

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	87 (1969)
Heft:	37
Artikel:	Ein Beitrag zum Bemessungsproblem von Untertagbauten: der sekundäre Spannungs- und Verformungszustand für ein inhomogenes elastische-idealplastisches Material in der Umgebung eines unterirdischen Hohlraumes mit Verkleidung
Autor:	Kovári, K.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-70767

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ein Beitrag zum Bemessungsproblem von Untertagbauten

DK 624.19.001

Der sekundäre Spannungs- und Verformungszustand für ein inhomogenes elastisch-idealplastisches Material in der Umgebung eines unterirdischen Hohlraumes mit Verkleidung

Von Dr. sc. techn. K. Kovári, Institut für Strassen und Untertagbau der ETH Zürich

1. Einleitung

Die Beurteilung der Stabilität eines unterirdischen Hohlraumes bzw. die sichere und wirtschaftliche Bemessung der Verkleidung von Tunnel- und Stollenbauwerken erfordern eine möglichst gute Abschätzung des sekundären Spannungs- und Verschiebungszustandes im Gebirge. Nachdem man anfänglich bei den Berechnungen nur ideal elastisches Material betrachtet hatte, wurde vor allem von Kastner [1] nach praktischen Bemessungsmethoden gesucht, welche auch den plastischen Eigenschaften des Gebirges Rechnung tragen. In der nachfolgenden Arbeit wird versucht, – dem Ziel Kastners folgend – mit Hilfe der Methode der endlichen Elemente [2] ein Rechnungsverfahren zu entwickeln, welches im Sinne der Mechanik für die getroffenen Annahmen exakte Resultate liefert und zur Lösung praktischer Probleme der Tunnelstatik geeignet ist. Der anstehende Fels wird durch das mathematisch erfassbare Modell des elastisch-idealplastischen Kontinuums ersetzt. Die Zulassung von Inhomogenitäten, Vernachlässigung einer allfälligen Zugfestigkeit des Materials und Berücksichtigung des Zusammenwirkens der Verkleidung mit der Umgebung helfen, dem wirklichen Kräftespiel in der Nähe des Hohlraumes möglichst nahe zu kommen. Da aber die Zeit und Kennziffern für die Charakterisierung der Kluftsysteme in die Rechnung nicht eingehen, müssen die erhaltenen Resultate je nach dem konkret vorliegenden Fall kritisch überprüft werden.

Vor der Durchörterung herrscht im Gebirge der primäre Spannungs- und Verschiebungszustand, welcher sich aus dem Eigengewicht der Massen der Überlagerung ergibt. Allfällige tektonische Restspannungen seien vernachlässigt. Nach dem Erstellen eines Hohlraumes stellt sich der sekundäre Spannungszustand ein, welcher je nach Beschaffenheit des Materials eine Verkleidung erfordert. Man nimmt an, dass der primäre Zustand nur elastische, der sekundäre Zustand auch plastische Deformationen aufweisen können.

Um die Berechnungen zu erleichtern, wenn nicht überhaupt zu ermöglichen, beschränken wir uns auf den Fall des ebenen Verfor-

mungszustandes, welcher in den meisten Fällen der Wirklichkeit entspricht. Damit lässt sich das Problem auf die Behandlung der gelochten, inhomogenen elastisch-plastischen Scheibe zurückführen. Nach dem Prinzip von St. Venant klingen die Störungen infolge Lochwirkung mit zunehmendem Abstand von der Tunnelachse rasch ab, so dass die unendlich ausgedehnte Scheibe mit Recht für die nachfolgenden Untersuchungen durch eine Scheibe mit endlichen Abmessungen (etwa sechsfacher mittlerer Lochradius) ersetzt werden kann.

2. Die Lösung des Scheibenproblems für elastisches Material mit Hilfe der Methode der endlichen Elemente

Obwohl es in der Fachliteratur über die Methode der endlichen Elemente an guten Darstellungen [2] nicht fehlt, wollen wir zum besseren Verständnis der elastisch-plastischen Rechnungen einen kurzen Überblick über die Grundlagen bringen. In Bild 1 (linke Hälfte) ist eine gelochte Scheibe mit gegebener Belastung und Lagerung dargestellt. Wir denken uns diese Scheibe in dreieckige Elemente endlicher Abmessungen zerlegt (rechte Hälfte), wobei die einzelnen Elemente nur in ihren Eckpunkten – in gelenkigen Knoten – miteinander verbunden werden. Durch diese Zerlegung wird das Kontinuum in ein wohldefiniertes Diskontinuum mit bekannter Belastung und vorgegebener Lagerung der Knotenpunkte übergeführt. Man nimmt an, dass der Verschiebungszustand für jedes Element durch ein lineares Gesetz

$$(2.1) \quad \begin{cases} u(\bar{x}, \bar{y}) = u_i + C_1 \bar{x} + C_2 \bar{y}, \\ v(\bar{x}, \bar{y}) = v_i + C_3 \bar{x} + C_4 \bar{y} \end{cases}$$

gegeben sei (Bild 2).

Wir denken uns jeden Knoten mit Nummern versehen und für jedes Dreieck im Knoten i ein lokales Koordinatensystem (\bar{x}, \bar{y}) parallel zu einem globalen System (x, y) angebracht. Die Konstanten C_1, C_2, \dots lassen sich durch Einsetzen der lokalen Eckpunktkoordinaten (a_j, b_j, \dots) in (2.1) durch die Verschiebungen (u_i, v_i, \dots) ausdrücken. Für C_1 erhält man zum Beispiel

$$(2.2) \quad C_1 = \frac{1}{a_j b_k - a_k b_j} [u_i(b_j - b_k) + u_j b_k - u_k b_j].$$

Die Verzerrungen $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ der Elemente ergeben sich aus den bekannten Beziehungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

bei Verwendung von (2.1) als

$$(2.3) \quad \varepsilon_x = C_1, \quad \varepsilon_y = C_4, \quad \gamma = C_2 + C_3.$$

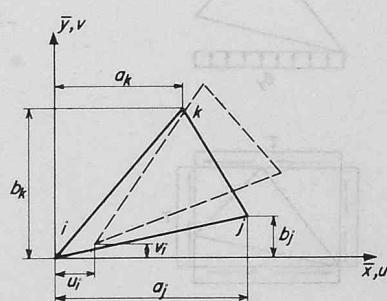


Bild 2. Das lokale Koordinatensystem

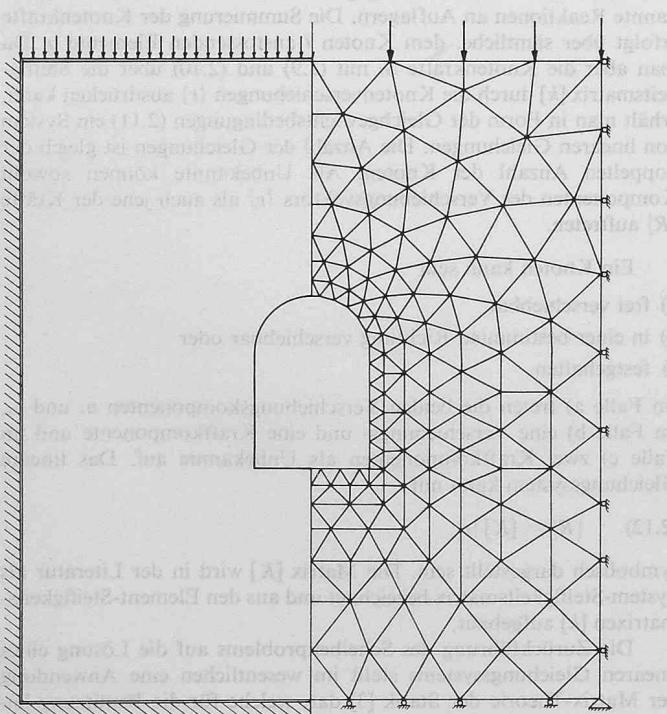


Bild 1. Die gelochte Scheibe als Kontinuum und Diskontinuum

Fasst man ε_x , ε_y und γ_{xy} als Komponenten eines Vektors $\{\varepsilon\}$ und $(u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k)$ als Komponenten eines Vektors $\{r\}$ auf, so kann man den Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Knotenverschiebungen vereinfacht wie folgt schreiben:

$$(2.4) \quad \{\varepsilon\} = [A] \{r\}.$$

Die Matrix $[A]$ erhält man aus (2.3) mit (2.2) und den entsprechenden anderen Beziehungen für C_2 , C_3 und C_4 als

$$[A] = \frac{1}{a_j b_k - a_k b_j} \begin{bmatrix} b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j & 0 \\ 0 & a_k - a_j & 0 & -a_k & 0 & a_j \\ a_k - a_j & b_j - b_k & -a_k & b_k & a_j & -b_j \end{bmatrix}.$$

Das Hooksche Gesetz für den ebenen Verschiebungszustand

$$(2.5) \quad \{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$$

verknüpft die Spannungen $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ durch die quadratische Matrix

$$(2.6) \quad [C] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$(E = \text{Elastizitätsmodul}, \nu = \text{Poissonsche Zahl})$

mit den Verzerrungen $\{\varepsilon\}$. Durch Einsetzen von (2.4) in (2.5) ist es somit möglich, den Spannungszustand $\{\sigma\}$ direkt durch die Knotenverschiebungen $\{r\}$

$$(2.7) \quad \{\sigma\} = [C][A]\{r\}$$

anzugeben.

Das angenommene Verschiebungsgesetz (2.1) gewährleistet die Kontinuität zwischen den Elementen. Somit sind die Verträglichkeitsbedingungen entlang der Seiten nicht verletzt. Da die Matrixen $[C]$ und $[A]$ in (2.7) nur konstante Glieder aufweisen, sehen wir weiter, dass auch Spannungskonzentrationen um die Eckpunkte nicht auftreten können. Vielmehr herrscht innerhalb jedes Elementes nach (2.7) ein homogener Spannungszustand. Das hier geschilderte Verfahren ist in dem Sinne eine Näherungslösung, als nur die Verträglichkeitsbedingungen, nicht aber die Stetigkeit der Spannungen gewährleistet wird. Je feiner aber die Masche der Elemente gewählt wird, umso genauer werden die Resultate.

Bild 3 zeigt den Spannungszustand eines Elementes mit positiv angenommenen Spannungskomponenten und das Dreieckelement als Bestandteil eines gedachten Rechtecks. Die Knotenkräfte $\{S\}$ bestimmen wir aus der Forderung, dass sie den Spannungen (2.7) statisch äquivalent seien. Aus Bild 4 lassen sich die Glieder der Matrix $[B]$, welche die Knotenkräfte mit den Spannungen verknüpft, ablesen.

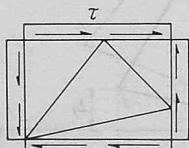
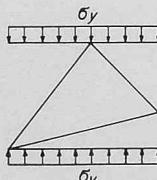
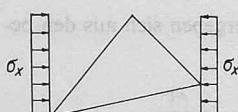


Bild 3. Spannungen

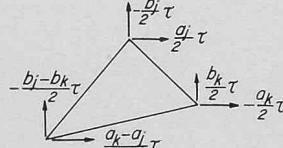
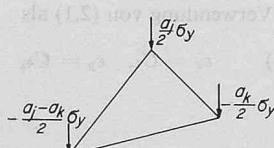
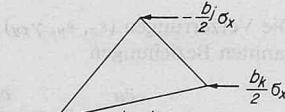


Bild 4. «Äquivalente» Knotenkräfte

$$[B] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_j - b_k & 0 & a_k - a_j \\ 0 & a_k - a_j & b_j - b_k \\ b_k & 0 & -a_k \\ 0 & -a_k & b_k \\ b_j & 0 & a_j \\ 0 & a_j & -b_j \end{bmatrix}.$$

Die Beziehung

$$(2.8) \quad \{S\} = [B]\{\sigma\}$$

liefert mit (2.7) unmittelbar den gewünschten Zusammenhang zwischen den Knotenkräften $\{S\}$ und den Knotenverschiebungen $\{r\}$:

$$(2.9) \quad \{S\} = [B][C][A]\{r\},$$

Die Durchführung der Matrix-Multiplikationen in (2.9) ergibt eine quadratische und symmetrische Matrix

$$(2.10) \quad [k] = [B][C][A],$$

welche als Steifigkeitsmatrix bezeichnet werden kann. Diese Matrix hätte auch aus rein energetischen Überlegungen ohne die Einführung der Matrix $[B]$ erhalten werden können. Als Beispiel seien die ersten Glieder ihrer ersten Zeile angegeben

$$k_{11} = \alpha \left[(1 - \nu)(b_j - b_k)^2 + \frac{1 - 2\nu}{2} (a_k - a_j)^2 \right],$$

$$k_{12} = \alpha \left[\nu (a_k - a_j)(b_j - b_k) + \frac{1 - 2\nu}{2} (a_k - a_j)(b_j - b_k) \right], \dots$$

mit der Abkürzung $\alpha = \frac{1}{a_j b_k - a_k b_j} \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$.

Ähnlich wie bei der analytischen Behandlung eines ebenen Fachwerks können auch hier je zwei Komponentenbedingungen des Gleichgewichtes für jeden Knotenpunkt i wie folgt formuliert werden:

$$(2.11) \quad \begin{cases} q \\ -\sum S_{ix} + R_{ix} = 0, \\ 1 \\ -\sum S_{iy} + R_{iy} = 0. \end{cases}$$

Die Kräfte $\{R\}$ sind entweder gegebene Lasten oder zunächst unbekannte Reaktionen an Auflagern. Die Summierung der Knotenkräfte erfolgt über sämtliche, dem Knoten i anstossenden Elemente q . Da man aber die Knotenkräfte S_i mit (2.9) und (2.10) über die Steifigkeitsmatrix $[k]$ durch die Knotenverschiebungen $\{r\}$ ausdrücken kann, erhält man in Form der Gleichgewichtsbedingungen (2.11) ein System von linearen Gleichungen. Die Anzahl der Gleichungen ist gleich der doppelten Anzahl der Knoten. Als Unbekannte können sowohl Komponenten des Verschiebungsvektors $\{r\}$ als auch jene der Kräfte $\{R\}$ auftreten.

Ein Knoten kann sein

- a) frei verschiebbar,
- b) in einer bestimmten Richtung verschiebbar oder
- c) festgehalten.

Im Falle a) treten die beiden Verschiebungskomponenten u_i und v_i , im Falle b) eine Verschiebungs- und eine Kraftkomponente und im Falle c) zwei Kraftkomponenten als Unbekannte auf. Das lineare Gleichungssystem kann mit

$$(2.12) \quad \{R\} = [K]\{r\}$$

symbolisch dargestellt sein. Die Matrix $[K]$ wird in der Literatur als System-Steifigkeitsmatrix bezeichnet und aus den Element-Steifigkeitsmatrizen $[k]$ aufgebaut.

Die Zurückführung des Scheibenproblems auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems stellt im wesentlichen eine Anwendung der Matrix-Theorie der Statik [3] dar, welche für die Benutzung leistungsfähiger elektronischer Rechenanlagen sehr geeignet ist. Es kann somit ein Computerprogramm für sämtliche Rechenoperationen und

für die übersichtliche Darstellung der Resultate aufgestellt werden. Sind einmal alle Verschiebungen nach (2.12) bekannt, so können die Spannungen nach (2.7) bestimmt und daraus die Hauptspannungen erhalten werden.

3. Die Grundlagen der Berechnung für elastisch-idealplastisches Material

3.1 Fliessbedingung

Das elastisch-idealplastische Material weist im einachsigen Spannungszustand das in Bild 5 dargestellte Spannungs-Dehnungsdiagramm auf. Die Fliessspannung σ_0 kann für Materialien mit Kohäsion aus einem Bruchversuch erhalten werden. Dem Begriff der Fliessspannung entspricht im mehrachsigen Spannungszustand jener der Fliessbedingung. Für die Felsmechanik eignet sich am besten die Mohrsche Fliesshypothese (Bild 6). Die einfachste Form der Hüllkurve ist die Coulombsche Gerade mit der Kohäsion c und dem Winkel der inneren Reibung φ . Die Einführung der Parabel nach Leon [4] als Hüllkurve schien für die Zwecke der folgenden Rechnungen nicht gerechtfertigt, da sich die Bruchhypothese nicht auf das Handstück, sondern auf das Gebirge bezieht. Eine genaue experimentelle Erfassung der Gesteinsfestigkeiten aber stößt auf erhebliche Schwierigkeiten und kann nur an einzelnen Stellen, meist an einer Ausbruchswand durchgeführt werden. In Bild 6 bedeuten σ_1 und σ_2 die Hauptspannungen in der Scheibenebene und σ_3 die Spannung, welche sich aus der verhinderten Verformung (in Richtung der Tunnelachse) ergibt.

Für das Eintreten des Fliessens kann auch σ_3 massgebend sein, da es nicht immer die mittlere Hauptspannung zu sein braucht. In diesem Falle kann man aber nicht mehr von Gleitlinien sprechen, wie es in der Bodenmechanik (ohne Berücksichtigung von σ_3) allgemein üblich ist, weil das Gleiten auf Flächen schief zur Scheibenebene erfolgen kann. Eine numerische Lösung unter Berücksichtigung von σ_3 in der Fliessbedingung mit Hilfe der Methode der endlichen Elemente hat Reys [5] angegeben. Er verwendet die von Drucker und Prager [6] erweiterte von Misessche Fliessbedingung

$$(3.1) \quad f = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} - k = 0,$$

wobei J_1 und J_2 die Grundinvarianten des Spannungstensors bzw. Spannungsdeviators und α und k Fliessparameter bedeuten. Da eine Lösung, ausgehend von (3.1), für Zwecke der Bemessungspraxis einen zu grossen Aufwand an Berechnungen bzw. an Computerzeit beansprucht, haben wir untersucht, unter welchen Bedingungen das Weglassen von σ_3 (in der Fliessbedingung) die Resultate der Rechnung nicht beeinflusst.

Aus dem ebenen Verformungszustand ergibt sich für das elastische Material

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \left[\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2) \right] = 0$$

oder

$$(3.2) \quad \sigma_3 = \nu (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Nimmt man

$$(3.3) \quad \sigma_2 \leq \sigma_1$$

an, so gilt mit (3.2)

$$\sigma_3 \leq \sigma_1$$

da $\nu \leq 1/2$ ist. Solange σ_3 die mittlere Hauptspannung, das heisst

$$(3.4) \quad \sigma_3 \geq \sigma_2$$

ist, beeinflusst sie die Fliessbedingung nicht. Setzt man (3.2) in (3.4) ein, erhält man eine obere Schranke für die Poissonsche Zahl

$$(3.5) \quad \nu \geq \frac{1}{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

Die Berührung der Coulombschen Geraden durch den grossen Spannungskreis in Bild 6 führt auf die Beziehung zwischen den Hauptspannungen

$$(3.6) \quad \sigma_2 = m\sigma_1 + b$$

mit

$$(3.7) \quad m = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad b = -2c \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

Aus (3.6) folgt

$$(3.8) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{b}{\sigma_2} \right)$$

und nach (3.7) mit $b \leq 0$ die Ungleichung

$$(3.9) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq \frac{1}{m}.$$

Setzen wir dies in (3.5) ein, so finden wir

$$\nu \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{m}}$$

oder mit (3.7)

$$(3.10) \quad \nu \geq \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi)$$

das Kriterium für die Gültigkeit eines Berechnungsverfahrens, welches die Hauptspannung σ_3 in der Fliessbedingung nicht enthält. Tabelle 1 zeigt die Zuordnung von φ zu ν_{\min} nach (3.10).

Die Zahlen für φ und ν_{\min} sind nur Richtwerte und liegen auf der sicheren Seite, da in (3.9) der Term $b/m\sigma_2$ vernachlässigt worden ist. Wenn also die Bedingung gemäss (3.10) verletzt wird, bedeutet das lediglich, dass je nach c und σ_2 für gewisse Bereiche der Scheibe die Fliessbedingung (3.6) unrichtig formuliert wird. Für den starrplastischen Körper hat Ziegler¹⁾ gezeigt, dass σ_3 immer die mittlere Hauptspannung ist.

Um nun das Materialverhalten im plastischen Bereich weiter zu diskutieren, betrachten wir die Darstellung von (3.6) in der Hauptspannungsebene. Beim Ausschluss der Zugspannungen, das heisst wenn

$$(3.11) \quad \sigma_2 \geq 0$$

ist (Bild 7), gilt nur das ausgezogene Stück der Geraden g_1 . Die Fliessbedingung wird durch \overline{OA} auf der σ_1 -Achse ergänzt. Spannungspunkte, welche nicht im schraffierten Gebiet oder auf g_1 und \overline{OA} liegen, sind nicht möglich. Für ein inkompressibles Material ($\nu = 1/2$) mit $\varphi = 0$, $c > 0$ erhält man als Sonderfall von (3.6) die bekannte Trescasche Fliessbedingung [7] für den ebenen Verformungszustand (Bild 8).

Tabelle 1.

φ°	0	10	15	20	25	30	35	40	45
ν_{\min}	0,5	0,41	0,37	0,32	0,28	0,25	0,21	0,18	0,14

¹⁾ Eine Arbeit darüber wird in «ZAMP» 5, 1969 veröffentlicht.

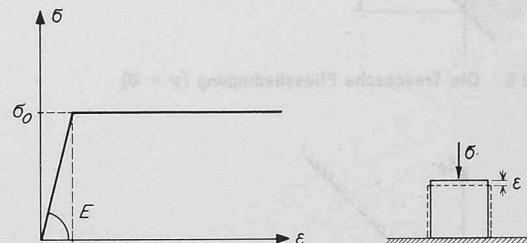


Bild 5. Das Stoffgesetz für ein elastisch-idealplastisches Material

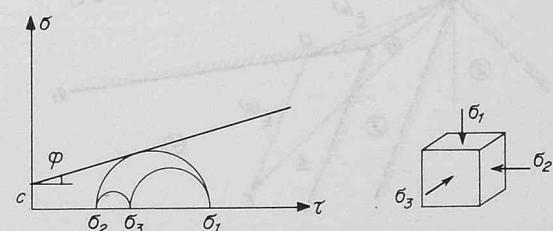


Bild 6. Die Fliessbedingung in der (σ, τ) -Ebene

Nach dem *Hooke'schen Gesetz* (2.6) lassen sich die Hauptspannungen in den Hauptverzerrungen ε_1 und ε_2 mit den Abkürzungen

$$(3.12) \quad \lambda_1 = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \lambda_2 = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

so ausdrücken

$$(3.13) \quad \sigma_1 = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2, \\ \sigma_2 = \lambda_2 \varepsilon_1 + \lambda_1 \varepsilon_2.$$

Durch Einsetzen von (3.13) in (3.6) erhält man nach einiger Zwischenrechnung

$$(3.14) \quad \varepsilon_2 = n \varepsilon_1 + d$$

mit den Konstanten

$$(3.15) \quad n = \frac{m - \lambda_2 / \lambda_1}{1 - m \lambda_2 / \lambda_1}, \quad d = \frac{1}{\lambda_1} \frac{b}{1 - m \lambda_2 / \lambda_1}.$$

Man kann zeigen, dass für diese Größen unter Beachtung von (3.10) und den Ungleichungen

$$0 < m \leq 1, \quad b \leq 0$$

die Beschränkungen $n \leq 0, d \leq 0$ gelten. In Bild 9 für (3.14) gilt wie-

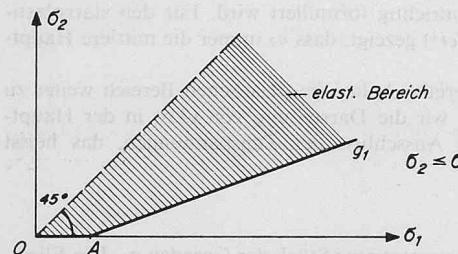


Bild 7. Die Fliessbedingung in der Ebene der Hauptspannungen

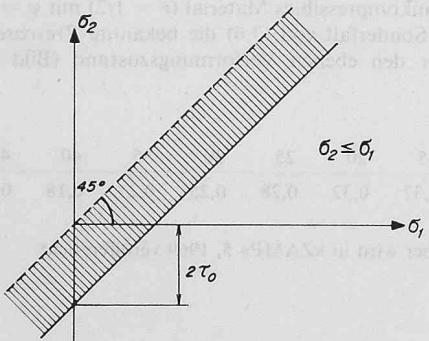


Bild 8. Die Trescasche Fliessbedingung ($\varphi = 0$)

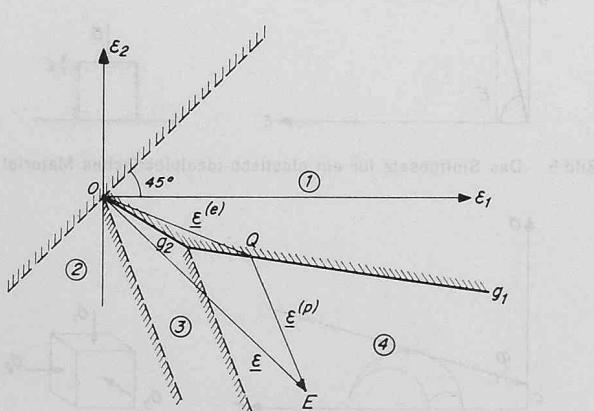


Bild 9. Die Fliessbedingung in der Ebene der Hauptdehnungen (Zugspannung ausgeschlossen)

derum nur das ausgezogene Stück von der Geraden g_1 . Die Ergänzung (g_2) erhält man, wenn (3.13) in (3.11) eingesetzt wird, sie führt auf

$$(3.16) \quad \varepsilon_2 = n' \varepsilon_1$$

mit

$$(3.17) \quad n' = - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Da bei Druckspannungen das positive Vorzeichen gilt, zählen die Verzerrungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ bei Stauchung positiv.

3.2 Fließgesetz

Wenn für eine bestimmte Belastung einzelne Elemente des Systems die Fließgrenze erreicht haben, heißt es noch nicht, dass sofort unbeschränkte Verformungen einsetzen können. Die inneren Bindungen des Materials, welche durch das Stoffgesetz zum Ausdruck kommen, verhindern solche großen Deformationen. Es wird im folgenden angenommen, dass sich die betrachtete Scheibe im oben erwähnten Zustand des «beschränkten Fließens» befindet, und die plastischen Deformationen von der selben Größenordnung wie die elastischen sind. Das totale Verzerrungskrement $\dot{\varepsilon}_{ij}$ setzt sich aus einem elastischen und einem plastischen Anteil

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}$$

zusammen. Der elastische Anteil ergibt sich aus dem Hooke'schen Gesetz, der plastische nach dem Fließgesetz

$$(3.18) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

wobei λ im allgemeinen eine skalare Funktion der Spannungen und Spannungskräfte ist. Dieses Gesetz besagt anschaulich, dass der Vektor der Verzerrungskräfte senkrecht zur Fließfläche (im Spannungsräum) stehen muss. Wie weit die Hypothese (3.18) dem tatsächlichen Verhalten der Gesteine im Fließzustand entspricht, ist zur Zeit noch nicht ganz klar gestellt. Formuliert man alle Beziehungen im Hauptachsensystem, wie wir es bis jetzt durchwegs getan haben, so lassen sich $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}$ und $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}$ für ein bestimmtes $\dot{\varepsilon}_{ij}$ besonders leicht bestimmen. Man kann (3.6) als

$$(3.19) \quad f = m \sigma_1 - \sigma_2 + b$$

und (3.11) als

$$(3.20) \quad f = \sigma_2$$

schreiben und nach (3.18) $\dot{\varepsilon}_1^{(p)}$ bzw. $\dot{\varepsilon}_2^{(p)}$ erhalten. Die Ableitungen von $f = f(\sigma_i)$ liefern für (3.19)

$$\dot{\varepsilon}_1^{(p)} = \lambda m, \quad \dot{\varepsilon}_2^{(p)} = -\lambda$$

oder

$$(3.21) \quad \frac{\dot{\varepsilon}_2^{(p)}}{\dot{\varepsilon}_1^{(p)}} = -m = \text{konst.}$$

und für (3.20)

$$\dot{\varepsilon}_1^{(p)} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2^{(p)} = \lambda$$

oder

$$(3.22) \quad \frac{\dot{\varepsilon}_2^{(p)}}{\dot{\varepsilon}_1^{(p)}} = \infty.$$

Je nachdem der Spannungspunkt in Bild 7 auf der Geraden g_1 oder auf OA liegt, gelten die Beziehungen (3.21) oder (3.22). Da aber diese Verschiedenartigkeit des Materialverhaltens nur durch eine unsichere Hypothese begründet ist und die Rechnungen wesentlich erschwert, nehmen wir an, dass im Fließzustand das Gesetz (3.21) gültig ist.

3.3 Die Bestimmung der Spannungen für gegebene Dehnungen im plastischen Bereich

Die allgemeine Gültigkeit von (3.21) für Fließen erlaubt den Übergang von Verzerrungskräften auf endliche Verzerrungen. Bei einem bekannten Verzerrungsvektor ε können in der Ebene der Hauptverzerrungen die zugehörigen elastischen – und plastischen Anteile wegen der Erweiterung von (3.21) auf

$$(3.23) \quad \frac{\dot{\varepsilon}_2^{(p)}}{\dot{\varepsilon}_1^{(p)}} = -m$$

angegeben werden. Da die Richtung des Vektors $\varepsilon^{(p)}$ nach (3.23) festgelegt ist, kann dieser Vektor aus dem Schnittpunkt (Q) zweier Geraden (Bild 9) bestimmt werden. Der Punkt Q liegt entweder auf g_1 oder g_2 , im Grenzfall fällt er mit dem Ursprung O zusammen. Die Verbindungsgerade \overline{OQ} ergibt den elastischen Anteil $\varepsilon^{(e)}$ von ε . In Bild 9 sind vier Bereiche zu unterscheiden. Im Bereich ① ist das Material rein elastisch, im Bereich ② fließt es infolge Zugsspannungen, im Bereich ③ ebenfalls, weil eine der Hauptspannungen verschwindet (Grenzfall der Zugbeanspruchung). Im Bereich ④ tritt das Fließen unter der Wirkung von Druckspannungen ein. Wenn während des Belastungsprozesses der Scheibe der Punkt E in Bild 9 das Gebiet ② nicht betritt (gerissene Zonen), sind die Rechnungen mit endlichen Verzerrungen ε statt Verzerrungssinkrementen $\dot{\varepsilon}$ nach unseren Annahmen richtig. Da bei den praktischen Aufgaben des Tunnelbaus die Zugzonen sich auf kleine Gebiete beschränken, dürften allfällige Fehler wegen dem Gebiet ② vernachlässigt werden.

In Tabelle 2 sind die Grenzen der einzelnen Gebiete und die elastischen Anteile des Verzerrungsvektors $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ zusammengestellt. Der plastische Anteil ergibt sich aus

$$\varepsilon^{(p)} = \varepsilon - \varepsilon^{(p)}.$$

Am Schlusse dieses Abschnittes sei noch angemerkt, dass mit dem Fließgesetz (3.23) eine Volumenvergrößerung verbunden ist. Beim ebenen Verschiebungszustand beträgt die Raumdehnung

$$\varepsilon_0^{(p)} = \varepsilon_1^{(p)} + \varepsilon_2^{(p)}$$

Für inkompressibles Material gilt also

$$(3.24) \quad \frac{\varepsilon_2^{(p)}}{\varepsilon_1^{(p)}} = -1$$

und für ein Material nach (3.23)

$$\frac{\varepsilon_2^{(p)}}{\varepsilon_1^{(p)}} = -m > -1.$$

Man hat aber beobachtet [8], dass beim Scherversuch, je nach der Struktur des Materials sowohl Volumenverminderung als auch Volumendehnung möglich ist. Lockere Sande zum Beispiel verlieren an Volumen, während sehr dicht gelagerte Sande ihr Volumen erhöhen. Es schien uns zweckmäßig, beim Fehlen von besonderen Materialkenntnissen in der Mitte zu bleiben und für den plastischen Fluss ein inkompressibles Material (3.24) in die Berechnungen einzuführen.

4. Die Lösung des Scheibenproblems für elastisch-idealplastisches Material mit Hilfe der Methode der endlichen Elemente

Der Grundgedanke der Methode stützt sich auf die Überlegungen von Ilyushin [9] für die elastisch-plastische Analyse von Fachwerken und auf das «initial stress» – Verfahren von Zienkiewicz [10]. An einem übersichtlichen statischen Modell sei nun das Vorgehen erläutert. In Bild 10 ist ein einfache statisch unbestimmtes Stabwerk mit den Federkonstanten c_1 und c_2 dargestellt. Um die Stabkräfte zu ermitteln, formulieren wir die Gleichgewichtsbedingung

$$(4.1) \quad S_2 + 2S_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - P = 0,$$

das Hooksche Gesetz

$$(4.2) \quad S_1 = c_1 \Delta l_1, \quad S_2 = c_2 \Delta l_2$$

und die Verträglichkeitsbedingungen für die Stabverlängerungen

$$(4.3) \quad \Delta l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta l_2$$

Mit den Abkürzungen

$$(4.4) \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_1}{c_1 + c_2} \quad \text{und} \quad b = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

erhält man folgende Resultate:

$$(4.5) \quad \Delta l_1 = \frac{1}{c_1} aP, \quad \Delta l_2 = \frac{1}{c_2} bP,$$

$$(4.6) \quad S_1 = aP, \quad S_2 = bP.$$

Falls bei allmählicher Steigerung der Last P der Stab ② zum Beispiel als erster zu fließen beginnt ($P = P_0$) und die Stäbe ① noch elastisch bleiben, verliert das Hooksche Gesetz (4.2) seine Gültigkeit. Das Tragwerk ist elastisch-plastisch aber noch nicht im Kollapszustand (die Last P liesse sich noch auf P^* erhöhen, bis auch die Stäbe ① zum Fließen kommen). Die Last, bei der zum erstenmal die Fließspannung erreicht ist, beträgt nach (4.5)

$$(4.7) \quad P_0 = \frac{c_2}{b} \Delta l_{20},$$

wobei Δl_{20} die Stabverlängerung an der elastisch-plastischen Grenze bedeutet. Sie lässt sich auch durch die «Fließkraft» S_{20} des Stabes mit (4.2)

$$(4.8) \quad \Delta l_{20} = \frac{1}{c_2} S_{20}$$

ausdrücken. In Bild 11 stellen die ausgezogenen Linien das Kraftverformungsdiagramm des Stabes ② dar.

Für Lasten $P_0 < P < P^*$ hat man nun mehr mit einem statisch bestimmten System zu tun, da für diese Lasten der Stab ② immer die Kraft

$$(4.9) \quad S_2 = S_{20}$$

aufweist. Die Gleichgewichtsbedingung (4.1) liefert mit (4.9)

$$(4.10) \quad S_1 = (P - S_{20}) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

und (4.3)

$$\Delta l_1 = \frac{\sqrt{2}}{2c_1} (P - S_{20}).$$

Für das elastisch-plastische System erhält man die gleichen Resultate auch mit einer iterativen Lösung. Wir gehen von den Beziehungen (4.6) der rein elastischen Rechnung

$$(4.11) \quad S^I = aP, \quad S^{I2} = bP$$

aus und korrigieren sie, indem wir berücksichtigen, dass der Stab ② in Wirklichkeit nur die Kraft S_{20} aufzunehmen vermag.

Die Differenz (Bild 11)

$$(4.7) \quad \delta_1 S_2 = S^{I2} - S_{20} = b \cdot (P - P_0)$$

wird als äußere Belastung an den Knoten O angebracht und die zugehörigen Stabkräfte mit elastischer Rechnung (4.6)

$$(4.8) \quad \Delta_1 S_1 = a \delta_1 S_2, \quad \Delta_1 S_2 = b \delta_1 S_2$$

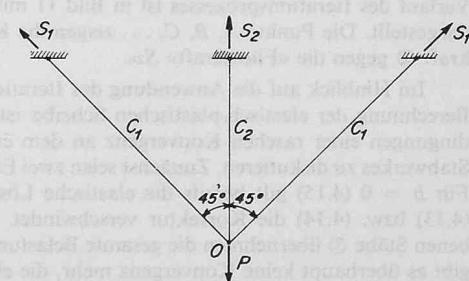


Bild 10. Das einfache statisch unbestimmte Stabmodell

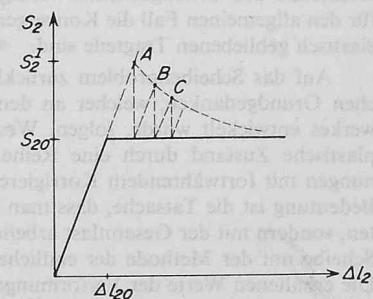


Bild 11. Der Iterationsprozess

ermittelt. Mit (4.7) kann (4.8) auch als

$$(4.9) \quad \Delta_1 S_1 = ab(P - P_0), \quad \Delta_1 S_2 = b^2(P - P_0)$$

angegeben werden. Die Stäbe weisen nach der ersten Korrektur die Kräfte

$$(4.10) \quad S^{II_1} = S^{I_1} + \Delta_1 S_1, \quad S^{II_2} = S_{20} + \Delta_1 S_2$$

auf oder nach Einsetzen von (4.9) in (4.10)

$$(4.11) \quad S^{II_1} = a[P + b(P - P_0)], \quad S^{II_2} = S_{20} + b^2(P - P_0).$$

Diese Resultate werden verbessert, indem die Differenz

$$\delta_2 S_2 = S^{II_2} - S_{20} = b^2(P - P_0)$$

als Last – wie vorher – auf die Stäbe verteilt wird. Die Beziehung (4.6) liefert

$$(4.12) \quad \Delta_2 S_1 = ab^2(P - P_0), \quad \Delta_2 S_2 = b^3(P - P_0)$$

und die zweite Korrektur

$$S^{III_1} = S^{II_1} + \Delta_2 S_1, \quad S^{III_2} = S_{20} + \Delta_2 S_2$$

nach Verwendung von (4.12)

$$S^{III_1} = a[P + (P - P_0)(b + b^2)],$$

$$S^{III_2} = S_{20} + b^3(P - P_0).$$

Man kann diese Resultate leicht auf die N -te Korrektur wie folgt erweitern

$$(4.13) \quad S^{N_1} = a[P + (P - P_0)(b + b^2 + b^3 + \dots + b^{N-1})],$$

$$(4.14) \quad S^{N_2} = S_{20} + b^N(P - P_0)$$

und erkennen, dass es in (4.13) eine Gesetzmässigkeit nach einer geometrischen Reihe gibt. Da der Quotient der Reihe nach (4.4)

$$(4.15) \quad b = \frac{c_2}{c_1 + c_2} < 1$$

ist, konvergiert sie und für $N \rightarrow \infty$ führt (4.13) auf

$$(4.16) \quad S_1 = a \left[P + (P - P_0) \frac{b}{1-b} \right]$$

und (4.15) auf

$$(4.17) \quad S_2 = S_{20}.$$

Eine Umformung von (4.16) ergibt das gleiche Resultat wie (4.10), welches durch die einfache, direkte Berechnung erhalten wurde. Der Verlauf des Iterationsprozesses ist in Bild 11 mit gestrichelten Linien dargestellt. Die Punkte A, B, C, \dots zeigen die Konvergenz der Stabkraft ② gegen die «Fliesskraft» S_{20} .

Im Hinblick auf die Anwendung des Iterationsverfahrens auf die Berechnung der elastisch-plastischen Scheibe ist es nützlich, die Bedingungen einer raschen Konvergenz an dem einfachen Beispiel des Stabwerkes zu diskutieren. Zunächst seien zwei Extremfälle betrachtet. Für $b = 0$ (4.15) gilt bereits die elastische Lösung als exakt, da in (4.13) bzw. (4.14) die Korrektur verschwindet. Die elastisch gebliebenen Stäbe ① übernehmen die gesamte Belastung P . Wenn $b = 1$ ist, gibt es überhaupt keine Konvergenz mehr, die elastischen Stäbe können keine Kraft übernehmen. Die Verformungen werden unbeschränkt, der Kollapszustand ist bereits erreicht. Das Verfahren würde für die Grenzfälle des Gleichgewichtes versagen. Man sieht leicht ein, dass für den allgemeinen Fall die Konvergenz umso besser ist, je steifer die elastisch gebliebenen Tragteile sind.

Auf das Scheibenproblem zurückkehrend, wollen wir dem gleichen Grundgedanken, welcher an dem Beispiel des einfachen Stabwerkes entwickelt wurde, folgen. Wesentlich ist, dass der elastisch-plastische Zustand durch eine Reihe von rein elastischen Berechnungen mit fortwährendem Korrigieren erreicht wird. Ebenfalls von Bedeutung ist die Tatsache, dass man nicht mit Belastungskrementen, sondern mit der Gesamtlast arbeitet. Als erstes berechnen wir die Scheibe mit der Methode der endlichen Elemente nach Abschnitt 2. Die erhaltenen Werte der Verformungen und Spannungen

$$\{r\}^I, \{\varepsilon\}^I, \{\sigma\}^I$$

Tabelle 2.

Bereich	Grenzen	$\varepsilon^{(e)}$
①	$\varepsilon_2 - n'\varepsilon_1 \geq 0$	$\varepsilon^{(e)}_1 = \varepsilon_1$
	$\varepsilon_2 - n\varepsilon_1 - d \geq 0$	$\varepsilon^{(e)}_2 = \varepsilon_2$
②	$\varepsilon_2 \leq 0$	$\varepsilon^{(e)}_1 = 0$
	$\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 \leq 0$	$\varepsilon^{(e)}_2 = 0$
③	$\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 > 0$	$\varepsilon^{(e)}_1 = \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{1 + mn'}$
	$\varepsilon_2 - n'\varepsilon_1 < 0$	$\varepsilon^{(e)}_2 = \frac{n'}{1 + mn'} (\varepsilon_1 + m\varepsilon_2)$
④ *)	$\varepsilon_1 + m(\varepsilon_2 - \varepsilon_{2G}) - \varepsilon_{1G} \leq 0$	$\varepsilon^{(e)}_1 = \frac{\varepsilon_1 + m(\varepsilon_2 - d)}{1 + mn}$
	$\varepsilon_1 + m(\varepsilon_2 - \varepsilon_{2G}) - \varepsilon_{1G} > 0$	$\varepsilon^{(e)}_2 = \frac{n}{1 + mn} [\varepsilon_1 + m(\varepsilon_2 - d)] + d$
*) $\varepsilon_{1G} = \frac{d}{n' - n}, \quad \varepsilon_{2G} = n' \frac{d}{n' - n}$		

stellen die erste grobe Näherung dar. Wir kontrollieren nun am Spannungszustand bzw. Verzerrungszustand jedes Elementes, ob die Fliessbedingung verletzt ist. Fällt ein Verzerrungspunkt in Bild 11 in das Gebiet ②, ③ oder ④, so hat das betreffende Element zu grossen Spannungen bzw. Hauptspannungsdifferenzen erhalten.

Nach Tabelle 2 können die plastischen Anteile der Dehnungen berechnet und nach (3.13) der Spannungszustand um

$$\Delta P_1 \sigma_1 = \lambda_1 \varepsilon^{(P)}_1 + \lambda_2 \varepsilon^{(P)}_2,$$

$$\Delta P_1 \sigma_2 = \lambda_2 \varepsilon^{(P)}_1 + \lambda_1 \varepsilon^{(P)}_2$$

korrigiert werden. Nach einer Rücktransformation der Spannungen von Hauptachsen auf das globale (x, y) System können den Spannungen entsprechende Knotenkräfte $S^{(P)}$ nach (2.8)

$$\{S_1\}^{(P)} = [B] \{\Delta P_1 \sigma\}$$

berechnet werden. Diese Knotenkräfte werden als äussere Belastung an den Knotenpunkten angebracht und die Scheibe wiederum rein elastisch nach (2.12) durchgerechnet. Die neuen Resultate $\{\Delta_1 r\}$, $\{\Delta_1 \sigma\}$ werden jenen der ersten Rechnung superponiert:

$$(4.18) \quad \{r\}^{II} = \{r\}^I + \{\Delta_1 r\}, \quad \{\sigma\}^{II} = \{\sigma\}^I - \{\Delta P_1 \sigma\} + \{\Delta_1 \sigma\}.$$

Nach dieser Überlagerung wird wieder auf Hauptsachen transformiert und der Spannungszustand wie oben kontrolliert und korrigiert. Man kann so weiterfahren, bis ein eingebautes Abbrechkriterium für die Konvergenz erfüllt ist. Als Abbrechkriterium dient am besten eine Schranke für $\{\Delta P_i \sigma\}$ oder die Anzahl der Iterationen.

Die Beschleunigung der Konvergenz mit einem Faktor ω – ähnlich dem Überrelaxationsfaktor – ist möglich. Die Beziehungen (4.18) gehen dann in die Form

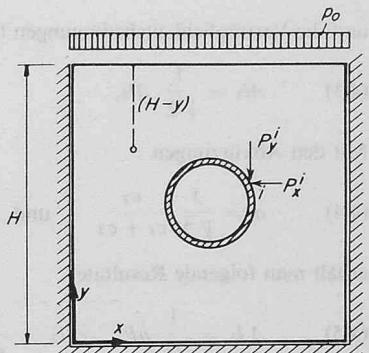


Bild 12. Der primäre Spannungszustand

$$\{r^{II}\} = \{r^I\} + \omega \{\Delta r\},$$

$$\{\sigma^{II}\} = \{\sigma^I\} - \omega [\{\Delta P_1 \sigma\} - \{\Delta \sigma\}]$$

über. Wie der optimale Wert von ω gewählt werden soll, ist nicht untersucht worden. Mit $\omega = 2$ haben wir eine sehr gute Verbesserung der Konvergenz erzielt.

Es ist erwähnenswert, dass im Verlauf der Berechnungen die System-Stiffigkeitsmatrix $[K]$ in (2.12) keine Änderung erfährt.

5. Orientierung der Berechnungsmethode auf die Probleme des Tunnel- und Stollenbaues

Es sind noch zwei Faktoren, die in den Rechnungen berücksichtigt werden müssen. Erstens die Wirkung der Verkleidung und zweitens der primäre Spannungszustand.

Indem man neben den Dreieckelementen auch Zug- bzw. Druckstäbe einführt, lässt sich ein Fachwerk zusammensetzen, welches die gleiche Steifigkeit aufweist wie die monolithische Verkleidung aus Beton. Aus den berechneten Stabkräften kann man die Schnittkräfte und Spannungen in der Verkleidung bestimmen.

Um den Einfluss des primären Spannungszustandes näherungsweise berücksichtigen zu können, führen wir den Überlagerungsdruck und das Eigengewicht der Scheibe als Belastung ein und bestimmen die Spannungen für homogenes, elastisches Material. Die Hauptspannungen für den ebenen Verformungszustand betragen (Bild 12)

$$(5.1) \quad \sigma_y = P_0 + \gamma (H - y),$$

$$\sigma_x = \lambda_0 \sigma_y, \quad \left(\lambda_0 = \frac{\nu}{1-\nu} \right).$$

Die Verschiebungen erhält man ausgehend von den Verzerrungen

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - 2\nu\sigma_x),$$

$$\varepsilon_x = 0$$

nach einer Integration und Berücksichtigung von (5.1) als

$$(5.2) \quad v = \frac{1 - 2\nu\lambda_0}{E} \left[(P_0 + \gamma H)y - \gamma \frac{y^2}{2} \right],$$

$$u = 0.$$

Wir können dieses Verschiebungsfeld der gelochten Scheibe (mit Fachwerk) auszwingen, hätten aber bereits vom primären Zustand Kräfte und Verformungen in der Verkleidung, was ja nicht der Wirklichkeit entsprechen würde. Diese Kräfte und Verformungen müssen deshalb in einem Rechnungsgang eliminiert werden. Denkt man sich das Loch in der Weise entstanden und die Verkleidung so eingebracht, dass der primäre Zustand zunächst unverändert bleibt, müssen von der Verkleidung genau jene Spannungen auf die Scheibe wirksam sein, welche dem primären Zustand entsprechen. Da diese Spannungen nach (5.1) bekannt sind, können aus ihnen Knotenkräfte P_x^k , P_y^k ermittelt werden (Bild 13), welche von der Scheibe auf die Verkleidung

Bild 14. Vergleich der Resultate der analytischen und der numerischen Berechnung. a) (unten) Verlauf der Normalspannungen längs x-Achse, b) (rechts) Verlauf der Normalspannungen längs y-Achse

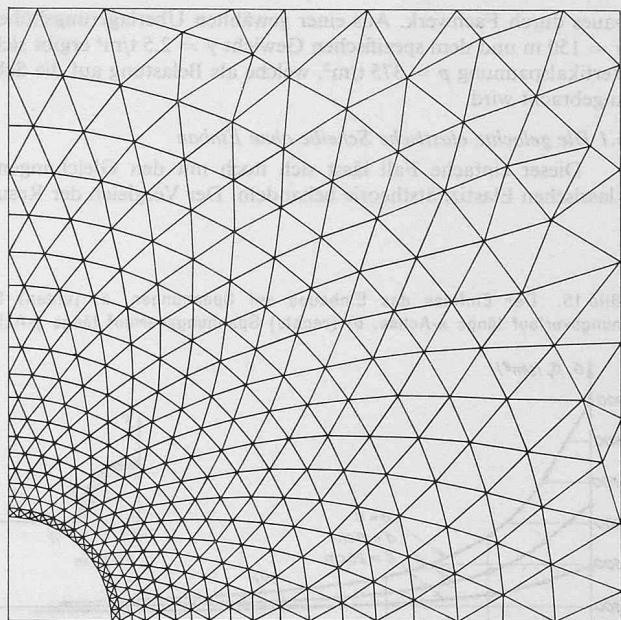
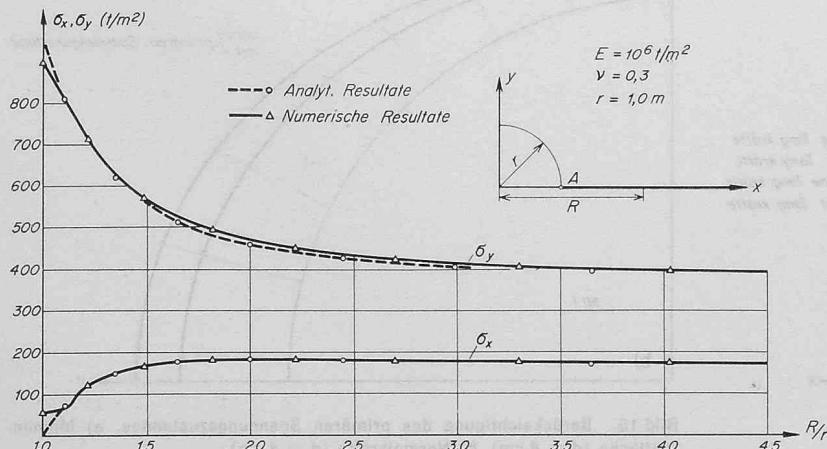
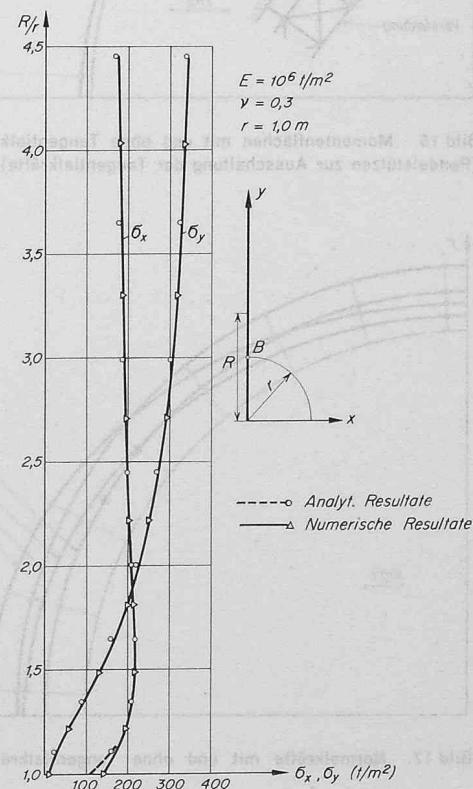


Bild 13. Die Aufteilung in Elemente (mit Verkleidung)

wirkt eingeführt werden. Für diese Kräfte als Belastung ermittelt man die Spannungen und Verformungen, welche dann, dem primären Zustand überlagert, für rein elastisches Material den exakten sekundären Zustand ergeben. Dieser Zustand ist aber auch der Ausgangspunkt für elastisch-plastische Materialien bei der Anwendung des Iterationsverfahrens nach Abschnitt 4.

6. Anwendungsbeispiele

Da im Falle des Kreisprofiles selbst für die Erstellung der Eingabedaten ein Computerprogramm aufgestellt werden kann, diskutieren wir zunächst die Lösung einiger Tunnelprobleme mit kreisförmigem Ausbruch. Falls man das Eigengewicht der Scheibe außer acht lassen darf (bei grosser Überlagerungshöhe), können die Beobachtungen aus Symmetriegründen auf den Viertelkreis beschränkt werden. Bild 13 zeigt die Aufteilung der Scheibe in Elemente mit einer relativ feinen Masche und die Berücksichtigung eines allfälligen Ein-



baues durch Fachwerk. Aus einer gewählten Überlagerungshöhe von $h = 150$ m und dem spezifischen Gewicht $\gamma = 2,5 \text{ t/m}^3$ ergibt sich die Vertikalspannung $p = 375 \text{ t/m}^2$, welche als Belastung auf die Scheibe angebracht wird.

6.1 Die gelochte elastische Scheibe ohne Einbau

Dieser einfache Fall lässt sich noch mit den Gleichungen der klassischen Elastizitätstheorie behandeln. Der Vergleich der Resultate

Bild 15. Der Einfluss des Einbaus auf Spannungen. a) (unten) Spannungsverlauf längs x-Achse, b) (rechts) Spannungsverlauf längs y-Achse

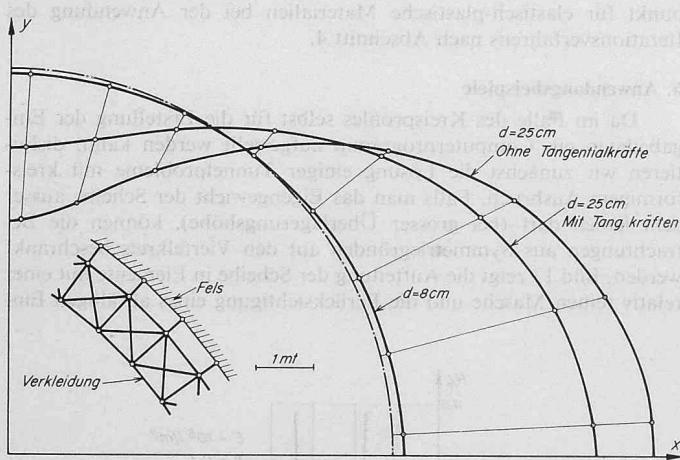
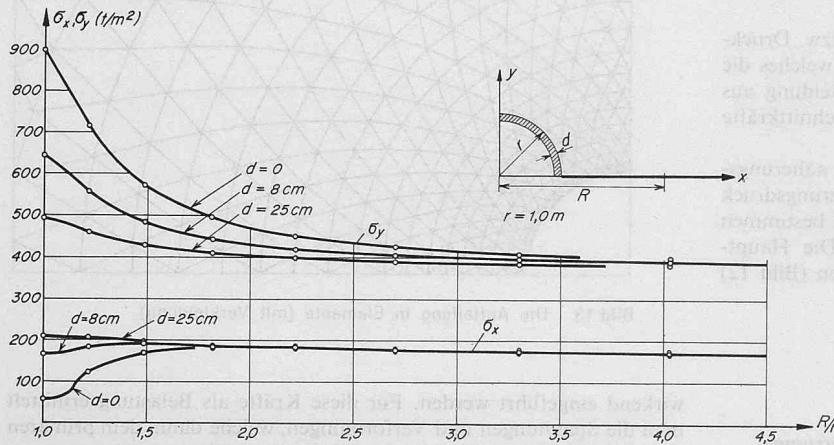


Bild 16. Momentenflächen mit und ohne Tangentialkräfte (Pendelstützen zur Ausschaltung der Tangentialkräfte)

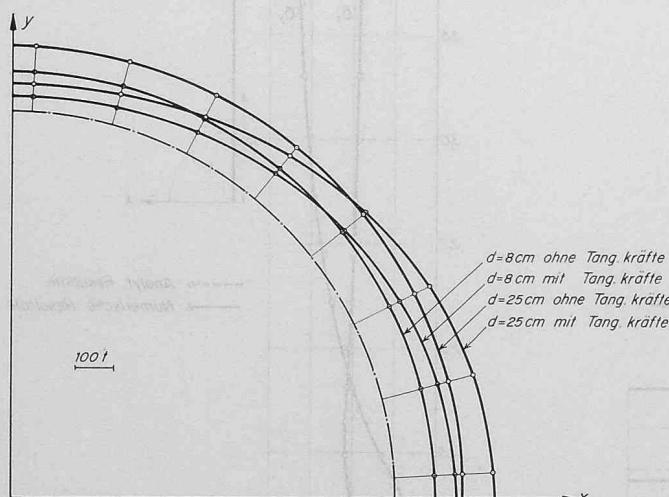


Bild 17. Normalkräfte mit und ohne Tangentialkräfte

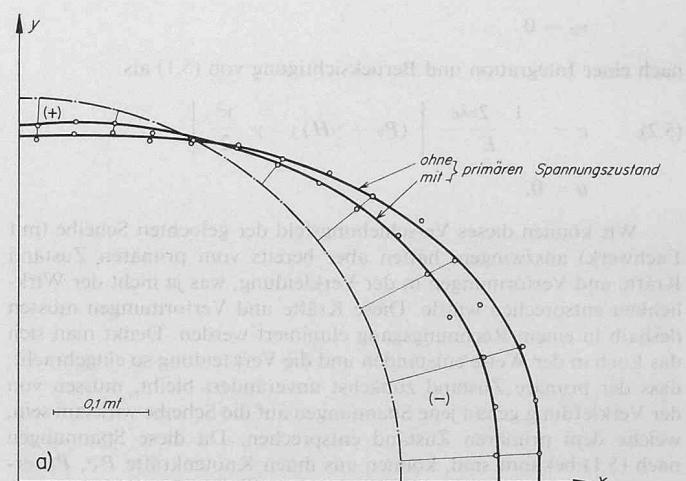
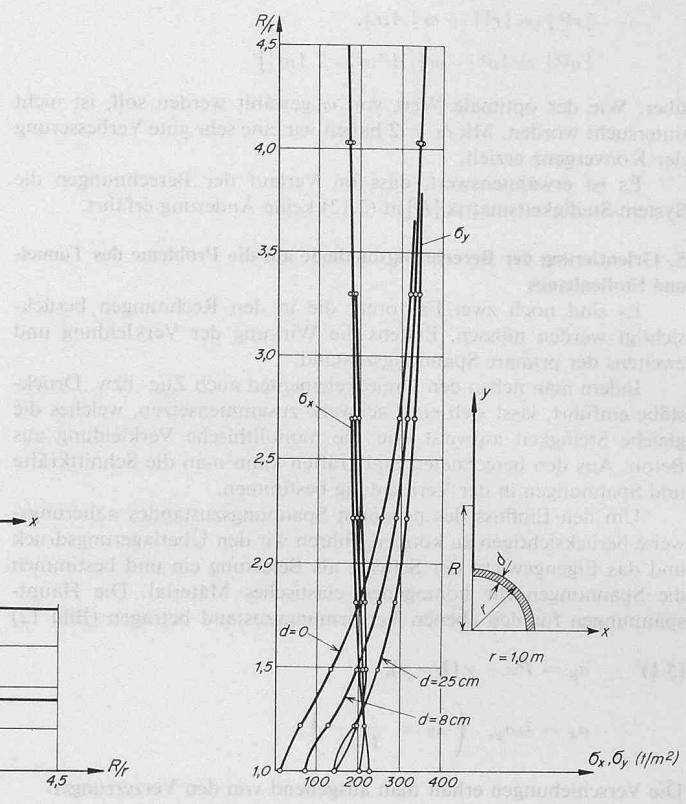


Bild 18. Berücksichtigung des primären Spannungszustandes. a) Momentenfläche ($d = 8 \text{ cm}$), b) Normalkräfte ($d = 8 \text{ cm}$)

der analytischen und der numerischen Rechnung (Bild 14) gibt uns einen guten Überblick über die erzielte Genauigkeit bei der gewählten Masche. Nennenswerte Abweichungen ($> 5\%$) zeigen sich nur in den Punkten A und B, wo der Spannungsgradient am grössten ist. Bei der analytischen Rechnung war eine seitliche Belastung entsprechend der Querdehnungszahl $\nu = 0,3$, bei der numerischen Behandlung die Unterschreitung der Seiten vorgeschrieben. Das rasche Abklingen der Störungen lässt beide Formulierungen als gleichwertig zu.

6.2 Die gelochte elastische Scheibe mit Einbau

Der Einbau besteht aus einer monolithischen Betonverkleidung, welche auch Tangentialkräfte vom Gebirge zu übernehmen vermag. Das stellvertretende Fachwerk kann so gewählt werden, dass es die gleiche Biege- und Drucksteifigkeit aufweist wie der Betonring. Im Bild 15a und 15b ist der Einfluss der Stärke des Einbaus auf das Spannungsfeld im Fels ersichtlich. Die Momente und Normalkräfte in der Verkleidung wachsen – wie vermutet – mit zunehmender Betonstärke. In den Bildern 16 und 17 wird auch noch die Wirkung von fehlenden Tangentialkräften gezeigt. Durch Einfügen von Pendelstützen zwischen Verkleidung und Fels können Reibungskräfte völlig eliminiert werden. An Hand der Figuren stellt man fest, dass die Reibung einen stabilisierenden Effekt hat. Für geringe Betonstärken ist er allerdings so gering, dass in Bild 16 für $d = 8 \text{ cm}$ der Unterschied wegen dem gewählten Massstab nicht mehr gezeigt werden konnte.

6.3 Berücksichtigung des primären Spannungszustandes

Nach Abschnitt 5 kann der primäre Spannungszustand näherungsweise in den Rechnungen berücksichtigt werden. In diesem Falle erfährt die Verkleidung nur durch die «Entspannung» des Gebirges eine

Bild 19. Elastisch-plastisches Material.
a) (unten) Normalspannungen längs x-Achse, b) (Mitte) Normalspannungen längs y-Achse, c) (rechts) Ausbreitung der plastischen Zonen

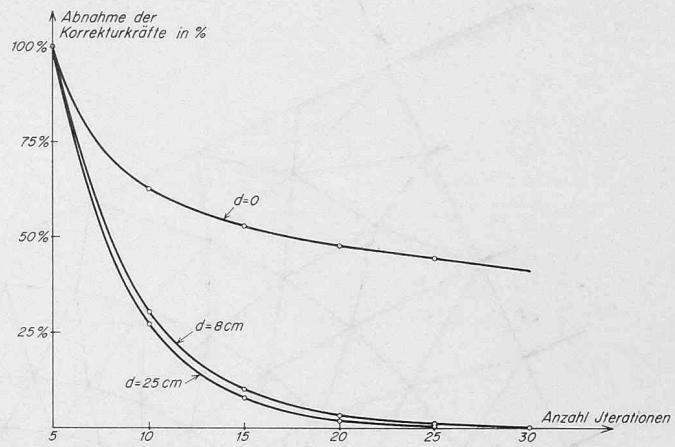
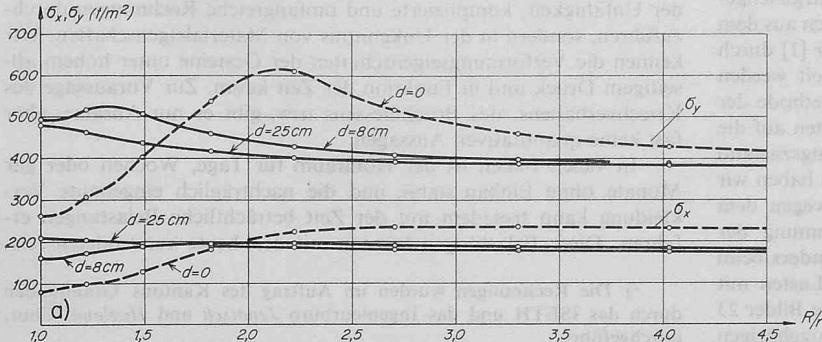
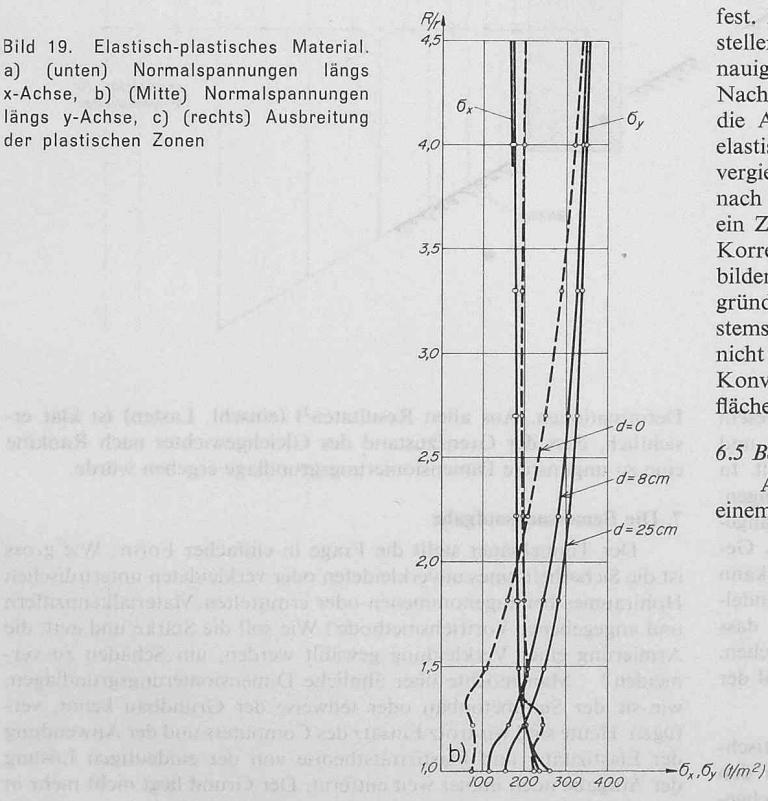


Bild 20. Typischer Verlauf der Korrektur-Knotenkräfte beim Iterationsprozess

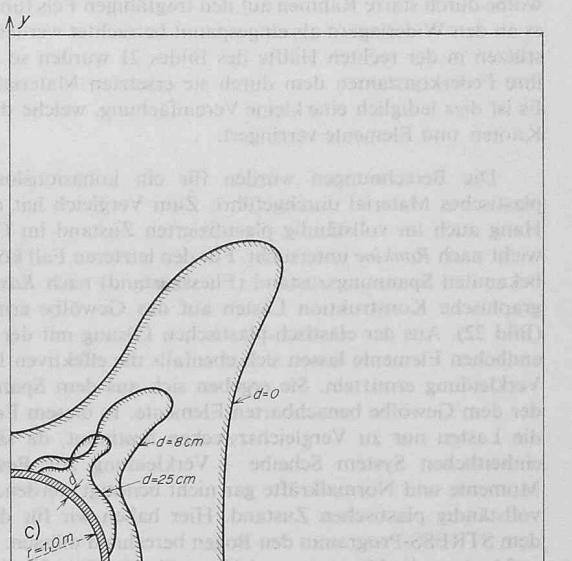
Belastung. Hier haben wir es mit einem völlig anderen statischen System zu tun. An einem vorbelasteten System (ungelochte Scheibe) werden Tragteile entfernt und *unbelastete* Stücke (Verkleidung) hinzugefügt. Den Unterschied in der Beanspruchung (M, N) für $d = 8 \text{ cm}$ zeigen die Bilder 18a und b.

6.4 Die gelochte Scheibe aus elastisch-plastisch idealem Material

Wir betrachten wieder den Viertelkreis mit den gleichen Daten, wie sie am Anfang dieses Abschnittes angegeben wurden und legen die Fließbedingung für das Felsmaterial mit $c = 30 \text{ t/m}^2$ und $\varphi = 30^\circ$ fest. Das Spannungsfeld und die plastischen Zonen in der Scheibe stellen sich je nach der Stärke der Verkleidung ein (Bild 19). Die Genauigkeit der iterativen Rechnung ist im Falle ohne Einbau beschränkt. Nach den Untersuchungen in Abschnitt 4 ist dies gut verständlich, da die Aufnahme der grossen Korrekturknotenkräfte $\{S\}^P$ durch die elastisch gebliebenen Teile sehr schwer ist. Die Korrekturkräfte konvergieren nicht gegen Null, sondern zu irgendeinem Wert, welcher nach noch so vielen Iterationen der gleiche bleibt. Dies ist lediglich ein Zeichen der Unzulänglichkeit der numerischen Behandlung. Die Korrekturkräfte stellen sich so ein, dass sie ein System von Kräften bilden, welche in sich im Gleichgewicht sind. Es ist deshalb nicht begründet, von der schlechten Konvergenz auf einen Kollaps des Systems zu schliessen. Die plastifizierte Scheibe ohne Einbau ist aber nicht von grosser praktischer Bedeutung. Wie Bild 20 zeigt, ist die Konvergenz schon bei einer sehr dünnen Verkleidung (vergütete Oberfläche durch Spritzbeton) außerordentlich gut.

6.5 Berechnung eines Hangtunnels

An diesem Anwendungsbeispiel soll die Spannungsanalyse in einem Hangabschnitt gezeigt werden. Das Ziel war, möglichst gute



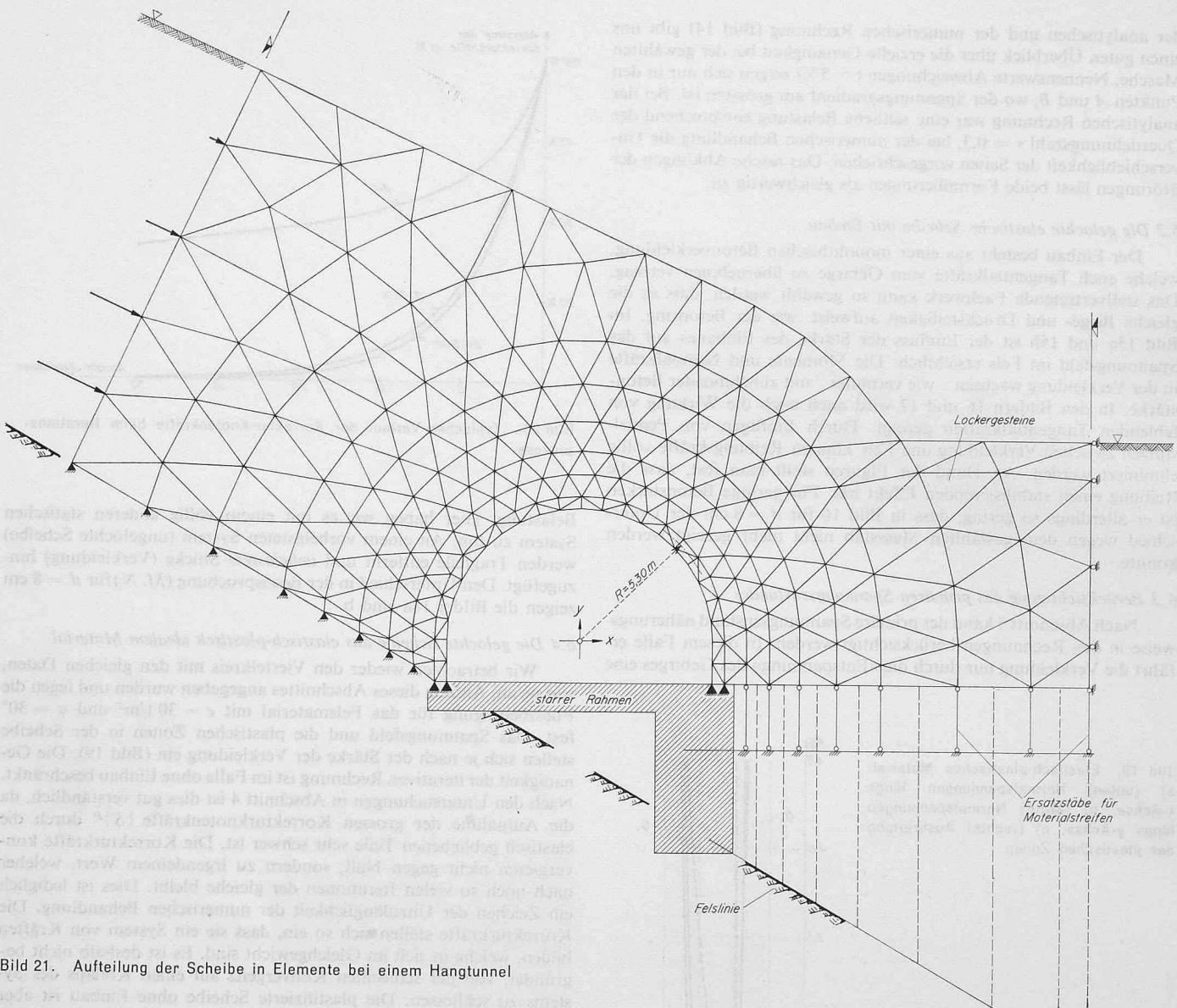


Bild 21. Aufteilung der Scheibe in Elemente bei einem Hangtunnel

Grundlagen für die Gewölbedimensionierung zu schaffen. Zu diesem Zweck wurden für verschiedene Werte der Materialkonstanten und Gewölbestärken die Beanspruchungen in der Verkleidung ermittelt. In Bild 21 sieht man die Scheibe mit den gewählten Randbedingungen. Die Belastung besteht nur aus dem Eigengewicht und aus einem angenommenen Erddruck auf die linke Abgrenzungsfläche. Da das Gewölbe durch starre Rahmen auf den tragfähigen Fels fundiert ist, kann es an den Widerlagern als eingespannt betrachtet werden. Die Pendelstützen in der rechten Hälfte des Bildes 21 wurden so gewählt, dass ihre Federkonstanten dem durch sie ersetzen Material entsprechen. Es ist dies lediglich eine kleine Vereinfachung, welche die Anzahl der Knoten und Elemente verringert.

Die Berechnungen wurden für ein kohäsionsloses, elastisch-plastisches Material durchgeführt. Zum Vergleich hat man aber den Hang auch im vollständig plastifizierten Zustand im Grenzgleichgewicht nach Rankine untersucht. Für den letzteren Fall können aus dem bekannten Spannungszustand (Fliesszustand) nach Kastner [1] durch graphische Konstruktion Lasten auf das Gewölbe ermittelt werden (Bild 22). Aus der elastisch-plastischen Lösung mit der Methode der endlichen Elemente lassen sich ebenfalls die effektiven Lasten auf die Verkleidung ermitteln. Sie ergeben sich aus dem Spannungszustand der dem Gewölbe benachbarten Elemente. In diesem Falle haben wir die Lasten nur zu Vergleichszwecken bestimmt, da sie wegen dem einheitlichen System Scheibe – Verkleidung zur Bestimmung der Momente und Normalkräfte gar nicht benötigt werden. Anders beim vollständig plastischen Zustand. Hier haben wir für die Lasten mit dem STRESS-Programm den Bogen berechnen müssen. Die Bilder 23 u. 24 zeigen die Momente und Normalkräfte, Bild 25 die zugehörigen

Deformationen. Aus allen Resultaten²⁾ (einschl. Lasten) ist klar ersichtlich, dass der Grenzzustand des Gleichgewichtes nach Rankine eine zu ungünstige Dimensionierungsgrundlage ergeben würde.

7. Die Bemessungsaufgabe

Der Tunnelbauer stellt die Frage in einfacher Form: Wie gross ist die Sicherheit eines unverkleideten oder verkleideten unterirdischen Hohlraumes bei angenommenen oder ermittelten Materialkennziffern und angegebener Vortriebsmethode? Wie soll die Stärke und evtl. die Armierung einer Verkleidung gewählt werden, um Schäden zu vermeiden? – Man möchte über ähnliche Dimensionierungsgrundlagen, wie sie der Stahlbetonbau oder teilweise der Grundbau kennt, verfügen. Heute sind wir trotz Einsatz des Computers und der Anwendung der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie von der eindeutigen Lösung der Aufgabe noch immer weit entfernt. Der Grund liegt nicht mehr in der Unfähigkeit, komplizierte und umfangreiche Rechnungen durchzuführen, sondern in der Unkenntnis von Materialeigenschaften. Wir kennen die Verformungseigenschaften der Gesteine unter hohem allseitigem Druck und in Funktion der Zeit kaum. Zur Voraussage des Kriechverhaltens, des Bruchfliessens usw. gibt es nur Ansätze, aber fast keine quantitativen Aussagen.

In vielen Fällen ist der Hohlraum für Tage, Wochen oder gar Monate ohne Einbau stabil, und die nachträglich eingebaute Verkleidung kann trotzdem mit der Zeit beträchtliche Belastungen erfahren. Diese Belastungen können mit den heute verwendeten fels-

²⁾ Die Rechnungen wurden im Auftrag des Kantons Graubünden durch das ISETH und das Ingenieurbüro Jenatsch und Hegland, Chur, durchgeführt.

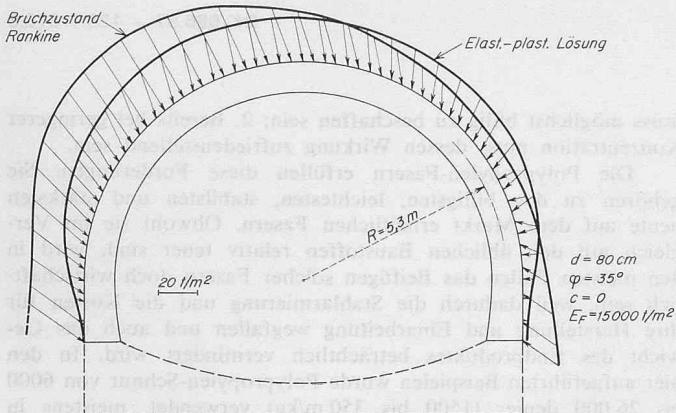


Bild 22. Belastungen im Zustand des Grenzgleichgewichtes (Rankine) und für das elastisch-plastische Material (beschränktes Fließen)

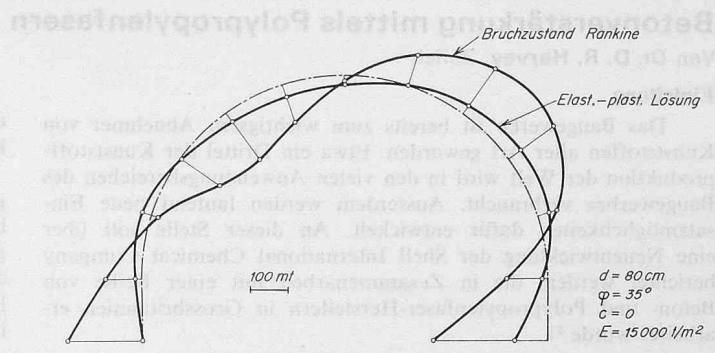


Bild 23. Momentenflächen

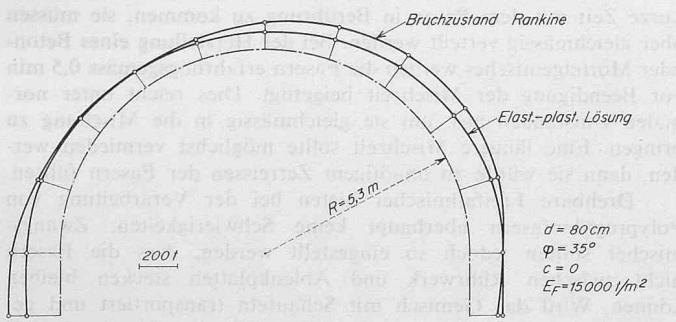


Bild 24. Normalkräfte

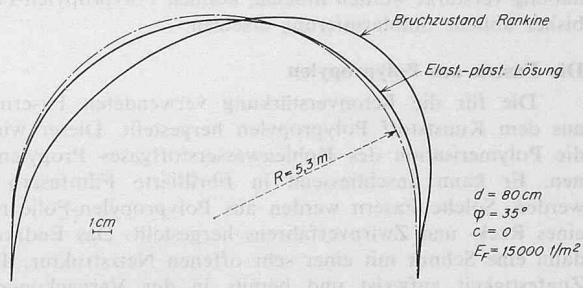


Bild 25. Deformationen

mechanischen Modellen nicht erklärt werden. Deshalb divergieren die Meinungen über den Wert und Nutzen der Tunnelstatik so stark. Es gibt Stimmen, welche von vornherein jegliche Berechnung ablehnen, andere, die gewisse Berechnungsverfahren kritiklos übernehmen und sie als fast unfehlbar betrachten. Uns scheint der richtige Weg darin zu bestehen, dass man sich zuerst die wichtigsten Faktoren berücksichtigend, ein etwas vereinfachtes mechanisches Modell aufstellt und in einem zweiten Schritt die erhaltenen Resultate nach den eigenen Erfahrungen und ingeniermässiger Intuition der komplexen Wirklichkeit anzupassen versucht. Da man gegenwärtig in der Felsmechanik grosse Anstrengungen unternimmt, um das rheologische Verhalten der Gesteine einerseits und die Frage des primären Spannungszustandes andererseits abzuklären, dürfen wir hoffen, dass in absehbarer Zeit eine Erweiterung der hier vorgeschlagenen Berechnungsmethode erzielt werden kann.

Abschliessend möchten wir kurz zusammenfassen, in welcher Weise dem praktisch tätigen Ingenieur das vorliegende Computerprogramm als Hilfsmittel für seine Bemessungsaufgaben nützlich sein kann.

1. Tunnel- und Stollenbauten, unterirdische Rohrleitungen in Oberflächennähe

Falls man die Konstruktion im Tagbau erstellt und nachher die Aufschüttung durchführt, spielen Zeiteffekte keine grosse Rolle. Die Resultate der elastisch-plastischen Berechnung liefern exakte Grundlagen für die Dimensionierung. Aus den Momenten und Normalkräften der Verkleidung kann der Spannungsnachweis direkt erfolgen. Wenn die Konstruktion im Untertagbau erstellt wird, liefert die Annahme der Aufschüttung Resultate, welche auf alle Fälle auf der sicheren Seite sind.

2. Tiefliegende unterirdische Bauwerke

Angesichts der Vielfalt massgebender Faktoren, welche sich durch die Gesteinseigenschaften und die gewählte Vortriebsmethode ergeben, können im Moment noch keine einheitlichen Richtlinien aufgestellt werden. Sie werden sich vielleicht mit den Erfahrungen, welche man durch die Benützung des Programmes gewinnt, ergeben. Da man auch Klüfte, Felsanker, alle möglichen Arten von Verkleidungen (z. B. Gelenkkette), Inhomogenitäten berücksichtigen kann, bleibt die einzige Unsicherheit in der Wirkung des Zeitfaktors. Die Spannungs-

umlagerung in der Umgebung des Hohlraumes braucht Zeit. Falls der Grad der Entspannung des Gebirges bis zum Erhärten des Betons der Verkleidung abgeschätzt werden kann, ist eine Reduktion der Lasten in einem bekannten Masse möglich.

Der Verfasser möchte an dieser Stelle Prof. H. Grob für die Anregung und weitgehende Unterstützung zu dieser Arbeit seinen besten Dank aussprechen. Er ist auch F. Vannotti, dipl. Math. ETH, für die Durchführung der umfangreichen Programmierarbeiten und Dr. sc. techn. E. Anderheggen (Institut für Baustatik ETH) für die Übergabe eines speziellen Programmes zur Auflösung linearer Gleichungssysteme mit Bandmatrix zu Dank verpflichtet.

Literaturnachweis

- [1] Kastner, H., Statik des Tunnel- und Stollenbaues, Berlin Springer-Verlag, 1962.
- [2] Clogh, R. W., The finite element method in plane stress analysis, Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, 1960.
- Zienkiewicz, O. C., The finite element method in structural and continuum Mechanics, London, Mc GRAW-HILL, 1967.
- Wilson, E. L., Finite element analysis of two-dimensional structures, Thesis, University of California, 1963.
- Argyris, J. H., The matrix theory of statics, «Ing. Archiv», Vol. 25, 1957.
- Leon, A., Über die Rolle des Trennbruches im Rahmen der Mohrschen Anstrengungshypothese. «Der Bauingenieur», 15 (1934), H. 31–32.
- Reyes, S. F., Elastic plastic analysis of underground openings by the finite element method, Thesis, University of Illinois, 1966.
- Drucker, D. C. und Prager, W., Soil mechanics and plastic analysis or limit design, «Quart. Appl. Math.», vol. 10, No. 2, pp 157, 1952.
- Ziegler, H., Mechanik, Band I, Basel 1960, S. 173.
- Mencl, V., Plastizitätslehre und das wirkliche Verhalten von Gebirgsmassen. «Felsmechanik und Ingenieurgeol.», Suppl. IV, 1968, S. 1.
- Ilyushin, A. A. und Lensky, V. S., Strength of materials, Pergamon Press, 1967.
- Zienkiewicz, Valliappan, King, Elasto-plastic solutions of engineering problems: initial stress; finite element approach. «Intern. J. for Num. Method in Eng.», Vol. 1, 75–100, (1969).

Adresse des Verfassers: Dr. sc. techn. K. Kovári, ETH Zürich, Institut für Strassen- und Untertagbau, Clausiusstrasse 33, 8044 Zürich.