cdot 10^{-3}$	$27,31 \cdot 10^{-3}$	
Werkstoff: Silumin $\Delta p = 125 \text{ kp/m}^2$ $H = \frac{\Delta p}{\gamma_{St}} = 99,2 \text{ m}$ Strömungsmedium Luft mit $\gamma_{St} = 1,26 \text{ kp/m}^3$	0,6	11,62	-1	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$5,36 \cdot 10^{-3}$	Obige Kriterien treffen in etwas vermindertem Umfange gleichfalls zu. Luftversuche mit Francisturbinen dieser Bauart sind offenbar unzweckmässig, da fliehkraftbedingte Biegebeanspruchungen (exzentrischer Zug) extreme Deformationen und Spaltänderungen $\frac{\Delta s_F}{D_1}$ bewirken.
	0,8	15,50		$4,1 \cdot 10^{-3}$	$6,46 \cdot 10^{-3}$	
	1,0	19,35		$5,2 \cdot 10^{-3}$	$7,56 \cdot 10^{-3}$	
	1,2	23,20		$6,3 \cdot 10^{-3}$	$8,66 \cdot 10^{-3}$	

ρ	Dichte	$[\text{kg m}^{-3}]$
E	Elastizitätsmodul	$[\text{kp cm}^{-2}]$
σ_Z	Zugspannung	$[\text{kp cm}^{-2}]$
C_1	Werkstoffkonstante $C_1 = \gamma_W/E$	$[\text{cm}^{-1}]$
C_2	Dichteverhältnis $C_2 = \gamma_{St}/\gamma_W$	
C_K	Beiwert für hydrodynamische Kraftwirkung	
C_F	Beiwert für Fliehkraftwirkung	
A	Verhältnis der Beiwerte $A = C_K/C_F$	

Indices

Mod	Modell
Anl	Anlage
St	Strömungsmedium
W	Werkstoff
K	hydrodynamische Kraftwirkung
F	Fliehkraftwirkung
o	Ruhezustand der Turbine

\wedge Punkt besten Wirkungsgrades
HG Unterschied des bezogenen Spaltes bei hydraulischer zu geometrischer Betrachtungsweise

Adresse der Verfasser: Jörg Osterwalder, Dipl.-Ing., o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt und Direktor des Institutes für Hydraulische Maschinen und technische Strömungslehre und Peter Gast, Dipl.-Ing., Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen der Technischen Hochschule Darmstadt, D-6100 Darmstadt, Magdalenenstrasse 8-10.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Fauconnet: «Die Erhaltung des Wirkungsgrades von Wasserturbinen in offenen Laufrädern». Vorabdruck zum IAHR-Symposium, Aufsatz H₂ 1/1, Lausanne (Okt. 1968).
- [2] M. Strscheletzky: «Spaltverlust bei axialen Strömungsmaschinen, insbesondere bei Kaplan-Turbinen». «Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Bd. 21, (1955) H. 4, S. 101-106.