

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 85 (1967)  
**Heft:** 20

**Artikel:** Über die Verschiebung des Trägerendes beim Rollenlager des einfachen Balkens  
**Autor:** Ladner, Marc  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-69458>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Stufe, druckseitig an der zweiten Stufe und für die Leerlaufentlastung vorgesehen zu werden. Eine direkt von dem Verdichter angetriebene Zahnrädpumpe versorgt sämtliche Schmierstellen mit Drucköl. Beim Anfahren und beim Auslaufen der Anlage sorgt eine Hilfspumpe für die Aufrechterhaltung des nötigen Öldruckes.

Die Firma Demag stellt Schraubenverdichter für Fördermengen bis 24000 m<sup>3</sup>/h her. Hierbei ist die obere Grenze noch nicht erreicht. Die minimale Fördermenge dürfte dagegen bei rd. 500 m<sup>3</sup>/h liegen. Je kleiner der Kompressor, desto grösser ist das Verhältnis der Leckverluste zur Ansaugmenge. Dies ist eine Folge der fertigungstechnisch erreichbaren Genauigkeit sowie der erforderlichen Toleranzen der Spalträume zwischen den Rotorprofilen. Daher wird bei kleinen Einheiten das Druckverhältnis geringer gewählt. Diese Erscheinung tritt auch bei der Förderung leichter Gase auf, da hier die Leckverluste mit kleinerem spezifischen Gewicht grösser werden.

Ausschlaggebend für die Bemessung eines Schraubenkompressors sind das Druckverhältnis und die Druckdifferenz. Die maximal zulässigen Temperaturen von 200 bis 220 °C begrenzen das erreichbare Druckverhältnis; die mechanische Belastbarkeit der Bauteile begrenzt die erzielbare Druckdifferenz. Bei der ersten Stufe wird normalerweise ein Druckverhältnis bis 4 zugrundegelegt; bei den weiteren Stufen kann die Druckdifferenz in Normalausführung bis 7 kp/cm<sup>2</sup> betragen. In einer verstärkten Ausführung kann diese bis auf rd. 14 kp/cm<sup>2</sup> gesteigert werden.

Für besondere Anwendungsgebiete kann auch saugseitig eine Flüssigkeitseinspritzung vorgesehen werden. Durch die damit erzielte Sperrwirkung erhöht sich der volumetrische Liefergrad der Anlage, die Leckverluste verkleinern sich und es wird außerdem eine Kühlung erzielt. Es kann dadurch das Druckverhältnis vergrössert werden, ohne dass sich die Temperaturen erhöhen<sup>1)</sup>.

Schraubenkompressoren sind unempfindlich gegen im Gasstrom mitgeführten Staub. Oft füllen sich die Spalten der Drehkolben mit solchen Ablagerungen; diese verkleinern das Laufspiel und vermindern die Leckverluste. Der überschüssige Schmutz wird druckseitig vom verdichteten Medium mitgerissen. Falls gereinigtes Gas benötigt wird, kann eine Reinigungsanlage dem Kompressor nachgeschaltet werden mit dem Vorteil, dass diese nur für das bereits verringerte Volumen bemessen werden muss und daher kleiner ausfällt und billiger wird.

Diese Maschinen eignen sich auch gut als Vakuumpumpen und finden als solche vermehrten Einsatz in der chemischen Industrie, besonders dort, wo Ölfreiheit gefordert wird. Als Vakuumpumpe kann der Schraubenkompressor mit grossen Druckverhältnissen gefahren werden, ohne dass die Temperaturen unzulässig hohe Werte annehmen. Mit zweistufigen Anlagen können ohne Flüssigkeitseinspritzung Unterdrücke von wenigen Torr erreicht werden. M. K.

<sup>1)</sup> Siehe auch «Schraubenkompressoren mit Öl einspritzung für die Kälteindustrie», SBZ 1966, H. 46, S. 816.

## Über die Verschiebung des Trägerendes beim Rollenlager des einfachen Balkens

Von Marc Ladner, dipl. Ing. ETH, EMPA, Dübendorf

DK 624.072.221

Selten findet man in der Literatur Angaben über die Grösse der Verschiebung des Trägerendes beim beweglichen Auflager des einfachen Balkens, die durch die äussere Belastung hervorgerufen wird. Es ist aber von Interesse sich zu überlegen, welche Einflüsse dabei eine Rolle spielen können.

Zunächst resultiert aus der Durchbiegung des Balkens eine Verdrehung des Endquerschnittes. Ist der Balken wie üblich unten aufgelagert, so entsteht daraus eine Verschiebung des Trägerendes (Bild 1). Sie ist auf der Trägerunterseite positiv (Verlängerung), auf der Trägeroberseite dagegen negativ (Verkürzung). Hinzu kommt aber, dass die Spannweite der Neutralaxe eine Verkleinerung erfährt, da ja nicht die Spannweite, sondern die Länge der gebogenen Neutralaxe konstant bleibt. Die gesamte Verschiebung des Trägerendes setzt sich somit aus dem Einflusse der Endquerschnittsverdrehung und der Sehnenverkürzung zusammen.

Der Verschiebunganteil aus der Endquerschnittsverdrehung ist einfach anzugeben:

$$\Delta v_1 = \frac{h}{2} (\sin |\alpha_l| + \sin |\alpha_r|) \cong \frac{h}{2} (|\alpha_l| + |\alpha_r|),$$

wenn die Auflagerdrehwinkel  $\alpha_l$  und  $\alpha_r$  als relativ klein angenommen werden.

Für die Berechnung der Sehnenverkürzung wird von der Biegelinie der Neutralaxe ausgegangen. Ist diese bekannt, dann muss nur noch ausgedrückt werden, dass die Bogenlänge konstant bleibt:

$$\int_0^l ds = l.$$

Wird die Integration dagegen über die Sehnenlänge durchgeführt, dann ist die obere Integrationsgrenze um die Verkürzung der Sehne  $\Delta v_2$  gegenüber der Bogenlänge zu verkleinern. Da weiterhin der Tangentenwinkel  $\varphi$  an die Biegelinie als klein angenommen werden kann, dürfen sin  $\varphi \cong \varphi$  gesetzt und die Glieder höherer Ordnung von  $\varphi$  vernachlässigt werden. Somit erhält man

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} \cong \frac{dx}{\sqrt{1 - \varphi^2}} \cong \left( 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{3}{8} \varphi^4 + \frac{5}{16} \varphi^6 + \dots \right) dx,$$

$$\int_0^{l-\Delta v_2} \left( 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 \right) dx = l.$$

Beim Einsetzen der oberen Integrationsgrenze kann man wegen der Kleinheit der Sehnenverkürzung die Glieder höherer Ordnung von  $\Delta v_2$  unterdrücken. Damit erhält man eine lineare Gleichung für  $\Delta v_2$ . Die gesamte Verschiebung  $\Delta v$  beträgt somit

$$\Delta v = \Delta v_1 - \Delta v_2.$$

### Beispiele

#### 1. Gleichmässig verteilte Belastung $p$

$$y = \frac{pl^4}{24 EI} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \quad \xi = x/l \quad f = y \left( \xi = \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI}$$

$$y' = \varphi = \frac{pl^3}{24 EI} (1 - 6\xi^2 + 4\xi^3) \quad \alpha_l = -\alpha_r = \varphi(\xi = 0) = -\frac{pl^3}{24 EI}$$

$$\boxed{\frac{\Delta v}{l} = 3,2 \frac{f}{l} \left[ \frac{h}{l} - \frac{1,554 f/l}{2 + 10,24 (f/l)^2} \right]}$$

Für  $f/l < 1$ ,  $(f/l)^2 \ll 1$  gilt näherungsweise

$$\boxed{\frac{\Delta v}{l} \cong 3,2 \frac{f}{l} \left[ \frac{h}{l} - 0,78 \frac{f}{l} \right]}$$

#### 2. Einzellast $P$ in Balkenmitte

$$y = -\frac{Pl^3}{48 EI} (4\xi^3 - 3\xi) \left( 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right) \quad f = y \left( \xi = \frac{1}{2} \right) = \frac{Pl^3}{48 EI}$$

$$y' = \varphi = -\frac{Pl^2}{16 EI} (4\xi^2 - 1) \quad \alpha_l = -\alpha_r = \varphi(\xi = 0) = -\frac{Pl^2}{16 EI}$$

$$\boxed{\frac{\Delta v}{l} = 3 \frac{f}{l} \left[ \frac{h}{l} - 0,80 \frac{f}{l} \right]}$$

Die Bilder 2 und 3 stellen die Diagramme für die beiden Lastfälle dar. Die darin eingezeichneten Versuchswerte zeigen eine gute Über-

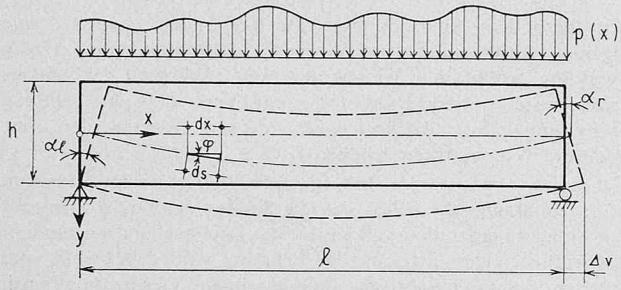


Bild 1. Statisches System mit Bezeichnungen

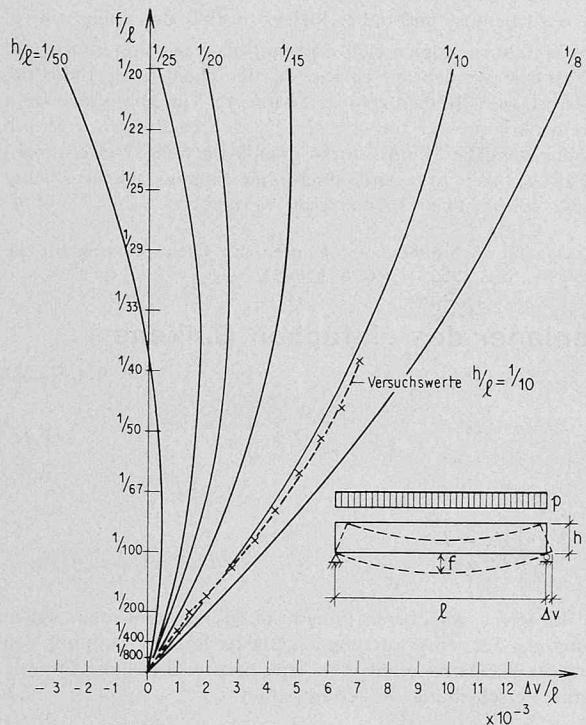


Bild 2. Widerlagerverschiebung beim einfachen Balken in Funktion der Durchbiegung  $f$  in Balkenmitte und der Trägerhöhe  $h$  infolge gleichmäigig verteilter Belastung  $p$

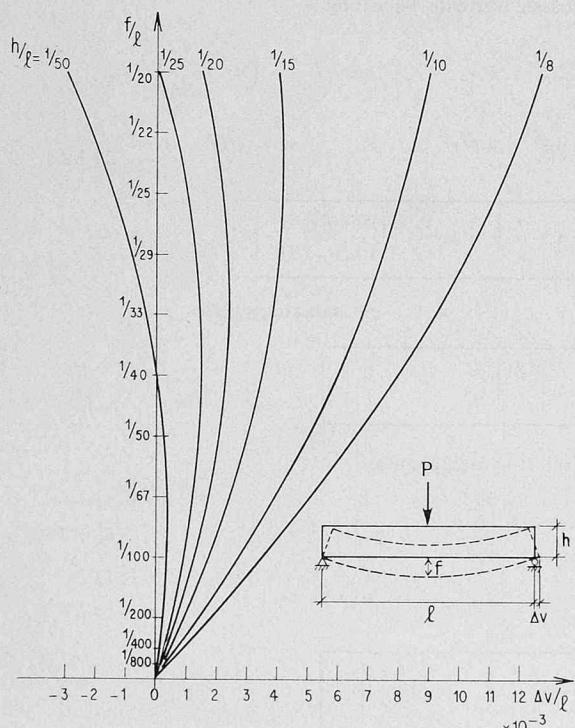


Bild 3. Widerlagerverschiebung beim einfachen Balken in Funktion der Durchbiegung  $f$  in Balkenmitte und der Trägerhöhe  $h$  infolge Einzellast  $P$  in Balkenmitte

einstimmung mit den gerechneten Werten. Die Diagramme lassen aber auch erkennen, dass bei den normalerweise vorkommenden Durchbiegungsverhältnissen  $f/l < 1/500$  der Verschiebungsanteil aus der Sehnenverkürzung gegenüber dem aus der Endquerschnittsverdrehung vernachlässigbar klein ist. Dagegen kann bei schlanken Trägern ( $h/l$  klein) und grossen Durchbiegungen ( $f/l$  gross), wie das etwa bei Bruchversuchen vorkommen kann, der Verschiebungsanteil aus der Sehnenverkürzung deutlich in Erscheinung treten, so dass sich sogar die Richtung der Verschiebung ändern kann.

Adresse des Verfassers: *Marc Ladner, dipl. Ing. ETH, EMPA, Überlandstrasse 129, 8600 Dübendorf.*

## Hundert Jahre J. M. Voith

DK 061.5:621

Am 20. Mai 1967 feiert die Firma *J. M. Voith*, GmbH, Heidenheim, ihr hundertjähriges Firmenjubiläum. Die weltbekannte, hauptsächlich im Bau von Wasserturbinen, Getrieben und Papiermaschinen führende Maschinenfabrik, deren Stammwerk heute rd. 7500 Angehörige beschäftigt, ging aus kleinen Anfängen hervor: Am 1. Januar 1867 übernahm *Friedrich Voith* die Leitung der Maschinenfabrik, die sein Vater *Johann Matthäus Voith* in 40jähriger emsiger Tätigkeit aufgebaut hatte. Das Arbeitsprogramm umfasste damals die Aufstellung und Reparatur von Textilmaschinen, Triebwerken, Mühlen und kleinen Papiermaschinen. Schon 1870 wurde der Wasserturbinenbau aufgenommen und im folgenden Jahr eine zweite Giesserei errichtet. 1873 ist die erste Francisturbine hergestellt worden. 1904 begann die Lieferung von insgesamt 12 Turbinen von je 12 000 PS für die Niagara-Kraftwerke (damals die grössten Turbinen der Welt), die sich über mehrere Jahre erstreckte. Grosses Aufsehen erregte 1908 die Errichtung des ersten Pumpspeicherwerkes Deutschlands «Brunnenmühle», die zur Spitzenstromdeckung der Maschinenfabrik diente und mit zwei hydraulischen Versuchsanstalten verbunden war.

1912 wurde die Firma in eine Offene Handelsgesellschaft umgewandelt, in die auch die Söhne Friedrich Voiths, Walter, Hermann und später auch Hanns eintraten. Das Stammwerk hat sich trotz der Rückschläge in der Zeit des Ersten Weltkrieges den rasch zunehmenden Aufträgen entsprechend schrittweise vergrössert. Schon 1903 kam eine Zweigniederlassung in St. Pölten, Niederösterreich, hinzu. Bemerkenswert ist die Aufnahme neuer Fabrikationszweige in der Zwischenkriegszeit, so die Turbokupplungen und Turbogetriebe nach dem Föttinger-Prinzip, der Bau von Axialgebläsen, von Voith-Schneider-Schiffsspropellern<sup>1)</sup> und von Speicherpumpen grosser Leistungen. Die Beschäftigtenzahl stieg im Jahre 1939 auf 4000.

Nach dem Zweiten Weltkrieg erfuhr das Unternehmen einen erneuten Aufschwung. Er wirkte sich auf allen Produktionszweigen in stark erhöhten Lieferzahlen aus. Die grossen und vielseitigen Anforderungen im Export von Grossmaschinen machten ein weit-sichtiges Planen in Europa und Übersee erforderlich. Teils beteiligte man sich an bestehenden Unternehmungen, teils gründete man neue Fabriken. Das geschah in Spanien, England, Indien und Brasilien. Neu kamen verwandte Arbeitsgebiete hinzu, so z.B. Anlagen für die Reinigung von Frisch- und Abwasser sowie Maschinen zur Kunststoffverarbeitung. Besondere Aufmerksamkeit wurde dem Ausbau der Forschungs- und Versuchsanstalten sowie deren Ausrüstung mit modernsten Messeinrichtungen geschenkt. Zur Verfügung stehen: Eine Forschungsanstalt für den gesamten Papiermaschinenbau, zwei hydraulische Versuchsanstalten für Niederdruckturbinen, Hochdruckturbinen und Pumpen, sowie für wasserbauliche Untersuchungen ein Umlaufgerinne für Messungen an Schiffsmodellen und Voith-Schneider-Propeller-Modellen, eine lufttechnische Versuchsanstalt mit Windkanal, Prüfstände für Voith-Schneider-Propeller, für Zahnradgetriebe, für Turbogetriebe und Turbokupplungen sowie eine gut ausgestattete Materialprüfungsanstalt.

Mit unseren aufrichtigen Glückwünschen zum hundertjährigen Bestehen verbinden wir die zuversichtliche Hoffnung, es möchte sich das heute blühende Unternehmen auf der bisher verfolgten Linie weiter entwickeln und dank gutem Geist und hoher Arbeitsqualität auch fernerhin der Wohlfahrt und dem Frieden dienen.

*A. Ostertag*

<sup>1)</sup> Beschreibung siehe SBZ 1959, H. 25, S. 387–392 und H. 26, S. 410–417.