**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
**Band:** 84 (1966)
**Heft:** 50

**Artikel:** Rohrleitungshydraulik
**Autor:** Zweifel, Otto
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-69039

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

HERAUSGEGEBEN VON DER VERLAGS-AKTIENGESELLSCHAFT DER AKADEMISCHEN TECHNISCHEN VEREINE, ZÜRICH

# Rohrleitungshydraulik

## Wissenschaftlichkeit und Geltungsbereich der Formel nach Manning-Strickler und ähnlicher Erfahrungsgleichungen

Von Prof. **O. Zweifel**, ETH, Zürich

DK 532.542

*Der vorliegende Beitrag ist als Ergänzung zu einem in der SBZ erschienenen Aufsatz[1]) gedacht, in welchem die Manning-Strickler-Formel für natürliche Flussprofile sowie neue, ähnlich aufgebaute Beziehungen für hydraulisch rauhe und hydraulisch glatte Rohre aufgeführt wurden. In diesem Zusammenhang sind Zweifel in bezug auf die «λ-Formel» geäussert worden, weil die dort auftretenden Exponenten angeblich nicht stimmen könnten. Diese Äusserungen erwecken den Eindruck, dass die an den Strömungen in offenen Gerinnen gemachten Erfahrungen im Widerspruch zur allgemeinen Strömungslehre ständen, was keinesfalls zutrifft. Im folgenden soll deshalb versucht werden, diese scheinbaren Widersprüche zu beseitigen.*

*Es muss ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass der Strömungstheoretiker in diesen Ausführungen keine neuen Erkenntnisse vorfinden wird; es handelt sich nur darum, in mathematischen Umformungen trivialster Art zu zeigen, in welcher Weise die sehr brauchbaren Erfahrungsformeln der Bauingenieure mit den allgemein gültigen Erkenntnissen der heutigen Strömungslehre[2]) zusammenhängen und welche Rechnungsgenauigkeit bei ihrem Gebrauch zu erwarten ist.*

### Bezeichnungen

| | |
|---|---|
| $L$ | Leitungslänge |
| $F$ | Strömungsquerschnitt |
| $U$ | benetzter Umfang |
| $R_h = F/U$ | hydraulischer Radius |
| $D = 4F/U$ | (äquivalenter) Rohrdurchmesser |
| $\varepsilon$ | absolute Rauhigkeit (Korndurchmesser bei äquivalenter Sandrauhigkeit) |
| $\varepsilon/D$ | relative Rauhigkeit |
| $\varrho = \gamma/g$ | Dichte |
| $\gamma$ | spez. Gewicht |
| $g$ | Erdbeschleunigung |
| $\eta$ | Zähigkeit |
| $\nu = \eta/\varrho$ | kinematische Zähigkeit |
| $v = Q/F$ | mittlere Strömungsgeschwindigkeit |
| $Q$ | Volumenstrom |
| $\Delta p_v$ | Druckverlust, Energieverlust je Volumeneinheit |
| $h_v = \Delta p_v/\gamma$ | Verlusthöhe, Energielinienabsenkung |
| $J = h_v/L$ | Energieliniengefälle, bzw. Gefälle einer Leitung bei konstantem Druck (z. B. bei freier Oberfläche) |
| $Re = v\,D/\nu$ | Reynoldssche Zahl |
| $k = 1/n$ | Konstante der Stricklerschen Gleichung (4a) |
| $n = 1/k$ | Konstante der Manningschen Gleichung (Manning's Roughness Coefficient) |
| $k_r$, $k^*$ | Konstanten der Gl. (4b) und (4c) |
| $\lambda$ | Rohrreibungszahl nach Gl. (1) bzw. Bild 1 |
| $\lambda_f$ | modifizierte Rohrreibungszahl nach Gl. (3) |
| $\lambda_{MS}$ $\lambda'_{MS}$ | der Manning-Strickler-Formel entsprechende Rohrreibungszahl $\lambda_f$ nach Gl. (8a) bzw. Bild 2 |
| $\lambda_r$ $\lambda'_r$ / $\lambda_g$ $\lambda'_g$ | Rohrreibungszahl $\lambda_f$ in den Gleichungen (8b) und (8c) für rauhe bzw. für glatte Rohre |

[1]) Kritische Betrachtungen zur Rohrhydraulik. Von *A. Kropf*. SBZ 1966, H. 23, S. 439–443.

[2]) Im folgenden wird darauf verzichtet, in Literaturangaben auf alle einzelnen Arbeiten von *Nikuradse* u. a. zu verweisen. Stattdessen sei empfohlen, zusammenfassende Werke über die Strömungslehre zu konsultieren, so zum Beispiel *Bruno Eck*, Technische Strömungslehre u. a.

### Einleitung

Die Strömung in geraden Rohren mit kreisförmigem Querschnitt ist in zahlreichen wissenschaftlichen Untersuchungen so gründlich geklärt worden, dass man sich fragen muss, ob es eigentlich berechtigt ist, dass der praktisch arbeitende Bauingenieur in seiner Hydraulik noch immer mit eigenen Erfahrungsformeln arbeitet, wie sie *A. Kropf*. in seinem Aufsatz «Kritische Betrachtungen zur Rohrhydraulik»[1]) anführt.

Es handelt sich allerdings dabei um aus Potenzprodukten bestehende Beziehungen, mit denen im turbulenten Gebiet in bestechend einfacher Weise gerechnet werden kann: Sobald die Oberflächenbeschaffenheit der Wandungsart feststeht, genügt für sämtliche Leitungsdurchmesser ein einziger Proportionalitätsfaktor, während bekanntlich der λ-Wert der allgemeinen Rohrhydraulik auch bei gleichbleibendem Wandmaterial in weiten Grenzen mit dem Rohrdurchmesser variiert.

Der Aufbau dieser Erfahrungsformeln sieht zunächst höchst verdächtig aus, und die Proportionalitätsfaktoren haben so merkwürdige Dimensionen (z. B. $m^{1/3} \cdot s^{-1}$ oder $m^{0,33} \cdot s^{-0,915}$), dass man sich unwillkürlich frägt, welche Abhängigkeiten dahinter verborgen sind. Es sei gleich verraten, dass in den vorliegenden Ausführungen gezeigt werden soll, warum diese Formeln gar nicht so unwissenschaftlich sind, wie sie auf den ersten Blick aussehen. Im Gegenteil wird ihre vermehrte Anwendung empfohlen, wobei auch an den projektierenden Maschineningenieur gedacht ist. Allerdings muss gleichzeitig vorgeschlagen werden, die Beziehungen in eine Form zu bringen, in welcher nur noch dimensionslose Koeffizienten auftreten und wo dafür die wirklichen Abhängigkeiten sichtbar werden.

Vorerst aber sei die Frage angeschnitten, weshalb in der Baupraxis überhaupt ein Bedürfnis besteht, der allgemeinen Rohrhydraulik mehr oder weniger aus dem Wege zu gehen. Dazu ist zunächst festzustellen, dass die Rohrreibungszahl λ erst bestimmt werden kann, wenn die Reynoldssche Zahl *Re* und die relative Rauhigkeit $\varepsilon/D$ bekannt ist. Das hat zur Folge, dass alle Aufgaben, bei welchen die Geschwindigkeit oder der Durchmesser unbekannt ist, nur durch Probieren gelöst werden können. Hinzu kommt aber nun, dass die so erhaltenen Lösungen in der Regel doch nur Näherungen sind. Das ist sogar bei kreisförmigem Querschnitt der Fall, weil sich die absolute Rauhigkeit ε meistens nur sehr ungenau abschätzen lässt. Handelt es sich zudem noch um sogenannte gegliederte Querschnitte, so kommt eine weitere Unsicherheit hinzu, weil bekannt ist, dass es für gewisse Profilformen[3]) auch bei turbulenter Strömung unzulässig ist, für die Bestimmung von λ anstelle des Durchmessers *D* den vierfachen Wert des hydraulischen Radius $R_h = F/U$ einzusetzen. Was schliesslich die Rauhigkeitsform anbetrifft, die das Übergangsgebiet zwischen hydraulisch rauhen und hydraulisch glatten Rohren beeinflusst, so dürfte ebenfalls noch keinesfalls feststehen, dass die für «normale» technische Rauhigkeiten gültige Colebrooksche Übergangsbeziehung wirklich in allen Fällen (also z. B. auch im Falle der Boden- und Geschieberauhigkeit) die richtigen Verhältnisse wiedergibt.

Wenn also aus all diesen Gründen auch bei Anwendung der theoretisch exakten Rohrhydraulik nur Näherungslösungen erhältlich sind, liegt es auf der Hand, nach empirischen Gleichungen zu suchen, die so aufgebaut sind, dass sie in einfachster Weise nach jeder Unbekannten (Durchflussmenge, Querschnittgrösse usw.) aufgelöst werden können und der Einfluss der Änderung einzelner Grössen leicht überblickbar wird.

In den nachfolgenden Ausführungen wird zunächst angegeben, welche Formen theoretisch zulässige Ansätze für den Energieverlust in geraden Rohrleitungen haben dürfen. Mit diesen Ansätzen werden

[3]) Als Beispiel seien zwei aneinander grenzende, parallel geführte Kanäle erwähnt, von denen der eine eine geringe, der andere eine grosse Tiefe aufweist (Fall der Kanalform mit Niederwasserrinne).

dann die von Kropf angegebenen Gleichungen verglichen, d. h. es wird geprüft, wie weit sie in bezug auf Allgemeinheit und Genauigkeit richtig sind, wenn man sie auf die bekannte Kreisrohr-Hydraulik anwendet. Durch diesen Vergleich wird man schliesslich von selbst auf eine allgemeinere Schreibweise dieser Gleichungen geführt, in der die Zusammenhänge klar erkennbar werden.

**Theoretisch zulässige Ansätze für den Energieverlust**

Unter den üblichen Voraussetzungen (kleine Machsche Zahlen, Vernachlässigung der Anlaufstrecke) ist in dem Ansatz für gerade Kreisrohre mit konstantem Querschnitt

$$(1) \qquad \Delta p_v = \lambda \frac{L}{D} \frac{\varrho}{2} v^2$$

die Rohrreibungszahl $\lambda$ nur eine Funktion der Reynoldsschen Zahl $Re$ und der relativen Wandrauhigkeit $\varepsilon/D$ sowie der Rauhigkeitsform. Für «normale» technische Rauhigkeitsformen ist $\lambda$ im Bild 1 dargestellt. Im laminaren Bereich wird $\lambda = 64 \cdot Re^{-1}$, ist also unabhängig von $\varepsilon/D$. Im turbulenten Gebiet genügt $\lambda$ weitgehend der Interpolationsgleichung von C. F. Colebrook,

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[ \frac{2{,}51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3{,}71\, D} \right]$$

die in den Grenzfällen für grosse Werte von $Re$ bzw. kleine Werte von $\varepsilon/D$ in die Prandtl-v. Karmanschen Gesetze für rauhe bzw. für glatte Rohre übergeht. Die absolute Rauhigkeit $\varepsilon$ ist eine Länge und entspricht grössenordnungsmässig[4]) der Höhe der einzelnen Rauhigkeitserhebungen. Für eine bestimmte Wandart muss $\varepsilon$ mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) rückwärts aus den Versuchen bestimmt werden, wobei möglichst im Bereich der hydraulisch rauhen Rohre gemessen werden sollte, weil dort die Rauhigkeitsform keine Rolle mehr zu spielen scheint.

Es muss erwähnt werden, dass der Ansatz (1) insofern willkürlich ist, als auch eine andere Rohrreibungszahl $\lambda_f$ mit

$$(3) \qquad \lambda_f = \lambda\, f(Re,\ \varepsilon/D)$$

definiert werden könnte, wobei $f$ eine vollständig beliebige Funktion von $Re$ und $\varepsilon/D$ sein darf. Diese Funktion wird dann einerseits so gewählt, dass $\lambda_f$ in einem viel verwendeten Rechnungsbereich nur noch wenig variiert und zudem so aufgebaut ist, dass sie einfachstes Rechnen erlaubt.

Zwei Beispiele mögen das illustrieren: Setzt man $\lambda_f = \lambda\, Re/2$, so wird $\Delta p_v = \lambda_f\, \eta\, v\, L/D^2$. Diese Beziehung ist ganz dem laminaren Gebiet angepasst; dort wird $\lambda_f = 32$.

Oder man schreibt $\lambda_f = \lambda \left(2 \log 3{,}71 \frac{D}{\varepsilon}\right)^2$ und $\Delta p_v = \lambda_f \frac{L}{D} \frac{\varrho}{2} \cdot \left(\frac{v}{2 \log 3{,}71\, D/\varepsilon}\right)^2$, dann wird im Gebiet für hydraulisch rauhe Rohre $\lambda_f = 1$. In diesem Fall ist allerdings die Forderung nach einfachstem Rechnen nicht erfüllt.

**Die Abflussformeln von Manning-Strickler[5]) und Kropf**

Wenden wir uns jetzt den von Kropf angeführten und hier zur Diskussion gestellten Erfahrungsformeln zu, wobei diese im folgenden absichtlich nach $\Delta p_v$ bzw. nach dem Gefälle $J$ aufgelöst angeschrieben werden, damit der Vergleich mit Gl. (1) augenfälliger wird.

*a) Für Flussläufe und Gerinne (Formel nach Manning-Strickler)*

$$(4a) \qquad \frac{\Delta p_v}{\gamma L} = J = R_h^{-4/3} \left(\frac{v}{k}\right)^2 = R_h^{-4/3} (n\, v)^2$$

*b) Für rauhe Rohre*

$$(4b) \qquad \frac{\Delta p_v}{\gamma L} = J = R_h^{-1{,}24} \left(\frac{v}{k_r}\right)^2$$

*c) Für glatte Rohre*

$$(4c) \qquad \frac{\Delta p_v}{\gamma L} = J = R_h^{-1{,}17} \left(\frac{v}{k^*}\right)^{1{,}83}$$

[4]) Genauer ausgedrückt handelt es sich bei $\varepsilon$ um die äquivalente Sandrauhigkeit nach Nikuradse, wobei $\varepsilon$ dem Sandkorndurchmesser entspricht.

[5]) In der englisch sprechenden Welt ist die betreffende Formel unter dem Namen «Manning-Formula» bekannt, wobei der «Manning's Roughness Coefficient» $n$ der Reziprokwert der Stricklerschen Konstanten $k$ ist und ebenfalls dem metrischen Masssystem entspricht.

Für die Koeffizienten $k$ bzw. $k_r$ werden je nach der absoluten Rauhigkeit der Wandoberfläche Zahlenwerte von 20 bis 100 $m^{1/3}\, s^{-1}$ bzw. $m^{0{,}24}\, s^{-1}$ angegeben, während für $k^* = 134\, m^{0{,}33}\, s^{-0{,}915}$ gesetzt wird.

Aus der hier gewählten Schreibart ist nicht ohne weiteres ersichtlich, woher diese merkwürdigen Dimensionen kommen. Ebenso wird nicht klar, ob die Formeln unverändert auch für andere Strömungsmedien benützt werden dürfen, also z. B. für die Berechnung von Ventilationskanälen oder Ölleitungen. Es sei vorweggenommen, dass das bei den ersten beiden Gleichungen zulässig ist, bei der dritten hingegen nicht.

Um mehr Licht in die wirklichen Zusammenhänge zu bringen, identifiziert man die drei Formeln mit Gl. (1) und berücksichtigt die Beziehungen

$$D = 4\, R_h \qquad Re = v\, D/\nu \qquad \varrho = \gamma/g$$

Damit findet man

$$(5a) \qquad \frac{1}{n^2} = k^2 = \frac{4^{1/3} \cdot 8\, g}{\lambda\, (D/\varepsilon)^{1/3}}\, \varepsilon^{-1/3} \qquad \text{(Manning-Strickler)}$$

$$(5b) \qquad k_r^2 = \frac{4^{0{,}24} \cdot 8\, g}{\lambda\, (D/\varepsilon)^{0{,}24}}\, \varepsilon^{-0{,}24} \qquad \text{(rauhe Rohre)}$$

$$(5c) \qquad k^{*1{,}83} = \frac{4^{0{,}17} \cdot 8\, g}{\lambda\, Re^{0{,}17}}\, \nu^{-0{,}17} \qquad \text{(glatte Rohre)}$$

Anhand dieser Gleichungen lässt sich nun folgendes feststellen:

a) Die Nennerausdrücke entsprechen $\lambda_f$ nach Gleichung (3). Sie sind in gewissen Rechnungsbereichen wenig veränderlich und dürfen dort mit guter Näherung als konstant betrachtet werden.

b) Die Stricklersche Konstante $k$ bzw. $k_r$ ist in diesen Rechnungsbereichen praktisch eine blosse Funktion der absoluten Rauhigkeit. Für alle nach Grösse und Form unterschiedlichen Strömungsquerschnitte genügt es also, für eine bestimmte Wandart diese Konstante $k$ zu kennen, um in einfachster Art mit den Gleichungen (4a) und (4b) Abflussmengen, Rohrdurchmesser oder das richtige Gefälle bestimmen zu können.

c) Die Konstanten $k$ und $k_r$ dürfen auch für andere Strömungsmedien (Öl, Luft usw.) benutzt werden, dagegen müsste $k^*$ für glatte Rohre wegen der Abhängigkeit von der kinematischen Zähigkeit erst umgerechnet werden.

d) Alle $k$-Werte enthalten die Erdbeschleunigung $g$, weil sie im Zusammenhang mit dem Gefälle eines Gerinnes im Schwerefeld eingeführt werden.

**Transformation der Abflussformeln**

Führt man jetzt die $k$-Werte nach den Gl. (5a) bis (5c) wieder in (4a) bis (4c) ein, ergeben sich Gleichungen, welche die theoretischen Zusammenhänge besser erkennen lassen, nämlich

$$(5a) \qquad \text{Manning-Strickler:} \quad J = [\lambda\, (D/\varepsilon)^{1/3}]\, \varepsilon^{1/3}\, D^{-4/3} \frac{v^2}{2g}$$

$$(6b) \qquad \text{rauhe Rohre} \quad J = [\lambda\, (D/\varepsilon)^{0{,}24}]\, \varepsilon^{0{,}24}\, D^{-1{,}24} \frac{v^2}{2g}$$

$$(6c) \qquad \text{glatte Rohre:} \quad J = [\lambda\, Re^{0{,}17}]\, \nu^{0{,}17}\, D^{-1{,}17}\, v^{-0{,}17} \frac{v^2}{2g}$$

In dieser neuen Schreibart gewinnen die Abflussformeln an Allgemeingültigkeit. Sie sind alle von der Form

$$(7) \qquad J = [\lambda\, Re^p (D/\varepsilon)^q]\, \nu^p\, \varepsilon^q\, D^{-(1+p+q)}\, v^{-p} \frac{v^2}{2g}$$

wobei der Ausdruck in den eckigen Klammern der Grösse $\lambda_f$ aus Gl. (3) entspricht.

Rein mathematisch betrachtet können die Exponenten $p$ und $q$ willkürlich gewählt werden. Physikalisch begründet scheint allerdings nur die Wahl $p = q = 0$, die zum üblichen Rohrreibungsansatz mit $\lambda$ führt, oder $p = 1$ und $q = 0$ für das laminare Strömungsgebiet.

Aus rechnerischen Gründen dürfen aber ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit der Formeln die Exponenten $p$ und $q$ in freier Weise so gewählt werden, dass $\lambda_f$ in einem gewünschten Gebiet möglichst wenig variiert.

Da man auf solche Weise über die Gleichungen (6a) bis (6c) sowohl die Manning-Strickler-Formel (4a) wie die anderen beiden

Erfahrungsgleichungen (4b) und (4c) erhalten kann, folgt, dass im Prinzip gegen die Wissenschaftlichkeit solcher Ansätze nichts einzuwenden ist. In ihrer Form sind sie allerdings zu beanstanden; ein Aufbau nach (6a) bis (6c) oder noch besser nach den in den folgenden Abschnitten angeschriebenen Gleichungen (8a) bis (8c) ist unbedingt vorzuziehen. Bei diesen handelt es sich nämlich um dimensionsrichtige Grössengleichungen, für welche bekanntlich die Verwendung beliebiger kohärenter[6]) Masssysteme zulässig ist und wo die Abhängigkeit von der absoluten Rauhigkeit $\varepsilon$ und der kinematischen Zähigkeit $\nu$ unverdeckt sichtbar wird.

**Die Manning-Strickler-Formel als Grössengleichung**

Führt man statt $\varepsilon$ den tausendfachen Wert $1000 \cdot \varepsilon$ und $\lambda_{MS}$ statt $\lambda_f$ ein, so kann man (6a) endgültig in der folgenden Form schreiben

$$(8a)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta p}{\gamma L} = J = \lambda_{MS}\,(1000\,\varepsilon)^{1/3}\,D^{-4/3}\,\frac{v^2}{2\,g} &= \\ = \lambda'_{MS}\,(1000\,\varepsilon)^{1/3}\,R_h^{-4/3}\,\frac{v^2}{2\,g} \end{aligned} \right.$$

*Manning-Strickler für Flussläufe und Gerinne*

Die Abhängigkeit von $\lambda_{MS}$ als Funktion von $Re$ und $\varepsilon/D$ ist für Kreisrohre im turbulenten Gebiet auf Bild 2 dargestellt. Es fällt auf, dass die in Bild 1 weit auseinanderliegenden Kurven von $\varepsilon/D = 0{,}001$ bis $\varepsilon/D = 0{,}1$ hier sehr eng zusammenkommen und einen Minimalwert von $\lambda_{MS} = 0{,}0176$ nicht unterschreiten. Begnügt man sich mit einer Genauigkeit von $\pm 10\%$, so kann man in weiten Grenzen mit einem Mittelwert rechnen, der im Verhältnis 10 zu 9 grösser ist als dieser Minimalwert, nämlich

$$(9a)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{MS} &= 0{,}0196 \\ \lambda'_{MS} &= 0{,}00308 \end{aligned} \right.$$

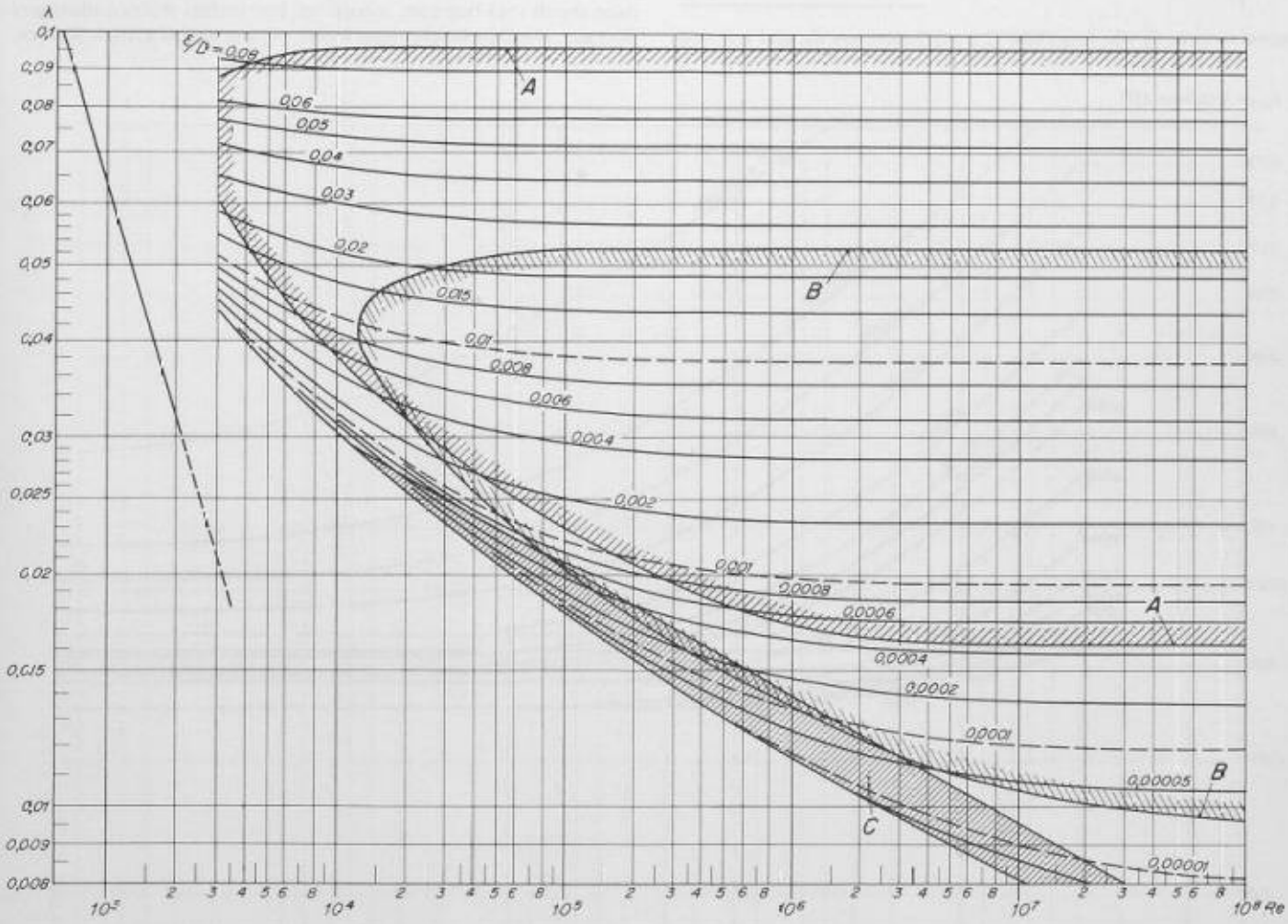
Der Bereich, innerhalb dessen mit diesen Werten gerechnet werden darf, ist auf Bild 1 mit der Grenzkurve $A$ umrandet. Die Rechengenauigkeit beträgt dort $\pm 10\%$ in bezug auf $\Delta p$ oder $J$ bzw. 5% in bezug auf $v$. Dieses Gebiet liegt bei hohen Reynoldsschen Zahlen zwischen $\varepsilon/D = 0{,}0005$ und $\varepsilon/D = 0{,}1$. Es reicht also bis zu sehr groben relativen Rauhigkeiten, so dass verständlich wird, warum die Manning-Strickler-Formel auch für natürliche Flussprofile gebraucht werden kann.

Es darf empfohlen werden, die hier für Kreisrohre angegebenen Werte von $\lambda_{MS}$ bzw. $\lambda'_{MS}$ auch für andere Querschnitte beizubehalten, solange keine besseren Angaben erhältlich sind. Die einzusetzenden $\varepsilon$-Werte (in m) lassen sich ohne weiteres aus allfällig in der Literatur angegebenen $k$- oder $n$-Werten ausrechnen, da aus der Identifikation von (8a) und (4a) folgende Beziehung (vgl. Bild 3) hervorgeht:

$$(10)\quad (1000\,\varepsilon) = \left(\frac{2\,g}{\lambda'_{MS}\,k^2}\right)^3 \approx \left(\frac{80}{k}\right)^6 = (80\,n)^6$$

Dabei ist nach Gl. (9a) $\lambda'_{MS} = 0{,}00308$ gesetzt worden, so dass in dieser Weise bestimmte und in Gl. (8a) eingesetzte $\varepsilon$-Werte genau zu den selben Rechnungsresultaten führen wie $k$ oder $n$ in der ursprünglichen Formel (4a) nach Manning-Strickler.

[6]) Bei drei Grundgrössen für die mechanischen Zusammenhänge.




| Bereich | Näherungswert für $\lambda \pm 10\%$ | Anwendung für Gleichung |
|---|---|---|
| A | $0{,}0196 \cdot (1000\,\varepsilon/D)^{1/3}$ | (8a) bzw. (4a) Manning-Strickler |
| B | $0{,}0218 \cdot (1000\,\varepsilon/D)^{1/4}$ | (8b) bzw. (4b) rauhe Rohre |
| C | $0{,}129 \cdot Re^{1/4}$ | (8c) bzw. (4c) glatte Rohre |

Bild 1. Rohrreibungszahl $\lambda$ und Gültigkeitsbereich von Näherungsansätzen
Die im Prinzip den Erfahrungsformeln (4a) bis (4c) bzw. (8a) bis (8c) zugrundeliegenden Näherungen für $\lambda$ geben in den eingezeichneten Bereichen A, B und C eine Rechengenauigkeit von $\pm 10\%$ für $\Delta p_v$ und J, bzw. $\pm 5\%$ für v und Q

In der Tabelle 1 über Rauhigkeitswerte sind eine Reihe von $k$-Werten angegeben, aus denen nach (10) entsprechende $\varepsilon$-Werte berechnet wurden. In den Fällen, wo gleichzeitig $\varepsilon$-Werte nach Originalangaben vorhanden sind, wie bei Stahl-, Holz- und Betonrohren, ergibt sich grössenordnungsmässig eine gute Übereinstimmung.

Die Gleichung (8a) darf nicht nur als vollwertiger Ersatz für die Manning-Strickler-Formel angesprochen werden, sondern sie kann ihrer Form nach zwanglos im Rahmen der heutigen Strömungslehre eingeordnet werden. Unter Verzicht auf die Anwendbarkeit für gröbste relative Rauhigkeiten lässt sich ihr Gültigkeitsbereich mit etwas abgeänderten Exponenten (vgl. nächsten Abschnitt) auch noch auf sehr kleine relative Rauhigkeiten ausdehnen, wie sie bei den Rohrleitungen (auch des Maschinenbaus) vorkommen.

**Die der Rohrleitungsberechnung angepasste Beziehung von Manning-Strickler**

Analog zum vorhergehenden Abschnitt können auch die von Kropf angegebenen Gleichungen (4b) und (4c) für rauhe bzw. für glatte Rohre umgeformt werden. Dabei scheint es vorteilhaft zu sein, die Exponenten 0,24 und 0,17 durch 1/4 bzw. 1/6 zu ersetzen, was den 10%-Fehlerbereich nur in einem belanglosen Ausmass verlagert, jedoch oft ein einfacheres Rechnen erlaubt.

Damit schreibt man anstelle von Gl. (6b):

*Für rauhe Rohre:*

$$(8\,\mathrm{b})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\gamma L} = J = \lambda_r\,(1000\,\varepsilon)^{1/4}\,D^{-5/4}\,\frac{v^2}{2g} &= \\ &= \lambda_r'\,(1000\,\varepsilon)^{1/4}\,R_h^{-5/4}\,\frac{v^2}{2g} \end{aligned}\right.$$

wobei $\lambda_r$ bzw. $\lambda_r'$ wie $\lambda_{MS}$ (Bild 2) Funktionen von $Re$ und $\varepsilon/D$ sind.

Die Werte

$$(9\,\mathrm{b})\quad \left\{\begin{aligned} \lambda_r &= 0{,}0218 \\ \lambda_r' &= 0{,}00386 \end{aligned}\right.$$

können hier als gute Mittelwerte für die Rechnung eingesetzt werden.

Entsprechend kann statt Gl. (6c) geschrieben werden:

*Für glatte Rohre:*

$$(8\,\mathrm{c})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\lambda L} = J = \lambda_g\,\nu^{1/6}\,D^{-7/6}\,v^{-1/6}\,\frac{v^2}{2g} &= \\ &= \lambda_g'\,\nu^{1/6}\,R_h^{-7/6}\,v^{-1/6}\,\frac{v^2}{2g} \end{aligned}\right.$$

(für Wasser von 20 °C wird $\nu^{1/6} = 0{,}1\ \mathrm{m}^{1/3}\,\mathrm{s}^{-1/6}$)

Als Mittelwerte für $\lambda_g$ und $\lambda_g'$ seien hier angegeben:

$$(9\,\mathrm{c})\quad \left\{\begin{aligned} \lambda_g &= 0{,}129 \\ \lambda_g' &= 0{,}0255 \end{aligned}\right.$$

Auf Bild 1 ist der Gültigkeitsbereich dieser Beziehungen bei einem zulässigen Fehler von ± 10% (in bezug auf $\Delta p_v$ oder $J$) ebenfalls eingetragen, und zwar entspricht Gebiet $B$ der Gleichung (8b) und $C$ der Gleichung (8c) bei Verwendung der in Gl. (9b) Gl. bzw. (9c) angegebenen Werte.

Dabei ist festzustellen, dass diese Bereiche aneinander grenzen und zusammen das wichtigste Rechnungsgebiet überdecken. Innerhalb der angegebenen Rechnungsgenauigkeit darf also weitgehend mit der Gleichung (8b) gerechnet werden. Nach unten wird diese dann durch (8c) begrenzt, sobald bei den rauhen Rohren niedrigere Energieverluste in Erscheinung treten würden als bei glatten Rohren.

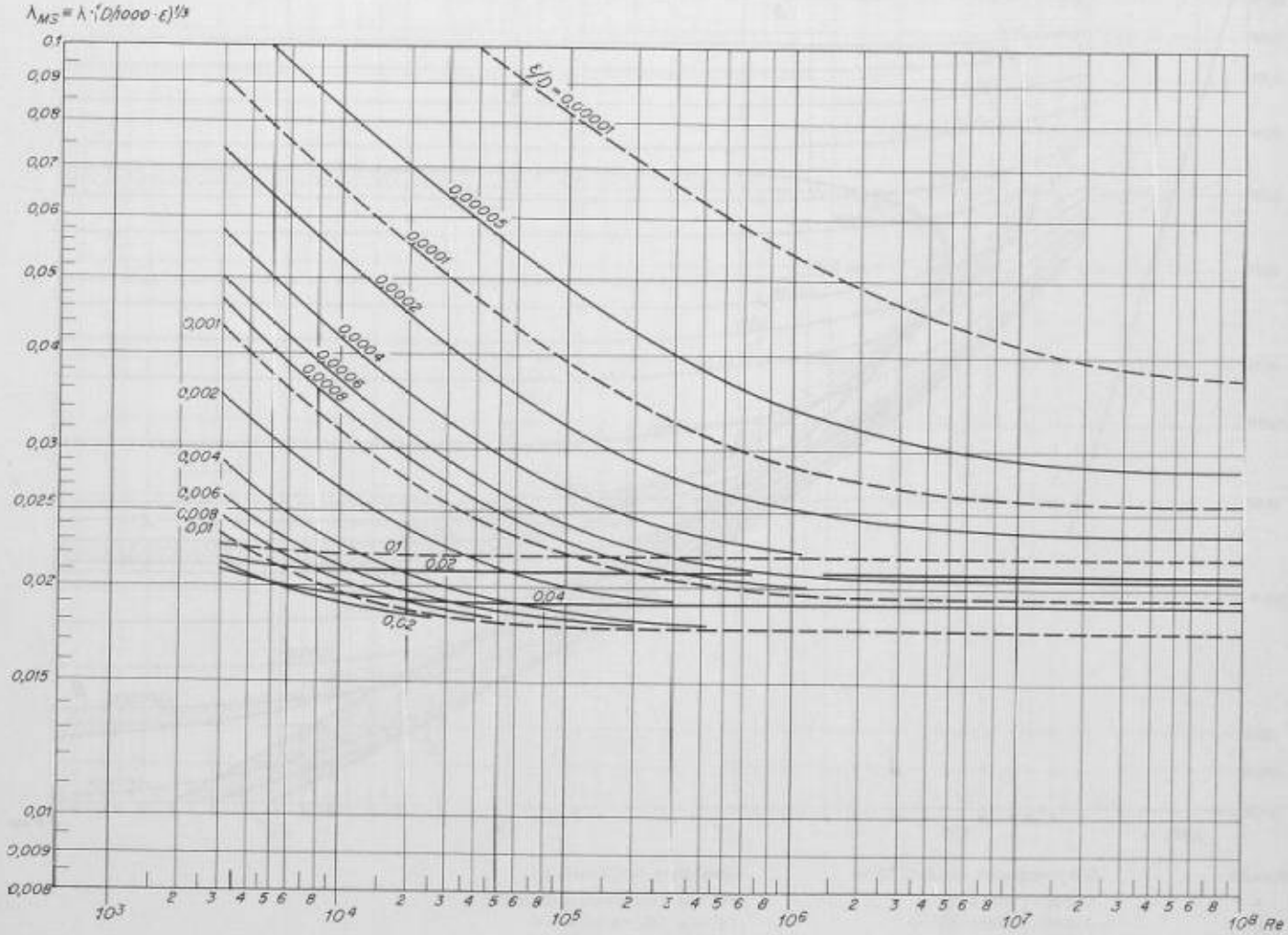



Bild 2. Die der Manning-Strickler-Formel entsprechende Rohrreibungszahl $\lambda_{MS}$

Der Stricklersche k-Wert bzw. der Manningsche n-Wert ist über die Beziehung $1/k^2 = n^2 =$ konst. $\lambda_{MS} \cdot \varepsilon^{1/3}$ in erster Linie eine Funktion der absoluten Rauhigkeit $\varepsilon$. Seine Abhängigkeit von der Reynoldschen Zahl Re und der relativen Rauhigkeit $\varepsilon/D$ steckt in $\lambda_{MS}$ (vgl. Gl. [8a]), das für Kreisrohre hier dargestellt ist. Man beachte die geringe Variation von $\lambda_{MS}$ für $Re > 10^5$ und $\varepsilon/D > 0{,}001$ oder im gesamten turbulenten Gebiet für $\varepsilon/D > 0{,}0$

Die Gleichungen gelten für alle Strömungsmedien; bei (8c) ist die entsprechende kinematische Zähigkeit einzusetzen. Gerade der letztere Umstand ist bei der von Kropf angegebenen Gleichung (4c) nicht sichtbar; der dort angegebene Wert von $k^* = 134$ gilt nur für Wasser.

Was in der Einleitung bereits angetönt wurde, sei hier nochmals wiederholt: Die eigentliche Arbeitsgleichung ist (8b); sie eignet sich vorzüglich (und besser als die übliche $\lambda$-Rechnung nach Gleichung (1)) für rasche und gute Überschlagsrechnungen. Der Einfluss der Änderung einzelner Grössen ist leicht überblickbar, und die Beziehung kann nach jeder dieser Grössen in einfachster Weise aufgelöst und abgeleitet werden, weshalb sie sich besonders auch für Optimierungsaufgaben eignet.

Man darf deshalb die Benutzung dieser Gleichungen für allgemeine Rohrleitungsberechnungen weitgehend empfehlen. Handelt es sich um Leitungen mit Querschnitten, die über $R_h = F/U$ oder $D = 4F/U$ auf den Kreisrohrquerschnitt bezogen werden können, besteht stets die Kontrollmöglichkeit über die $\lambda$-Rechnung.

Tabelle 1. Rauhigkeitswerte

| | $k$-Werte[8]) nach Manning-Strickler | $1000 \cdot \varepsilon$ in m (umgerechnet aus den $k$-Werten) | $1000 \cdot \varepsilon$ in m (nach Originalangaben)[8])[9]) |
|---|---|---|---|
| **Rohrleitungen** | | | |
| Gezogene Rohre | | | 0,0015 |
| Stahlrohre handelsüblich, je nach Gebrauchsalter | 90...100 | 0,25...0,5 | 0,05...0,20 |
| Gusseisen asphaltiert | | | 0,12 |
| Gusseisen roh | | | 0,25 |
| Eisenblech galvanisiert | | | 0,15 |
| Holzrohre | 80... 90 | 0,5 ...1 | 0,2 ...1 |
| Beton je nach Oberfläche | 80... 90 | 0,5 ...1 | 0,2 ...3 |
| Genietete Stahlrohre | | | 1 ...10 |
| Roher Felsausbruch Sohle betoniert | 40... 50 | 15...50 | |
| Stollen in rohem Felsaushub | 28... 35 | 100...400 | |
| **Gerinne** | | | |
| Werkkanäle u. Stollen verkleidet in Beton | 75... 85 | 0,7...1,5 | |
| Werkkanäle u. Stollen in Fels, unverkleidet | 30... 35 | 100...300 | |
| Werkkanäle, unverkleidet, regelmässiges Profil | 35... 40 | 50...100 | |
| Natürliche Flüsse im Unterlauf | 30... 40 | 50...300 | |
| Natürliche Flüsse im Oberlauf | 20... 30 | 300...3000 | |
| Wildbäche | 10... 20 | 3000...100000 | |

[8]) Das Fischer-Lexikon, Technik 1, Abschnitt Hydraulik (*G. Schnitter*), 1. Auflage, S. 159/160. Eine umfangreiche Sammlung von $n$-Werten findet sich in *Chow*, Open-Channel Hydraulics, 1959.

[9]) *Moody, L. F.*, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs., 56, 671–684 (1944).

Wo in speziellen Fällen Messungen als Grundlage für die Berechnung anderer Anwendungsbeispiele dienen sollen, wird man die Zahlenwerte der Proportionalitätsfaktoren und Exponenten gerne anpassen, wobei unter Umständen sogar ein allgemeinerer Ansatz entsprechend dem Aufbau der Gleichung (7) in Frage kommt.

**Zusammenfassung**

Die Formel (4a) von Manning-Strickler dient im Bauingenieurwesen der strömungstechnischen Berechnung von Gerinnen und Flussläufen und ergibt befriedigende Rechnungsresultate. Je nach der vorliegenden Wandart muss dabei auf Grund der Erfahrung ein bestimmter $k$- bzw. $n$-Wert eingesetzt werden, der im Prinzip ein Mass für die absolute Rauhigkeit ist.

Der Aufbau dieser Formel ist etwas undurchsichtig, zum Teil auch deswegen, weil es sich um eine Zahlenwert- und keine Grössengleichung handelt. Ihr Anwendungsbereich und die mit ihr zu erreichende Rechengenauigkeit ist unabgeklärt.

In seinem eingangs erwähnten Aufsatz gibt Kropf zwei ähnlich aufgebaute Gleichungen (4b) für rauhe und (4c) für glatte Rohre an, die er für die Rohrleitungsberechnung empfiehlt. Sie wurden in die vorliegende Untersuchung miteinbezogen, weil es sich dabei um absolut positiv zu wertende Vorschläge handelt.

Es ergibt sich zunächst, dass diesen etwas merkwürdigen Gleichungen die Wissenschaftlichkeit nicht grundsätzlich abgesprochen werden kann. Die scheinbaren Widersprüche zwischen der in der Praxis bewährten Formel von Manning-Strickler und der heutigen Strömungslehre erweisen sich im Gegensatz zu den von Kropf ausgesprochenen Befürchtungen als gegenstandslos.

Die mit diesen Beziehungen erreichbare Rechnungsgenauigkeit ist bei Anwendung auf die gründlich untersuchte Kreisrohrströmung abschätzbar. Entsprechend den auf Bild 1 eingezeichneten Bereichen ergibt sich bei einem zulässigen Fehler von $\pm 10\%$ in bezug auf $\Delta p$ bzw. $J$ (oder $\pm 5\%$ in bezug auf $v$), dass man von der Manning-Strickler-Formel bei hohen Reynoldsschen Zahlen für relative Rauhigkeiten von $\varepsilon/D = 0{,}0005$ bis $\varepsilon/D = 0{,}1$ — d. h. also bis zu gröbsten relativen Rauhigkeiten — befriedigende Ergebnisse erwarten darf. Für die von Kropf für rauhe Rohre angeführte Gleichung (4b) verschiebt sich der Bereich mehr in Richtung der kleineren relativen Rauhigkeiten; er grenzt weitgehend an das Gebiet der glatten Rohre an (4c).

In den vorliegenden Ausführungen wird vorgeschlagen, die Formeln von Manning-Strickler und Kropf künftig als Grössengleichungen (8a), (8b) und (8c) anzuschreiben und die äquivalente Sandrauhigkeit $\varepsilon$ nach Nikuradse einzuführen. In praktischer Hinsicht leisten diese Gleichungen mindestens das selbe, insbesondere, weil alle bekannten $k$- und $n$-Werte nach Gl. (10) oder Bild 3 ohne weiteres in entsprechende $\varepsilon$-Werte umgerechnet werden können. Zudem aber sind sie mit ihrer neuen Form in der heutigen Strömungslehre kein

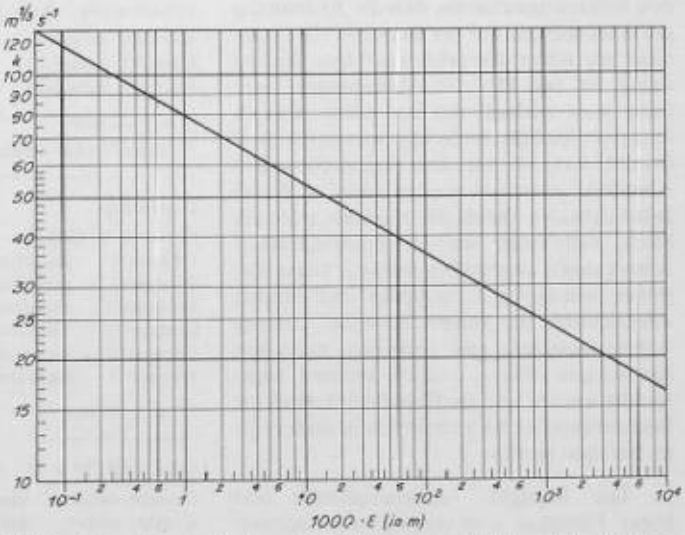



Bild 3. Umrechnung zwischen dem Stricklerschen k-Wert und der absoluten Rauhigkeit $\varepsilon$

Wird $\varepsilon$ aus bekannten Mittelwerten für k nach der dargestellten Beziehung $1000 \cdot \varepsilon = (80/k)^6$ berechnet, so ergeben sich nach der neuen Gleichung (8a) mit (9a) die selben Rechnungsresultate wie nach der ursprünglichen Manning-Strickler-Formel (4a)

Fremdkörper mehr; sie können ungezwungen neben der dort üblichen $\lambda$-Formel gebraucht werden, und bekannte $\varepsilon$-Werte bleiben hier wie dort gleicherweise verwendbar. Ferner sind die wirklichen Abhängigkeiten sichtbar geworden, d. h. es wird z. B. offenbar, was eine Änderung der absoluten Rauhigkeit $\varepsilon$ oder der kinematischen Zähigkeit $\nu$ für einen Einfluss hat.

Insbesondere die von Kropf für die Rohrleitungsberechnung nach dem Vorbild der Manning-Strickler-Formel aufgebaute und hier als Grössengleichung geschriebene Beziehung (8b) für hydraulisch rauhe Rohre verdient es, mehr verwendet zu werden. Sie eignet sich vor allem für rasche Näherungsrechnungen und Optimierungsaufgaben, wie sie der projektierende Ingenieur (auch der Maschineningenieur) zu lösen hat. Selbstverständlich ist es vorsichtig, sich anhand von Bild 1 zu versichern, dass die Rechnungspunkte im Gültigkeitsbereich dieser Beziehung liegen. Bei höheren Genauigkeitsansprüchen wird man schliesslich eine Kontrollrechnung mit dem richtigen $\lambda$-Wert nach Gl. (1) durchführen, wobei man sich aber fragen muss, wie genau solche Rechnungen überhaupt sein können, wenn, wie in den meisten Fällen, die Rauhigkeit $\varepsilon$ nur sehr grob abgeschätzt werden kann.

Adresse des Verfassers: Prof. *Otto Zweifel*, Eidg. Techn. Hochschule, Sonneggstrasse 3, 8006 Zürich.

# Die Krümmung abgebogener Armierungsstähle

DK 624.012.454

Von **B. Bernardi**, dipl. Ing., Zürich, und **R. Sagelsdorff**, dipl. Ing., Eidg. Materialprüfungsanstalt, Dübendorf

## 1. Praktische Bedeutung

Die Abbiegungen von Armierungsstählen sind in den SIA-Normen für die Berechnung und Ausführung von Beton- und Eisenbetonbauten festgelegt (vgl. Tabelle 1). In der Praxis werden jedoch diese Vorschriften, besonders diejenigen für die Schubaufbiegungen, vielfach nicht eingehalten. Manche Eisenbiegereien besitzen die notwendigen Einrichtungen nicht, um dicke Armierungsstähle normengerecht abzubiegen. So würde z. B. die Schubaufbiegung eines Stabes $d = 30$ mm (Baustahl II) einen Biegedorn resp. Segment von $D_2 = 24 \times 3 = 72$ cm erfordern; die gebräuchlichen Biegemaschinen (meist ausländischer Herkunft) sind jedoch für grosse Krümmungsdurchmesser ($D > 30$ cm) nur ungenügend ausgerüstet, weil im Ausland üblicherweise enger abgebogen wird (vgl. Tabelle 1); solche Abbiegungen müssen deshalb mit improvisierten Mitteln bewerkstelligt werden, wodurch die Leistung der Biegerei wesentlich sinkt. Auch wäre dabei wegen des elastischen Zurückfederns des Stabes ein massgerechtes Abbiegen erschwert (vgl. auch Abschnitt 7). Bei Stäben mit Haken und Schubaufbiegungen werden zudem bei Akkord-Arbeiten die Biegerollen oft nicht ausgewechselt, so dass die Schubaufbiegungen um denselben Dorn wie die Haken gebogen werden. Es ist eben eine Erfahrungstatsache, dass die Krümmung der Abbiegungen auf der Baustelle vom Ingenieur nur selten überprüft wird; ihre Bestimmung ist bei 45° ÷ 90°-Abbiegungen auch nicht ganz einfach und vor allem ziemlich fehlerempfindlich. Anderseits wissen wir, dass überall dort, wo mit einer stichprobeweisen Abnahme gerechnet werden muss (z. B. bei Brückenbauten durch die Kantone oder die SBB), mehr oder weniger normengemässe Abbiegungen angetroffen werden. Diese Zustände wurden z. T. geduldet und führten offensichtlich zu keinen Schäden, solange Armierungsstähle mit normalen zulässigen Spannungen (bis $\sigma_e = 2000$ kg/cm²) angewendet wurden und die Eisenbetonbauten die Belastungsprobe bis zum Bruch ja auch nicht zu bestehen hatten.

Die heutigen Armierungsstähle mit hoher Festigkeit und verbesserten Verbundeigenschaften ermöglichen jedoch eine erhöhte Stahlausnützung. Es wird im folgenden untersucht, wie sich dies bei Abbiegungen auf die Biegbarkeit und die Ermüdungsfestigkeit der Armierungsstähle sowie auf das Absprengen und die Rissbildung des Betons auswirkt. Diesen Problemen wurde nicht überall die gleiche Bedeutung beigemessen, und die Vorschriften der einzelnen Länder über die minimalen Corndurchmesser beim Abbiegen gehen weit auseinander (Tabelle 1).

Tabelle 1. Abbiegevorschriften

| | | $\sigma_s$ min (kg/mm²) | $D_1$ | $D_2$ |
|---|---|---|---|---|
| *Schweiz* | | | | |
| SIA-Normen Nr. 162 (1956) | | | | |
| Baustahl I, nicht profiliert | | 24 | $5 \times d$ | $20 \times d$ |
| Baustahl II, profiliert | | 35 | $8 \times d$ | $24 \times d$ |
| SIA-Normenentwurf Nr. 162 (1966) | | | | |
| Armierungsstahl I und II | | 24 und 45 | $6 \div 8 \times d$ [1] | $15 \div 20 \times d$ [1] |
| [1] Der grössere Wert gilt für Eisenbahnbrücken | | | | |
| *Deutschland* | | | | |
| DIN 1045 und spez. Zulassungen | | | | |
| Gruppe I | rund | 22 | $2{,}5 \times d$ | $10 \div 15 \times d$ [5] |
| | gerippt | 22 | $4 \times d$ | $10 \div 15 \times d$ [5] |
| Gruppe II | rund | 34 [2] / 36 | $5 \times d$ | $10 \div 15 \times d$ [5] |
| | gerippt | 34 [3] / 36 | $6 \times d$ | $10 \div 15 \times d$ [5] |
| Gruppe III | rund | 40 [2] / 42 | $5 \times d$ | $10 \div 15 \times d$ [5] |
| | gerippt | 40 [3] / 42 | $7 \times d$ | $10 \div 15 \times d$ [5] |
| Gruppe IV | rund | 50 [4] | $5 \times d$ | $10 \div 15 \times d$ [5] |
| | gerippt | 50 [4] | $8 \times d$ | $10 \div 15 \times d$ [5] |
| [2] $d \geq 20$ mm [3] $d = 20 \div 26$ mm [4] $d \leq 26$ mm | | | | |
| [5] Wenn die seitliche Betonüberdeckung weniger als $a_1 = 2d + 2$ cm beträgt, so ist der grössere Krümmungsdurchmesser $D_2$ zu verwenden. | | | | |
| *Skandinavien* – Kam-Stähle (Kam = Rippen) | | | | |
| Kam 40, naturhart | | 36 [6] / 38 [7] / 40 | $5 \times d$ [10] | $10 \times d$ |
| Kam 50, naturhart | | 50 [8] | $5 \times d$ [10] | $10 \times d$ |
| Kam 60, naturhart | | 60 [9] | $5 \times d$ [10] | $10 \times d$ |
| [6] $d = 32$ mm [7] $d = 20 \div 30$ mm [8] $d \leq 19$ mm [9] $d \leq 16$ mm | | | | |
| [10] Kam-Stähle werden meistens ohne Endhaken verwendet. | | | | |
| *Österreich* | | | | |
| Ö-Norm B 4200/4 | | | | |
| Gruppe 0 | naturhart | | $2{,}5 \times d$ | $16 \div 22 \times d$ [5] |
| Gruppe I | naturhart | 20 [11] / 22 | $2{,}5 \times d$ | $16 \div 22 \times d$ [5] |
| Gruppe II | naturhart | 33 | $5 \times d$ | $20 \div 26 \times d$ [5] |
| Gruppe III | kaltverwunden | 40 | $5 \times d$ | $20 \div 26 \times d$ [5] |
| Gruppe IV | kaltgezogen | 50 | — | $24 \div 30 \times d$ [5] |
| Gruppe V | kaltverwunden | 60 | $7{,}5 \times d$ | $28 \div 34 \times d$ [5] |
| [11] $d \geq 30$ mm | | | | |
| *USA* (ASTM A 15 – 54 T) | | | | |
| Gruppe weich, | naturhart | rd. 23 | $6 \div 8 \times d$ [12] | $6 \div 8 \times d$ |
| Gruppe mittel, | naturhart | rd. 28 | $6 \div 8 \times d$ | $6 \div 8 \times d$ |
| Gruppe hart, | naturhart | rd. 35 | $6 \div 8 \times d$ | $6 \div 8 \times d$ [12] |
| [12] $d = 6 \div 26$ mm: $D_1 = D_2 = 6 \times d$; $d = 28 \div 36$ mm: $D_1 = D_2 = 8 \times d$ | | | | |
| *Holland* | | rd. 22 ÷ 40 | $5 \times D$ | $10 \times d$ |
| *Spanien* | | rd. 22 ÷ 30 | $3 \times D$ | $10 \times d$ |
| *Grossbritannien* | | rd. 22 ÷ 35 | $4 \times D$ | $10 \times d$ |