

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 87 (1969)  
**Heft:** 38: 100 Jahre GEP

**Artikel:** Alte und neue Probleme der Anfachung von Gasschwingungen  
**Autor:** Rott, N.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-70779>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Dies entspricht der Zone VI «Hauptverkehrsader». Würden keine Lastwagen verkehren, aber gleichviele Personenwagen (3000 pro Stunde), so erhielte man einen  $Q$ -Wert von 64 dB, was etwa der Geschäftszone entsprechen würde. Die Lärmbelastung hängt also in sehr starkem Mass vom Lastwagenverkehr ab, was durchaus mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

#### Schlussbemerkung

Das angegebene Berechnungsverfahren mit der Summation der Schallenergiedichte ist für den lebhaften Strassenverkehr berechtigt, da stets viele unkorrelierte Schallquellen (Fahrzeuge) den Momentanwert der Schallintensität erzeugen. Die Mittelwertbildung über die gesamte Energiedichte in der Zeit  $T$ , also die Summierung der Energiedichten der einzelnen durchfahrenden Fahrzeuge ist auch deshalb zulässig, weil in etwa gleicher Entfernung von der Strasse, wie der mittlere Abstand der Fahrzeuge beträgt, die Schallintensitäts-

schwankungen relativ klein sind. Gerade für starken Verkehr eignet sich die Methode gut. Einige Unsicherheit bringen die Annahmen über die Lautstärkeentwicklung der einzelnen Fahrzeugtypen mit sich. Es ist aber ohne weiteres möglich, durch entsprechende Messungen und Zählungen an Autobahnen die notwendigen Unterlagen zu gewinnen.

#### Literatur:

- [1] Koppe, E., K. Matschat und E. A. Müller: «Acustica» 16 (1965/66), Heft 4, S. 251.
- [2] Lärmbekämpfung in der Schweiz. Bericht der Eidg. Expertenkommission an den Bundesrat, 1963, S. 62.

Adresse des Verfassers: Prof. Heinrich Weber, Institut für Fernmeldetechnik und Laboratorium für Elektroakustik der ETHZ, Sternwartstr. 7, 8006 Zürich.

## Alte und neue Probleme der Anfachung von Gasschwingungen

Von Prof. Dr. N. Rott, ETH Zürich

DK 534.14:534-13

### 1. Einleitung

Eines der lästigen Probleme des Raumzeitalters sind die Gasschwingungen, welche in Raketenmotoren vorkommen können. Diese Schwingungen werden durch thermische Effekte erregt; es ist die Temperatur- und Druckabhängigkeit der Verbrennung und damit der Wärmeerzeugung, welche die Anfachung von gewissen akustischen Schwingungsformen bewirkt. Die Zahl dieser möglichen Formen ist gross, denn es können zum Beispiel Schwingungen mit umlaufender Phase vorkommen, bei denen sozusagen eine spiralförmige Fortpflanzung der akustischen Störung stattfindet. Die Störungen können sich von der Brennkammer weiter fortpflanzen, zunächst in die Brennstoffleitungen; im Flug kann eine Koppelung zwischen den Schwingungen im Schub und der ganzen Flugdynamik entstehen, wobei die auftretenden periodischen Schub- und Trägheitskräfte den ganzen Flugkörper beanspruchen.

Besonders anfällig auf derartige Störungen sind die ganz grossen Raketen, bei denen die akustische Dämpfung verhältnismässig klein ist. Erleichternd wirkt sich aber der Umstand aus, dass die Beanspruchungen nur während der kurzen Lebensdauer der Raketen ausgehalten werden müssen und deshalb noch innerhalb von vergleichsweise weiten Grenzen toleriert werden können.

Diese aktuellen Probleme haben auch das Interesse an gewissen altbekannten akustischen Erscheinungen neu belebt, bei denen auch eine thermische Anfachung stattfindet, aber keine Verbrennung; statt einer «inneren» Wärmequelle kann dem Gas Wärme von aussen zugeführt werden. Solche Effekte sollten eigentlich genau vorausgerechnet werden können, wenigstens in der linearen akustischen Näherung; auch sind sie in langen Rohren beobachtet worden, die einfacher zu behandeln sind als «Hohlräume». Es ist deshalb überraschend, dass bisher nur zwei dieser altbekannten Erscheinungen eine vollständige quantitative theoretische Lösung erhalten haben, und dazu erst in neuester Zeit; über diese soll hier berichtet werden ohne auf eine weitere Diskussion des erstgenannten Problems in den Raketen einzugehen.

Bevor die Probleme der Anfachung angegriffen werden, sei ein kurzer Überblick der klassischen Theorie der Dämpfung von akustischen Schwingungen in Rohren gegeben.

### 2. Die akustische Dämpfung in Rohren

#### A. Historische Übersicht

Die Theorie der Dämpfung von Schallwellen in Rohren beginnt mit H. v. Helmholtz, der im Jahre 1863 eine Formel veröffentlicht hatte, welche die Dämpfung durch die Reibung an den Rohrwänden erfasst. Allerdings hat Helmholtz den Weg zu seiner Formel nicht angegeben; Lord Rayleigh hat später in seinem berühmten Werk, «The Theory of Sound», unter der Annahme einer dünnen Reibungsschicht («Grenzschicht») an der Wand, eine Herleitung der Helmholtzschen Formel durch eine Impulsbilanz gegeben.

Nun aber ist die Dämpfung von Schallwellen im Rohr nicht nur durch die Reibung an der Wand, sondern zu etwa gleichen Teilen auch durch Wärmeleitung zur Wand verursacht. Dieser Effekt, von R. Kundt zunächst vermutet, wurde theoretisch durch die klassische Abhandlung von G. R. Kirchhoff erfasst, die im Jahre 1868 (in «Poggen-

dorffs Annalen») erschienen ist und die die Grundlage der Theorie der akustischen Dämpfung bildet. Entsprechend ihrer Bedeutung hat Rayleigh eine sehr ausführliche Darstellung dieser Arbeit in sein Buch aufgenommen.

Die Kirchhoffsche Theorie ist «exakt» in dem Sinne, dass die linearen akustischen Gleichungen ohne weitere Vernachlässigung von Reibungs- und Wärmeleitungsgliedern für beliebige Rohrweiten- und -längen gelöst wurden. Ein grosser Teil der Literatur über akustische Dämpfung beschäftigt sich mit der expliziten Auswertung von Sonderfällen der Kirchhoffschen Theorie.

Ein wichtiger Sonderfall ist der von Helmholtz behandelte, bei dem die Reibungsgrenzschicht dünn gegenüber dem Rohrdurchmesser angenommen wird. Da für Gase bekanntlich die Dicken von Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschichten von gleicher Grössenordnung sind, kann auch die Kirchhoffsche Theorie auf diesen Sonderfall angewendet werden. Hierfür kann man von den fertigen Endergebnissen von Kirchhoff ausgehen und die gewünschten mathematischen Grenzfälle herleiten; es ist aber auch möglich, von Anfang an die Theorie im Sinne der Grenzschichtvereinfachungen aufzubauen. Der zweite Weg ist für den modernen Aerodynamiker, der in der von Ludwig Prandtl im Jahre 1904 geschaffenen Grenzschichttheorie gut geschult ist, besonders naheliegend. Da das Kirchhoffsche Problem linear ist, wird (und wurde zunächst historisch) die Grenzschichttheorie nicht benötigt; ihre Verwendung hat aber den Vorteil, dass sie einen sehr guten Einblick in den Dämpfungsmechanismus gewährt. Eine kurze Übersicht der wesentlichen Gedanken einer «schrittweisen Näherung» durch die Grenzschichttheorie sei nun gegeben.

#### B. Grenzschichttheorie

*Schritt 1:* Zunächst werden alle Effekte der Reibung und der Wärmeleitung vernachlässigt. Wir betrachten als Ausgangslösung der wohlbekannten akustischen Wellengleichung den Spezialfall einer stehenden periodischen Welle. Es sei ein Rohr der Länge  $L$  angenommen mit einem offenen Ende bei  $x = 0$ , während das andere Ende (bei  $x = L$ ) geschlossen sei. Die (axiale) akustische Geschwindigkeit  $u_a$  verschwindet für  $x = L$ , während für  $x = 0$  die Grenzbedingung gilt, dass der akustische Druck  $p_a$  (d. h. die Druckdifferenz gegen die Atmosphäre) verschwindet. Die Grössen  $u_a$  und  $p_a$  im Rohr sind durch die Formeln

$$(1) \quad u_a = u_0 \cos(\omega x/a) \cos \omega t \quad \text{und}$$

$$(2) \quad p_a = \rho a u_0 \sin(\omega x/a) \sin \omega t$$

gegeben, wobei  $\rho$  die Dichte und  $a$  die Schallgeschwindigkeit im Gas bedeuten;  $u_0$  ist die Geschwindigkeitsamplitude für  $x = 0$ , und die Kreisfrequenz  $\omega$  ist

$$(3) \quad \omega = \frac{\pi a}{2L}$$

In der heute allgemein üblichen Schreibweise für zeitlich periodische Lösungen wird ein komplexer Zeitfaktor  $e^{i\omega t}$  angenommen und nach Übereinkunft nicht mehr ausgeschrieben; der Realteil der Lösung ist die physikalische Grösse. Demnach wären die Formeln (1) und (2) zu ersetzen durch:

$$(4) \quad u_a = u_0 \cos(\omega x/a)$$

$$(5) \quad p_a = -i \rho a u_0 \sin(\omega x/a)$$

*Schritt 2:* Die Geschwindigkeit  $u_a$  genügt nicht der physikalischen Randbedingung des «Haftens» an der Wand; sie ist vom Radius  $r$  unabhängig, sollte aber für  $r = R$  verschwinden. Die Geschwindigkeit  $u_g$  in der wandnahen Reibungsschicht genügt nach Stokes der Differentialgleichung:

$$(6) \quad \frac{\partial (u_g - u_a)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_g}{\partial z^2}$$

wobei  $\nu$  die kinematische Zähigkeit ist; die Koordinate  $z = R - r$  (Abstand von der Wand) ist hier benützt worden. Für diese Näherung muss die Grenzschicht so dünn sein, dass die ebene Abwicklung der zylindrischen Rohrwand der Rechnung zugrunde gelegt werden kann.

Gleichung (6) wird nun gelöst unter der Annahme, dass für grosse Wandabstände  $u_g = u_a$  ist, während an der Wand  $z = 0$  die Haftbedingung  $u_g(0) = 0$  erfüllt wird. Die Lösung lautet, mit Benützung der vorhin eingeführten komplexen Schreibweise:

$$(7) \quad u_g = u_a \left( 1 - e^{-(1+i) \sqrt{\omega/2\nu} z} \right)$$

Nach diesem Resultat hat die Dicke der Grenzschicht die Grössenordnung  $\sqrt{\nu/\omega}$ , und dies gestattet a posteriori die Bestätigung der Bedingungen, unter denen diese Approximation zulässig ist. Für Luft (bei Raumtemperatur) zum Beispiel ist  $\nu = 0,15 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , und für eine Rohrlänge von 1 m gibt die Gleichung (3) den Wert  $\omega = 640 \text{ s}^{-1}$ ; damit hat die Grenzschichtdicke die Grössenordnung von  $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ . Solange die so berechnete Dicke wesentlich kleiner ist als der Radius  $R$  des Rohres, ist die Näherung sehr gut.

Für den Druck gilt in der für die Grenzschichttheorie grundlegenden Näherung, dass keine Änderung gegenüber dem von aussen «aufgeprägten» Wert  $p_a$  auftritt, also ist

$$(8) \quad p_g = p_a$$

Anders verhält es sich mit der Temperatur. Ausserhalb der Grenzschicht folgt die Temperaturschwankung der Druckschwankung isentropisch; die Wand selbst mit ihrer viel grösseren Wärmekapazität wird aber diesen Schwankungen nur wenig folgen. In der Tat wird man in guter Näherung die Wand als isotherm annehmen dürfen, ein Ergebnis, das allen sofort einleuchtet wird, die sich an die Rechnungen über die Temperaturschwankungen in der Zylinderwand für Verbrennungsmotoren erinnern. (Es zeigt sich, dass diese Schwankungen nur einen sehr kleinen Bruchteil der Gastemperaturänderung betragen.) Die Temperaturgrenzschicht genügt einer Gleichung ähnlich wie (6) und hat eine Lösung analog zu (7). Unter Benützung der Gleichung (8) sind dann auch die Dichtefluktuationen in der Grenzschicht bekannt.

*Schritt 3:* Bisher sind weder im akustischen «Kern» noch in der Grenzschicht radiale Geschwindigkeitskomponenten in Betracht gezogen worden. Es zeigt sich aber, dass mit der Grenzschichtlösung (7) eine radiale Geschwindigkeit verbunden ist, welche nun nachträglich aus der Kontinuitätsgleichung berechnet werden kann. Das Ergebnis soll im Grenzfall  $z \rightarrow \infty$  angegeben werden: am «Rande» der Grenzschicht – aber auch noch ausserhalb des akustischen Kernes – findet man die Radialgeschwindigkeit  $v$

$$(9) \quad v_g(\infty) = -(1-i) \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} \frac{du_a}{dx}$$

Nun werden aber die Dichteschwankungen wegen Wärmeleitung in der Grenzschicht auch kleine Vertikalgeschwindigkeiten erzeugen; man findet auch dann noch, dass der totale Wert von  $v_g(\infty)$  (positiv nach aussen) die gleiche Form hat wie (9), nur erhält die Gleichung einen weiteren Faktor, der diese Effekte berücksichtigt. Dieser Faktor ist nach der Theorie von Kirchhoff

$$(10) \quad k = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\sigma}}$$

wobei  $\gamma = c_p/c_v$  den Adiabatenexponenten und  $\sigma$  die Prandtl'sche Zahl<sup>1)</sup> bedeuten (für Luft etwa gleich 0,71). Durch Einsetzen von  $u_a$

<sup>1)</sup>  $\sigma = \nu/a = \eta c_p g/\lambda$  mit  $\nu$  kinemat. Zähigkeit;  $a = \lambda/c\gamma$  Temperaturleitzahl;  $\eta$  dynam. Zähigkeit;  $\lambda$  Wärmeleitzahl.

nach (4) in (9) und unter Berücksichtigung des Faktors  $k$  wird

$$(11) \quad v_g(\infty) = (1-i) k \sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} \frac{u_0}{a} \sin(\omega x/a)$$

Die Amplitude von  $v_g(\infty)$  ist für dünne Grenzschichten viel kleiner als die von  $u_a$ , zum Beispiel mit den weiter oben angegebenen Zahlen etwa 4% von  $u_a$ .

*Schritt 4:* Die Radialgeschwindigkeit nach (11) wird als Randbedingung für eine Neuberechnung der akustischen Schwingung benützt, die jetzt in einem Rohr mit einer sozusagen «nachgiebigen» Wand zu bestimmen ist. Diese Nachgiebigkeit ist also durch den Grenzschichteffekt gegeben; man findet, dass eine kleine pulsierende Radialgeschwindigkeit am Rande eines langen Rohres nur die einfachste Form der akustischen Radialbewegung erregt, bei der  $v$  proportional zu  $r$  wächst; also ist

$$(12) \quad v_a = \frac{r}{R} v_g(\infty)$$

Mit diesem  $v_a$  als «Störungsglied» muss nun  $u_a$  und  $p_a$  neu berechnet werden, womit der erste «Zyklus» dieser Rechenmethode geschlossen ist. Mit einem bekannten Störungsglied führt die Aufgabe zu einer inhomogenen Wellengleichung; diese kann mit Hilfe der Variation der Konstanten gelöst werden. Die neuen korrigierten Werte  $u_{ak}$  und  $p_{ak}$  rücken anstelle von (4) und (5), und diese sind die Ausgangswerte für Schritt 5, was einer Wiederholung von Schritt 2 (Grenzschichtrechnung) entspricht (usw.).

Die Lösungen  $u_{ak}$  und  $p_{ak}$  zeigen nun die Dämpfung explizit. Statt aber die etwas langen Ausdrücke auszuschreiben, soll im nächsten Abschnitt die Dämpfung aus den bisherigen Ergebnissen berechnet werden.

Rückblickend sei darauf hingewiesen, dass die «Grenze» der Gültigkeitsbereiche für die akustische Lösung (Index  $a$ ) und der Grenzschicht (Index  $g$ ) sehr approximativ behandelt worden ist: der asymptotische Wert der Grenzschichtlösung ist ja schon bei einem «unendlichen» Wert von  $z$  erreicht, der nur wenige Vielfache von  $\sqrt{\nu/\omega}$  beträgt, und vom Standpunkt der akustischen Lösung ist dies von der Wand  $r = R$  kaum zu unterscheiden. Bei der Berechnung von höheren Näherungen muss auch diese Frage der gegenseitigen Abgrenzung der Gebiete genauer betrachtet werden. Dies und andere Gründe lassen den Rechenaufwand mit dem Grad der Näherung stark anwachsen.

Die bisherigen Schritte sind aber alle elementar gewesen, besonders da auf die Ausrechnung der Wärmeleitungseffekte verzichtet worden ist; für die Helmholtz'sche Näherung ( $k = 1$ ) sollte es keine Mühe machen, die Zwischenrechnungen für die oben gemachten Angaben durchzuführen.

### C. Die Dämpfung

Statt der Ausrechnung von  $u_{ak}$  und  $p_{ak}$  soll eine Energiebetrachtung durchgeführt werden, welche eine besonders anschauliche Interpretation des Dämpfungseffektes gestattet. Der Schlüssel liegt in der Betrachtung des Energieflusses zwischen dem akustischen Kern und der Grenzschicht. An der «Grenze» zwischen diesen Regionen herrscht ja die Geschwindigkeit  $v_g(\infty)$  und der Druck  $p_a (= p_g)$ . Wenn an dieser Grenze ein Kolben eingeführt wäre, der die Arbeit pro Zeit- und Flächeneinheit messen könnte, so würde dieser die momentane Leistung  $p_a v_g(\infty)$  indizieren. Die wichtige mittlere Leistung wird durch Integration über viele Perioden bestimmt; ein nicht verschwindender Mittelwert lässt sich finden, wenn gleichphasige Komponenten von  $p_a$  und von  $v_g(\infty)$  existieren. Ein Vergleich der Gleichungen (5) und (11) zeigt, dass es in der Tat solche Komponenten gibt; die Phase von  $p_a$  ist durch Faktor  $-i$  fixiert, und ein gleichartiger Anteil ist in (11) zu finden. Zeitliche Mittelung über viele Perioden ergibt bekanntlich einen Faktor 1/2, so dass pro Längeneinheit des Rohres für den in die Grenzschicht einströmenden Energiefluss  $E_x$  gefunden wird:

$$(13) \quad \begin{aligned} E_x &= 2 \pi R \overline{p_a v_g(\infty)} = \\ &= \pi R k \rho u_0^2 \sqrt{\nu\omega/2} \sin^2(\omega x/a) \end{aligned}$$

In der ursprünglich angenommenen, ungedämpften stehenden akustischen Welle findet axial kein Energiefluss statt, denn Gleichungen (4) und (5) wie auch (in reeller Form) (1) und (2) zeigen, dass  $p_a$  und  $u_a$  vollständig ausser Phase sind, das heisst, dass:

$$(14) \quad \overline{p_a u_a} = 0$$

Für die nach Schritt 4 korrigierten Werte würde allerdings die folgende Energiebilanz gelten:

$$(15) \quad \frac{d}{dx} (\pi R^2 \overline{p_{ak} u_{ak}}) = E_x$$

Damit ist das Dämpfungsproblem grundsätzlich gelöst und soll hier weiter nicht verfolgt werden. Die Energie wird in der Grenzschicht durch Dissipation in Wärme verwandelt, deren Ablauf erst durch die Lösung des «sekulären» (d. h. über sehr viele Perioden sich erstreckenden) Wärmeleitproblems im Gas, in der Wand und in der Umgebung gefunden werden kann.

Es ist klar, dass Dämpfungsschätzungen mit Benützung der Dissipation nicht einmal die richtige Grössenordnung geben können, wenn die Grenzschichtstruktur – der Hauptsitz der Dissipation – nicht berücksichtigt wird. Im Rohr spielen die achsialen Reibungs- und Wärmeleitungseffekte, welche die Dämpfung von Schallwellen in der freien Atmosphäre bestimmen, eine vernachlässigbare Rolle. Ausnahmen sind Gase mit grossen Relaxationseffekten, in denen die freie Ausbreitung schon sehr gedämpft ist. Auch für äusserst hohe Amplituden der Schwingungen, bei denen statt der akustischen Approximation das Auftreten von Stössen zu berücksichtigen ist, wird der Beitrag der achsialen Gradienten zur Dämpfung wichtig.

### 3. Das Rijke-Rohr

Eines der frühesten Beispiele von thermisch angefachten akustischen Schwingungen ist vom Holländer *P. L. Rijke* 1859 beschrieben worden; seine Entdeckung ist besonders durch die im Buch von Lord *Rayleigh* gegebene Beschreibung bekannt. Die Schwingung findet man in einem vertikalen, beidseitig offenen Rohr, in dessen Inneren in der Nähe der Viertellänge, von unten gerechnet, ein Heizelement angebracht ist. Praktisch benützt man heute zum Beispiel eine elektrisch geheizte Metallgaze, die quer durch das Rohr gespannt ist. Dr. *H. Sprenger* am Institut für Aerodynamik hat einfach ein Föhn-Heizelement in ein Glasrohr gesteckt.

Es entsteht eine laute Schwingung, für deren Grundfrequenz die Formel (3) nur verwendet werden darf, wenn die Länge des Rijke-Rohres gleich  $2L$  gesetzt wird. Beim beidseitig offenen Rohr kann für die Grundschwingung aus Symmetriegründen die Grenzbedingung des geschlossenen Rohres in der Mitte verwendet werden. Natürlich verursacht das Heizelement auch einen kleinen «Gleichstrom» der Luft nach oben durch den Kamineffekt. Die Überlagerung des Gleichstromes mit der periodischen akustischen Geschwindigkeit bewirkt, dass die Wärmeübertragung an das Gas mit der Hin- und Herbewegung der Luft nicht symmetrisch ist, was sich für den Effekt als ausschlaggebend wichtig erweist. Es ist ohne weiteres klar, dass bei der Bewegung nach oben, wo der überlagerte Luftzug kühles Gas von unten bringt, mehr Wärme an die Luft übertragen wird als bei der Rückbewegung, wobei schon vorgewärmtes Gas durch das Heizelement strömt.

Um eine quantitative Theorie dieses Effektes zu geben, braucht man vor allem eine rationale theoretische Erfassung der Wirkung des Heizelementes. In einem im Jahre 1954 veröffentlichten Artikel hat *G. F. Carrier* [1] eine solche Theorie gegeben, und zwar für ein Heizkörpermodell, welches aus vielen vertikalen Lamellen besteht. Carrier konnte mit Hilfe von Näherungen, die sich für die relativ einfache Geometrie der Strömung verwenden liessen, das Wärmeübertragungsproblem lösen. Es sei bemerkt, dass die experimentelle Untersuchung von Heizelementen im nichtstationären Strom gar nicht einfach ist; ein «quasistationärer» Versuch kann nicht verwendet werden. Übrigens ist das Carriersche Heizelement auch «praktisch» und ist von ihm und seinen Mitarbeitern in Versuchen verwendet worden. (Leider bezieht sich das Wort «praktisch» nur auf den reinen Effekt, denn eine Nutzenanwendung des Rijke-Rohres existiert noch nicht.)

Nach der Carrierschen Theorie denkt man sich das Heizelement (welches relativ zum Rohr sehr kurz angenommen wird) zunächst durch zwei Kontrollflächen vom übrigen Rohr abgegrenzt. In den beiden Rohrteilen wird die Schwingung gedämpft, und die Dämpfung ist bekannt; die Überlagerung des Gleichstromes kann als Korrekturglied berücksichtigt werden, wie auch die Verschiedenheit der Schallgeschwindigkeiten in den beiden Rohrteilen, welche durch die mittlere Temperaturänderung verursacht wird.

Die Wirkung des Heizelementes wird formal dargestellt durch eine Beziehung zwischen dem akustischen Druck vor und nach dem Element (das sind die Werte in den beiden Kontrollflächen) sowie durch eine entsprechende Beziehung zwischen der Strömungsge-

windigkeit, wobei jetzt die akustische Komponente der Grundschwingung herausgegriffen werden soll. Die Werte an der unteren bzw. oberen Kontrollfläche seien durch die Indices 1 und 2 gekennzeichnet. Carrier findet, dass in erster akustischer Näherung das Heizelement den Druck unverändert lässt:

$$(16) \quad p_2 = p_1 = p_h$$

Die Geschwindigkeitsrelation lässt sich formell schreiben als

$$(17) \quad u_2 = F u_1,$$

wobei die Heizwirkung, welche über die Dichteänderung den Sprung in  $u$  bewirkt, durch einen Faktor  $F$  dargestellt wird, der im allgemeinen komplex ist.

Die Berechnung der vollständigen Lösung erfolgt folgendermassen: In den beiden Rohrstücken bestimmt man die gedämpften Schwingungen, das heisst nach der Grenzschichttheorie die früher diskutierten Funktionen  $u_{ak}$  und  $p_{ak}$ , aber mit unbekanntem Grenzbedingungen in den Kontrollflächen 1 und 2. Die beiden Lösungen werden mit Hilfe der Relationen (16) und (17) aneinandergesetzt, womit alle noch unbekanntem Grössen bestimmt sind. Die Gesamtschwingung kann nun, je nach dem Charakter der Grösse  $F$ , gedämpft oder angefacht sein. Die Grenze zwischen den beiden Fällen, die neutrale Schwingung, ist besonders interessant; energetisch ist dieser Sonderfall dadurch gekennzeichnet, dass die Dämpfungsenergie (das Integral über  $E_x$  nach (15)) genau durch die Zufuhr an akustischer Energie durch das Heizelement kompensiert wird. Die letztere beträgt

$$(18) \quad \Delta E_h = \overline{p_h (u_2 - u_1)}$$

Es ergibt sich die Möglichkeit, qualitative Betrachtungen über den Heizeffekt anzustellen, welche zu einer notwendigen Bedingung für angefachte Schwingungen führten: die Energie nach (18) muss positiv sein. Es kommt auf den Sprung in der Geschwindigkeit an, das heisst auf  $F$ , wobei die Überlegungen dadurch erschwert werden, dass der Imaginärteil von  $F$ , der einen Phasensprung bedeutet, besonders im Falle kleiner Dämpfung den wichtigsten Effekt hat. Den kombinierten Effekt von Phasen- und Amplitudensprung erfasst eine Regel von Rayleigh, welche folgendermassen lautet: «Eine periodische Wärmequelle wirkt anregend, wenn die Wärmezufuhr in der Phase des hohen akustischen Druckes erfolgt.» In der Tat muss die durch die Erhitzung erfolgte Ausdehnung im Heizelement mit positivem Druck verbunden sein, um Arbeit an die Schwingung zu übertragen.

Die Rayleigh-Regel erklärt, warum im Rijke-Rohr die Anfachung nur durch Heizelemente erfolgt, die in der unteren Hälfte des Rohres angebracht werden. Schon früher haben wir hervorgehoben, dass die maximale Erwärmung wegen des überlagerten «Zuges» in der Phase der nach oben gerichteten akustischen Geschwindigkeit zu finden ist. Die Grundschwingungsform des (notwendigerweise) beidseitig offenen Rijke-Rohres ist symmetrisch bezüglich der Mitte, und die Geschwindigkeit oszilliert im Gegentakt in den beiden Rohrhälften, abwechselnd der Mitte zu- und abgewendet. Nun ist es wohlbekannt und anschaulich leicht zu verstehen, dass die Phase des hohen Druckes mit der Schallbewegung gegen die Mitte in den beiden Rohrhälften verbunden ist; dies bedeutet ja eine «akustische Verdichtung» des Rohrinhaltes. Die Bewegung gegen die Mitte ist in der unteren Rohrhälfte die Bewegung nach oben, mit grosser Erwärmung, Q.E.D.

Rayleigh berichtet auch über Beobachtungen von *Bosscha*, eines Mitarbeiters von Rijke, und von *P. Riess*, auch aus dem Jahre 1859, in dem ein gekühltes Element in der oberen Rohrhälfte die einmal angefachte Grundschwingungsform aufrecht erhält, ein Ergebnis, das nach den oben gemachten Ausführungen keine weiteren Erklärungen benötigt. In neuerer Zeit hat Carrier in [1] Experimente beschrieben, in denen nicht die Grundschwingung angeregt wird, sondern eine Oberschwingung; in solchen Fällen war das Heizelement in der oberen Hälfte des Rohres wirksam. Optimal ist allerdings die Anregung der Grundschwingung in der Umgebung des unteren Viertelpunktes.

Carrier hat in [1] einen quantitativen Vergleich zwischen Theorie und Experiment durchgeführt, indem er die Temperatur des Heizkörpers berechnet und gemessen hat, bei der die Schwingungsanfachung beginnt. Damit ist die vollständige Lösung des Rijke-Problems gelungen.

### 4. Akustische Anfachung durch Temperaturgradienten

Wenn ein langes Rohr mit einem offenen Ende in ein Dewargefäss mit etwas flüssigem Helium eingeführt wird, wobei das geschlossene Ende durch den Verschluss des Gefässes herausragt,

entstehen im Rohr spontan Schwingungen mit grosser Amplitude, falls sich das offene Rohrende oberhalb des Flüssigkeitsspiegels im Gefäss befindet. Wird das Rohr tiefer in das Gefäss eingeführt, so entsteht beim Eintauchen des Rohrendes in die Flüssigkeit eine abrupte Reduktion der Schwingungsamplitude und der Frequenz; somit kann das Rohr zur Bestimmung des Pegels im Dewar benützt werden. Sonst ist allerdings die Schwingung, welche mit einem starken Wärmefluss in den Dewar verbunden ist, eine in der Kältetechnik unbeliebte Erscheinung. Diese Art von Schwingungen in Helium sind zuerst im Laboratorium von *Kammerlingh Onnes* beobachtet worden. Es gibt auch ähnliche Fälle in der Kältetechnik mit anderen Gasen, und Rayleigh berichtet über alte Erfahrungen von Glasbläsern, die in langen Rohren mit einem geschlossenen heissen Ende spontane Schwingungen beobachten. Das Gemeinsame dieser Phänomene ist der sehr grosse Temperaturgradient entlang der Rohrlänge, wobei das heisse Ende geschlossen ist. Am extremsten ist der Fall beim Heliumgefäss, wo das geschlossene Ende bei Raumtemperatur rund 300° Kelvin aufweist, gegenüber 4° K am offenen Ende (bei Atmosphärendruck). Dabei findet man den überaus grössten Teil der Temperaturänderung in dem meist wenige Zentimeter langen Rohrstück, das im Verschluss des Gefässes eingebettet ist. So ist auch die «gradientgetriebene» Schwingung in Helium-Rohrleitungen am leichtesten zu erzeugen – und am schwersten zu vermeiden. Die Frequenz der Schwingungen in Helium ist praktisch immer klein, unterhalb oder ganz nahe der Hörschwelle, da sie fast vollständig durch die niedrige Schallgeschwindigkeit im kalten Rohr (etwa 120 m/s bei 4° K) bestimmt ist.

Qualitativ kann die Anfachung mit Hilfe der Grenzschichttheorie folgendermassen erklärt werden: Denken wir an die Phase der akustischen Bewegung, die gegen das heisse Ende gerichtet ist. Die Grenzschicht wird dann gegen die wärmeren Regionen des Rohres transportiert und dehnt sich aus, erzeugt somit eine Radialgeschwindigkeit nach *innen*. Wenn nun diese Radialbewegung mit dem *hohen* Druck im Rohr verbunden ist, dann ist es diesmal die Grenzschicht, die Energie dem akustischen Kern *zuführt*! Erwärmung und Ausdehnung der Grenzschicht bei Bewegung gegen das heisse Ende muss in Phase sein mit dem hohen Druck bei Bewegung gegen das geschlossene Ende: also muss für Anfachung das geschlossene Ende heiss sein. Die Kontraktion der Grenzschicht bei der entgegengesetzt gerichteten Bewegung bei negativem akustischen Druck wirkt natürlich ebenfalls anfachend.

Eine quantitative Grenzschichttheorie dieser Erscheinung ist vom bekannten holländischen Physiker *H.A. Kramers* [2] im Jahre 1949 gegeben worden. Nach dieser Theorie kann dem dämpfenden Teil der Grenzschichtbewegung, der im Prinzip schon früher berechnet worden ist, der anfachende Teil überlagert werden. Allerdings muss der Variation der Zähigkeit mit der Temperatur Rechnung getragen werden; damit wird der dämpfende Anteil von  $v_g(\infty)$ :

$$(19) \quad v_{ga}(\infty) = -(1-i) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\sigma}} \right) \frac{d}{dx} \left( \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} u_a \right)$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich vom klassischen Ergebnis, das in den Gleichungen (9), (10) und (11) enthalten ist, nur durch das «Mit-Differenzieren» von  $\nu$  nach  $x$ . Für den treibenden Anteil findet *Kramers*:

$$(20) \quad v_{gt}(\infty) = -(1-i) \left[ \frac{1}{\sigma + \sqrt{\sigma}} - \frac{\gamma-1}{\sqrt{\sigma}} \frac{1+\beta}{2} \right] \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} \frac{1}{T_w} \frac{dT_w}{dx} u_a$$

wobei  $T_w$  die Wandtemperatur ist. Die Abhängigkeit der Zähigkeit  $\eta$  (gleich  $\nu$  mal die Dichte) ist dabei als proportional zur Potenz  $\beta$  der absoluten Temperatur  $T$  angenommen worden,  $\eta \sim T^\beta$ . Solche Gesetze sind empirisch für viele Gase gefunden worden; für Helium ist die Beziehung sehr genau mit  $\beta = 0,647$ .

Es kann gezeigt werden, dass Anfachung erfolgt, wenn die eckige Klammer in (20) – die «Kramerssche Konstante» – positiv ist. Für Helium ergibt sich aber (mit  $\gamma = 5/3$  und  $\sigma = 2/3$ ), dass die Kramerssche Konstante den Wert von etwa 0,002 hat, das heisst sie ist positiv, aber sehr klein. In der Folge findet man, dass die Theorie Temperaturverhältnisse von mehreren Tausenden fordert, um angefachte Schwingungen zu erhalten; dieses Ergebnis widerspricht der Erfahrung.

*Kramers* hat in seiner Arbeit die Vermutung ausgesprochen, dass die Theorie durch Hinzunahme von nichtlinearen Gliedern ergänzt und verbessert werden müsse. Dies würde allerdings bedeuten, dass für Amplituden, die klein genug sind, die gedämpfte lineare Lösung bis zu einem gewissen «Schwellenwert» doch noch gültig wäre; das heisst die Schwingung wäre «metastabil». Ein solches Verhalten ist theoretisch schwer zu beweisen, aber auch mit der Erfahrung anscheinend nicht in Übereinstimmung zu bringen.

Der Verfasser hat eine andere Modifikation der Kramersschen Theorie vorgeschlagen, um die Diskrepanz mit der Erfahrung zu erklären: die Berücksichtigung der Effekte, die vom Standpunkt der Grenzschichttheorie als Grössen zweiter Ordnung erscheinen. Das heisst nicht, dass die lineare akustische Approximation aufgegeben wird, sondern bedeutet die Durchführung der weiteren «iterativen» Verbesserungen der Grenzschichtrechnung, die im Abschnitt 2B angedeutet worden ist: ein zweiter «Zyklus» dieser Näherungsmethode soll vollständig durchgerechnet werden. Praktisch zeigt sich allerdings, dass diese Rechnung besser mit Hilfe einer Methode durchgeführt wird, welche etwas allgemeiner ist als die Grenzschichttheorie. Es wird die Annahme fallen gelassen, dass die Grenzschicht dünn gegenüber dem Rohrdurchmesser ist, doch wird die Vernachlässigung des radialen Druckgradienten und der axialen Diffusionseffekte beibehalten, wie sie für lange Rohre gültig ist. Es handelt sich hier um eine Variante der Dämpfungstheorie, die sich gut auf Fälle verallgemeinern lässt, bei denen die Temperatur entlang des Rohres sich ändert. Allerdings ergeben sich im allgemeinen Probleme, die analytisch nicht mehr lösbar sind. Eine Ausnahme bildet der schon von *Kramers* behandelte Sonderfall, bei dem das Rohr zwei Teile mit konstanter Temperatur aufweist, mit einem Temperatursprung dazwischen. Man betrachtet den Grenzfall, dass die Änderung über ein sehr kurzes Rohrstück stattfindet.

Es ist die Ausführung dieses Grenzüberganges, welche in Verbindung mit der Grenzschichttheorie grosse mathematische Schwierigkeiten bereitet. In der allgemeinen Theorie ist die Diskontinuität viel leichter zu erfassen; dabei ergibt sich, dass der Druck an der Temperatursprungstelle kontinuierlich ist, während die mittlere Geschwindigkeit einen Sprung erleidet, den man ausrechnen kann. Formell sind dies die Gleichungen (16) und (17), wie beim Rijke-Rohr. Auch physikalisch ähnelt der Temperatursprung in der Rohrwand, über das sich das Gas hin- und herbewegt, einem Heizelement. Der Charakter des Faktors  $F$  ist allerdings in den beiden Fällen verschieden.

Für weitere Ausführungen sei auf eine kürzlich erschienene Arbeit des Verfassers [3] verwiesen, wo auch Resultate angegeben sind. Ein mit der Erfahrung übereinstimmendes Ergebnis besagt, dass das kritische Temperaturverhältnis für Anfachung mit dem Durchmesser (genauer mit seinem Verhältnis zur Grenzschichtdicke) zunimmt, so dass für genügend dicke Rohre keine Schwingungen gefunden werden. Für diesen Grenzfall konnte eine explizite Formel angegeben werden. Es muss aber auch eine untere Grenze des Rohrdurchmessers für Schwingungen geben, deren Bestimmung auch implizit in den Resultaten enthalten ist.

Der ganze Themenkreis der thermisch angefachten akustischen Schwingungen eignet sich gut für weitere Forschung; diese wird vor allem als Grundlagenforschung klassifiziert werden können. Sie ist besonders wertvoll in Verbindung mit Zielen des Ingenieurunterrichtes, in dem die Dynamik, die nichtstationären Vorgänge usw. eine immer grössere Rolle spielen. Der Ingenieur in der Praxis wird oft überrascht durch Schwingungen in Gebilden, denen keine Schwingungsfähigkeit zugetraut worden ist. Die Analyse dieser Situationen ist eine wichtige und interessante Aufgabe, auf deren Lösung unsere Absolventen gut vorbereitet sein müssen.

#### Literaturverzeichnis

- [1] *G.F. Carrier*: The Mechanics of the Rijke Tube. «Quart. Appl. Math.» 12 (1954), S. 383.
- [2] *H.A. Kramers*: Vibrations of a Gas Column. «Physica» 15 (1949), S. 971.
- [3] *N. Rott*: Damped and Thermally Driven Acoustic Oscillations in Wide and Narrow Tubes, «ZAMP» 20 (1969), S. 230.

Adresse des Verfassers: Dr. *Nikolaus Rott*, Professor für Strömungslehre, ETH Zürich, Sonneggstrasse 3, 8006 Zürich

#### Zur Bewertung thermodynamischer Prozesse

Dieser für das vorliegende Heft vorgesehene Aufsatz von Prof. *M. Berchtold* musste wegen seines grösseren Umfanges auf ein späteres Heft verschoben werden. Red.