

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	84 (1966)
<b>Heft:</b>	48
<b>Artikel:</b>	Sur l'aplanissement élastique d'une coque de faible courbure
<b>Autor:</b>	Schumann, Walter
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-69036">https://doi.org/10.5169/seals-69036</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Once again, the values of the  $A_n$ ,  $A'_n$ ,  $B_n$  and  $B'_n$  are independent of the position of the load  $P$  along the  $y$  axis.

## 6. Numerical Examples

Illustrative numerical examples are now given for both the above cases for various positions of the applied concentrated load  $P$ .

All the examples refer to a square plate where

$$(6.1a) \quad a = b = 1, \quad D_1 = 0.15 D, \quad D_{xy} = 0.425 D$$

and, unless otherwise stated,

$$(6.1b) \quad D_x = D, \quad D_y = 2 D.$$

In all cases

$$(6.1c) \quad H = D \quad \text{and} \quad \mu = \sqrt{2}/2$$

see equations (3.3) and (4.4).

### 6.1 All edges simply supported

Four positions of the applied concentrated load are considered as shown in Fig. 3, where in cases (iii) and (iv) it is noted that  $D_x = 2D$  and  $D_y = D$ . Cases (i) and (ii) provide identical situations as does case (ii) with case (iv), the values of the physical quantities are, however, derived by quite different numerical processes and so this provides a useful check on the calculations. The results of the calculations are sketched in Fig. 4.

With conventional methods it is a matter of some difficulty to calculate accurate values for  $Q_x$ ,  $Q_y$  and  $V_x$ ,  $V_y$ . It is a feature of the present method, however, that it is considerably easier to calculate these values than to calculate the deflection  $w(0; \eta)$  underneath the applied load to within the same degree of accuracy. This is illustrated in Tables 1 and 2 where values of the physical quantities are given for various truncations of the series. It is noted, incidentally, that it is necessary to consider even values of  $n$  only for case (ii) and also that

an expeditious choice of the co-ordinate axes leads even more quickly to accurate results.

### 6.2 Two opposite edges simply supported and remaining edges free

Three positions of the applied concentrated load are considered as shown in Fig. 5. The results of the calculations are sketched in Fig. 6. Table 3 illustrates the convergence of the physical quantities for various truncations of the series.

## References

- [1] W. H. Hopmann, N. J. Huffington, L. S. Magness: A study of orthogonally stiffened plates. «Jour. Appl. Mech.», 23 (1956), 343.
- [2] A. Coul: The stress analysis of orthotropic bridge slabs. «Quart. Jour. Mech. Appl. Maths.», 17 (1964), 437.
- [3] R. E. Rowe: The distribution of shear forces and bearing reactions in simply supported bridges. Cement and Concrete Research Assoc. Tech. Rep. 353 (1961).
- [4] E. Lightfoot: A grid framework analogy for laterally loaded plates. «Internat. Jour. Mech. Sciences», 6 (1964), 201.
- [5] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: Theory of plates and shells. McGraw-Hill 2nd Ed. (1959).
- [6] R. F. S. Hearmon: Applied anisotropic elasticity. Oxford Univ. Press (1961), 123.
- [7] J. R. Vinson, M. A. Brud: New techniques of solution for problems in the theory of orthotropic plates. Proc. Fourth US Nat. Cong., Berkeley, Pergamon (1962), 817.
- [8] H. Favre: Contribution à l'étude des plaques obliques. «Schweiz. Bauztg.», 120 (1942), 35–36, 51–54 and 60.
- [9] H. Favre: Le calcul des plaques obliques par la méthode des équations aux différences. Publ. Int. Assoc. Bridge and Structural Engng., Zurich (1943), 91.
- [10] H. Favre: Sur l'introduction des coordonnées cartésiennes obliques dans la théorie de l'élasticité. «Bull. Tech. Suisse Romande» (1946).
- [11] S. Woinowsky-Krieger: Über die Biegung des orthotropen Plattenstreifens durch Einzellasten. «Ing. Archiv.», 25 (1957), 97.

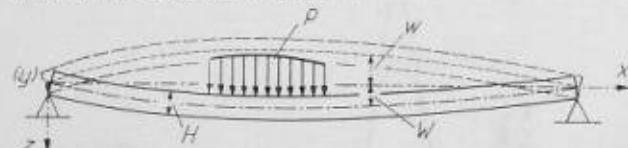
## Sur l'aplanissement élastique d'une coque de faible courbure

DK 624.074.4

Par Walter Schumann, EPF, Zurich

### Introduction et équations générales

Dans la théorie bidimensionnelle sur la flexion des plaques minces sollicitées par une charge  $p$  on suppose l'épaisseur  $H$  de celles-ci faible par rapport aux deux autres dimensions. Lorsque le déplacement latéral  $W$  des points du plan moyen est de l'ordre de grandeur de  $H$ , mais néanmoins  $|\text{grad } W|^2 \ll 1$ , on utilise comme point de départ les équations différentielles non-linéaires de  $v$ , Kármán [1], dans lesquelles intervient à côté de  $W$  la fonction d'Airy  $\Phi$  de l'effet membrane. Comme dans la pratique on se borne à des déplacements faibles d'une part et que d'autre part on cherche à éviter les systèmes non-linéaires dont l'intégration n'est pas toujours aisée, nous avons été conduit à étudier dans la suite un problème quelque peu modifié.



Supposons que la plaque en question possède avant l'application de la charge une certaine courbure, donnée par une fonction  $w$  définissant la surface moyenne initiale (Fig.). Pour la flexion d'une telle coque de faible courbure on a en coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  les équations différentielles suivantes, données par Marguerre [2]:

$$(1) \quad \Delta \Delta (W - w) = -\frac{1}{D} \left[ p + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right],$$

$$(2) \quad \Delta \Delta \Phi = E(k - K).$$

Dans ces équations  $\Delta$  désigne l'opérateur de Laplace,  $E$  le module d'élasticité,  $D$  la rigidité à la flexion et  $k$ ,  $K$  les courbures de Gauss des surfaces  $w$ ,  $W$ . Les fonctions  $N_x = F \partial^2 \Phi / \partial y^2$ ,  $N_{xy} = -F \partial^2 \Phi / \partial x \partial y$ ,  $N_y = F \partial^2 \Phi / \partial x^2$  sont les forces normales et tangentielles dues à l'effet de membrane avec  $F$  comme aire de section effective par unité de longueur (dans le cas homogène on aurait  $F = H$ ).

Supposons maintenant que la coque, sous l'influence de la charge  $p$ , ait été aplatie, c'est-à-dire que  $W = 0$ . Pour la surface initiale  $w$  et la fonction d'Airy  $\Phi$  on obtient alors le système

$$(3) \quad \Delta \Delta w = -\frac{p}{D},$$

$$(4) \quad \Delta \Delta \Phi = E(k - K) = E \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

La première de ces équations est au signe près identique à l'équation de base de la théorie linéaire de la flexion. Rappelons toutefois que contrairement à la supposition faite dans cette dernière ( $w \ll H$ ) la grandeur du déplacement  $w$  dans notre cas peut très bien être du même ordre que l'épaisseur  $H$ . Les équations (3) et (4) résolues successivement se présentent comme un système linéaire, malgré les termes nonlinéaires contenus dans  $K$ . Dans des cas concrets de conditions aux limites, où les moyens de la théorie classique peuvent être utilisés l'intégration est donc relativement simple.

Vient s'ajouter un problème de stabilité à savoir qu'une coque mince de faible courbure initiale peut sauter pour une certaine charge dans une position avec courbure de sens opposé. Des problèmes de ce genre sont traités dans de nombreux travaux (voir par ex. [3]) et en particulier dans le cadre de la théorie non-linéaire générale présentée par Mushtari et Galimov [4]. Si ce phénomène a lieu dans notre cas, l'équilibre de la position plane sera instable. Envisageons dans la suite seulement le cas particulier important de la charge uniforme  $p = \text{const}$ . La courbure initiale critique est celle où l'équilibre de la coque aplatie par une charge dite elle aussi «critique» est indifférant, c'est-à-dire où il existe au moins une position d'équilibre voisine (dans le sens du calcul des variations), décrite par une surface élastique  $\zeta$ . La fonction  $\zeta$  satisfait donc à l'équation (1), à condition d'y poser  $W = \zeta$ ,  $\Delta \Delta w = -p/D$ . Les forces normales sont à tirer de la fonction d'Airy  $\Phi$  obtenue par l'intégration de (3) et (4). Ces forces étant proportionnelles à  $p^2 EF/D^2$ , il est indiqué d'introduire des «forces»  $n_x$ ,  $n_{xy}$ ,  $n_y$  et un paramètre  $\lambda$  sans dimensions afin d'éviter la

répétition de ce facteur dans la suite (les coordonnées seront écrites plus tard sans dimensions). Posons donc

$$(5) \quad \begin{cases} N_x = -\frac{\lambda D}{L^2} n_x, & N_{xy} = -\frac{\lambda D}{L^2} n_{xy}, & N_y = -\frac{\lambda D}{L^2} n_y, \\ \text{cù} & \lambda = \frac{p^2 EFL^6}{D^3}. \end{cases}$$

L'équation pour le critère de stabilité s'écrit alors:

$$(6) \quad \Delta A \zeta + \frac{\lambda}{L^2} \left[ n_x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2 n_{xy} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] = 0,$$

et exprime un problème de valeur propre dit *général* [5].

Pour faciliter la recherche de  $\lambda$  par approximations énonçons encore le principe du minimum qui correspond à cette équation. Il peut être établi à l'aide de la seconde variation de l'énergie potentielle [6] et s'écrit ici:

$$(7) \quad \lambda = \min \iint \left[ n_x \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + n_y \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

où  $\kappa$  est la courbure de *Gauß* de la surface  $\zeta$ . L'intégration est à étendre sur tout le domaine de la plaque et le crochet au dénominateur est supposé être positif défini. On trouve facilement une borne supérieure  $\lambda_0$  de  $\lambda$ , en laissant tomber la condition du minimum, c'est-à-dire en introduisant dans (7) une fonction  $\zeta$  cinématiquement admissible. On peut aussi obtenir une borne inférieure  $\lambda_u$  en estimant convenablement le dénominateur dans (7). En effet, l'expression entre crochet sous le signe intégrale au dénominateur est une fonction scalaire et par suite indépendante du choix du système d'axes de coordonnées. En associant donc à chaque point un système d'axes dont les directions seraient précisément celles des forces normales principales  $n_1, n_2$  ( $n_1 \geq n_2$ ) au dit point, on verrait aisément que cette expression a pour borne supérieure  $n_1 |\operatorname{grad} \zeta|^2$ . En désignant par  $\tilde{n}$  la plus grande des forces normales principales  $n_i$  on trouve:

$$(8) \quad n_x \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + n_y \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 < \tilde{n} |\operatorname{grad} \zeta|^2.$$

En résumé nous obtenons les inégalités suivantes:

$$(9) \quad \begin{aligned} \lambda_u &= \min \frac{L^2 \iint [(A \zeta)^2 - 2(1-\nu) \kappa] dx dy}{\tilde{n} \iint |\operatorname{grad} \zeta|^2 dx dy} < \lambda \leq \\ &\leq \iint \left[ n_x \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + n_y \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \lambda_0. \end{aligned}$$

L'équation différentielle d'*Euler-Lagrange* qui correspond au principe du minimum pour  $\lambda_u$  s'énonce:

$$(10) \quad \Delta A \zeta + \lambda_u \frac{\tilde{n}}{L^2} A \zeta = 0,$$

et exprime par exemple dans le cas où  $A \zeta = 0$  au bord un problème de valeur propre dit *particulier* pour  $\lambda_u$ . Ce problème est plus facile à résoudre que celui qui est posé par l'équation (6). En effet, on peut souvent en trouver, comme on le verra dans l'application qui va suivre, la solution rigoureuse, ou bien alors ramener l'équation (10) à l'équation intégrale du type *Fredholm* suivante [5]

$$(11) \quad \eta(x, y) + \lambda_u \frac{\tilde{n}}{L^2} \iint G(x, y, \bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = 0,$$

où le noyau  $G$  est la fonction de *Green* de  $A \zeta = 0$ .

Un raisonnement analogue à celui fait dans [5] peut être fait pour comparer deux cas avec conditions aux limites différentes. Soient par exemple  $\lambda$  la valeur propre et  $\zeta$  la fonction propre correspondante d'une plaque encastrée avec courbure initiale et soit  $\lambda^*$  la valeur propre d'une plaque de même contour, mais articulée le long de celui-ci et possédant par suite une courbure initiale différente de la première. Si  $n_1$  désigne la grande des deux forces normales principales de la plaque encastrée et

$n_2^*$  la petite des deux forces normales principales de la plaque articulée, on a alors

$$(12) \quad \begin{cases} n_x \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + n_y \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \leq n_1 |\operatorname{grad} \zeta|^2, \\ n_2^* |\operatorname{grad} \zeta|^2 \leq n_x^* \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 2 n_{xy}^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + n_y^* \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2. \end{cases}$$

Comme  $\zeta$  est une fonction cinématiquement admissible pour la plaque articulée, on obtient finalement un théorème de comparaison

$$(13) \quad \lambda^* < \lambda$$

à condition que  $n_1 < n_2^*$  en chaque point. On peut facilement vérifier que cette dernière condition est largement satisfaite dans le cas de la symétrie de rotation. Elle le sera donc également pour un contour qui diffère peu du cercle. Il faudrait toutefois la vérifier dans chaque exemple.

Au lieu de varier les conditions aux limites pour  $w$ , on peut aussi comparer deux cas avec différentes conditions aux limites pour  $\Phi$ . En effet, la force normale  $n_1$  dans le cas d'une plaque circulaire posée est plus petite que la force normale  $n_2^*$  dans le cas d'une plaque circulaire articulée. L'inégalité (13) sera donc valable dans ces cas-ci et aussi pour des contours peu différents du cercle.

Dans la suite nous nous proposons de discuter quantitativement des exemples élémentaires de symétrie circulaire pour montrer qu'il existe des cas pratiques qui entrent dans le cadre de cette théorie. Ces exemples montrent en outre quantitativement l'influence des conditions aux limites sur les valeurs propres qui nous intéressent en premier lieu.

#### Quelques exemples avec symétrie de rotation

Considérons une plaque circulaire de rayon  $R$  chargée uniformément et possédant une courbure initiale donnée par une surface moyenne initiale  $w(r)$ , où  $r$  est la distance d'un point quelconque à l'axe de symétrie  $z$ . Nous nous proposons de traiter trois cas extrêmes par leurs conditions aux limites et leur connexion:

- a) plaque articulée le long du contour  $r = R$ ,
- b) plaque posée le long du contour  $r = R$ ,
- c) plaque libre le long du contour  $r = R$  et posée le long du bord d'un trou concentrique de rayon  $\epsilon R$ .

L'équation (4) s'écrit avec la variable  $\xi = r/R$  sans dimensions et la notation  $d/d\xi =$

$$(14) \quad \frac{1}{\varrho} \left\{ \varrho \left[ \frac{1}{\varrho} (\varrho \Phi')' \right]' \right\}' = \frac{E}{\varrho} w' w'' = \frac{E}{2 \varrho} [(w')^2]'.$$

La théorie linéaire nous enseigne d'autre part que (3) admet dans les cas a) et b) la solution

$$w = -\frac{p R^4}{64 D} \left[ \frac{5+r}{1+r} - \frac{2(3+r)}{1+r} \varrho^2 + \varrho^4 \right]$$

(voir par exemple [7]). On peut alors facilement intégrer (14) et on obtient pour la force normale radiale l'expression:

$$(15) \quad \begin{aligned} N_r &= \frac{F \Phi'}{R^2 \varrho} = -\frac{p^2 E F R^6}{D^2 2^{12}} \times \\ &\times \left[ n_0 - \left( \frac{3+r}{1+r} \right)^2 \varrho^2 + \frac{2(3+r)}{3(1+r)} \varrho^4 - \frac{1}{6} \varrho^6 \right]. \end{aligned}$$

Il est commode de choisir ici  $L = R/4$ , la constante  $n_0$  est alors précisément égale à la force normale sans dimensions  $n_r$  au centre  $\varrho = 0$  de la plaque. Cette constante est déterminée par la condition aux limites pour  $\Phi$ , et qui s'énonce: dans le cas a)  $[L \Phi' - r \Phi]_{\varrho=1} = 0$ , dans le cas b)  $[\Phi'/\varrho]_{\varrho=1} = 0$ . On obtient ainsi les constantes pour les deux cas envisagés:

$$(16) \quad \begin{cases} a) & n_0 = \frac{3-r}{1-r} \left( \frac{3+r}{1+r} \right)^2 - \frac{2(5-r)}{3(1-r)} \frac{3+r}{1+r} + \frac{7-r}{6(1-r)}, \\ b) & n_0 = \left( \frac{3+r}{1+r} \right)^2 - \frac{2(3+r)}{3(1+r)} + \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Dans le cas c) on tire d'abord de l'équation (3)

$$(17) \quad w = -\frac{p R^4}{64 D} [a \log \varrho - 8 \varrho^2 \log \varrho + c \varrho^2 + d + \varrho^4]$$

où

$$(18) \quad \begin{aligned} a &= -\frac{4 \varepsilon^2}{1-\nu} \left[ 4(1+\nu) \frac{\log \varepsilon}{1-\varepsilon^2} + 3 + \nu \right], \\ c &= -\frac{8 \varepsilon^2 \log \varepsilon}{1-\varepsilon^2} + \frac{2(3+\nu)}{1+\nu} (1-\varepsilon^2), \\ d &= (8 \varepsilon^2 - a) \log \varepsilon - \varepsilon^2 (c + \varepsilon^2). \end{aligned}$$

L'intégration de l'équation (14) fournit ensuite l'expression suivante pour la force normale radiale:

$$(19) \quad N_r = -\frac{p^2 E F R^6}{D^2 2^{12}} \left\{ C_1 + \frac{C_2}{\varrho} + 4(a-4\varrho^2)(\log \varrho)^2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{a^2}{4\varrho^2} - a\nu + 4(2+c)\varrho^2 + \frac{8\varrho^4}{3} \right] \log \varrho + \frac{\sigma c}{2} - \right. \\ \left. - \left( 6 + c + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{a}{2} \right) \varrho^2 + \left( \frac{2}{3} - c \right) \frac{\varrho^4}{4} - \frac{\varrho^6}{6} \right\}.$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées par les conditions aux limites  $N_{r/p=0} = N_{r/p=1} = 0$ .

Examinons maintenant le problème de stabilité. On peut vérifier qu'il suffit de prendre pour  $\zeta$  une fonction dépendant elle aussi uniquement de  $\varrho$ . L'équation (6) devient avec la nouvelle variable  $\xi = \zeta'$ , la valeur propre  $\lambda = p^2 E F R^8 / 2^{16} D^3$  et  $n_r = -N_r R^2 / 16 \lambda D$

$$(20) \quad \xi'' + \frac{\xi'}{\varrho} - \frac{\xi}{\varrho^2} + 16 \lambda n_r \xi = 0.$$

Cherchons d'abord des bornes pour la valeur propre  $\lambda$ . Le membre droit de la double inégalité (9) s'écrit ici pour la symétrie circulaire

$$(21) \quad \lambda_0 = \frac{\int \left[ \left( \xi' + \frac{\xi}{\varrho} \right)^2 \varrho - 2(1-\nu) \xi \xi' \right] d\varrho}{16 \int n_r \xi^2 \varrho d\varrho},$$

ou l'intégration est à effectuer entre 0 et 1 dans les cas a) et b), mais entre  $\nu$  et 1 dans le cas c). Nous avons choisi  $\xi = \xi_0(1-\varrho^2)$  pour les deux premiers cas et  $\xi = \xi_0(\varrho - \nu)$  pour le dernier.

En ce qui concerne la borne inférieure  $\lambda_u$ , il est facile de voir qu'on peut faire un raisonnement analogue à celui qui nous a permis d'établir l'équation (10), avec cette simplification qu'on obtient ici directement une équation pour  $\xi$  et non pas pour  $A\xi$ :

$$(22) \quad \xi'' + \frac{\xi'}{\varrho} - \frac{\xi}{\varrho^2} + 16 \lambda_u n_0 \xi = 0$$

la constante  $n_0$  désignant comme avant le maximum de  $n_r$ . Si nous posons  $4|\lambda_u n_0| = \chi$  l'équation (22) admet dans les cas a) et b) la solution  $\xi = AJ_1(\chi\varrho)$ , où  $J_1$  est la fonction de Bessel d'ordre 1 de première espèce. La condition aux limites  $M_{r/p=1} = 0$  nous mène alors à l'équation transcendante

$$(23) \quad J_1(\chi) - \frac{1-\nu}{\chi} J_1(\chi) = 0.$$

Dans le cas c) il faut poser  $\xi = AJ_1(\chi\varrho) + BN_1(\chi\varrho)$ ,  $N_1$  étant la fonction de Bessel d'ordre 1 du seconde espèce. Les conditions aux limites  $M_{r/p=0} = M_{r/p=1} = 0$  fournissent ainsi un système linéaire homogène pour les constantes A et B dont il faut annuler le déterminant.

On peut aussi essayer de trouver une approximation de la valeur propre par un développement en série de  $\xi$ . On introduit à ce propos pour le cas a) par exemple la série  $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varrho^n$  dans l'équation différentielle (20). La comparaison des coefficients de mêmes puissances donne la formule de récurrence

$$(24) \quad b_n = \frac{\lambda}{n^2 - 1} \times \\ \times \left[ n_0 b_{n-2} - \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} \right)^2 b_{n-4} + \frac{2(3+\nu)}{3(1+\nu)} b_{n-6} - \frac{1}{6} b_{n-8} \right].$$

En satisfaisant de nouveau la condition aux limites  $M_{r/p=1} = 0$  on est ramené à une équation algébrique de degré  $(m-1)/2$  pour  $\lambda$ . La convergence de ce procédé est toutefois très lente.

Dans le tableau suivant des calculs numériques ont été effectués pour  $\nu = 0,35$  et respectivement pour  $\varepsilon = 1/4, 1/2, 3/4$ .

	$\varepsilon$	$\lambda_u$	$\lambda$	$\lambda_0$	$\frac{\lambda_u + \lambda_0}{2}$	$f \lambda^{-\frac{1}{2}}$	$M \lambda^{-\frac{1}{4}}$	$N \lambda^{-\frac{3}{4}}$
cas a)	0,018	0,023	0,029	0,024	2,6	1,5	0,93	
cas b)	0,058		0,26	0,16	6,7	2,3	1,2	
cas c)	0,25	0,014		0,029	0,021	4,9	5,0	3,8
	0,5	0,029		0,052	0,040	4,7	2,8	2,6
	0,75	0,22		0,45	0,34	4,5	1,9	2,0

Antay trouvés les valeurs propres dans quelques cas simples, nous pouvons maintenant, pour une charge  $p$  donnée, déterminer les rayons  $R$  correspondants. Le diamètre  $2R$  peut être interprété comme la portée limite où la plaque est dans un équilibre indifférent. Dans le cas où la charge  $p$  est par exemple le poids propre  $\gamma F$ ,  $\gamma$  désignant le poids spécifique effectif, on trouve avec  $D = EJ/(1-\nu^2)$

$$(25) \quad R = \frac{4 \lambda^{\frac{1}{8}}}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{8}}} \left( \frac{J}{F} \right)^{\frac{3}{8}} \left( \frac{E}{\gamma} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Comme  $\lambda^{\frac{1}{8}}$  ne varie pas énormément d'un cas à l'autre dans le tableau, ce rayon est pratiquement indépendant des conditions aux limites. Il est par contre légèrement plus grand dans le cas d'une plaque «Sandwich» avec des couches extérieures minces et une couche intérieure épaisse de poids et de résistance négligeable ( $J/F = H^2/4$ ) que dans le cas d'une plaque homogène ( $J/F = H^2/12$ ).

Dans la pratique on est encore intéressé de connaître la flèche initiale  $w_f$ , la plus grande tension de flexion  $\sigma_M$  et la plus grande tension de membrane  $\sigma_N$ . Il est commode d'exprimer ces trois valeurs sous la forme suivante:

$$(26) \quad \left. \begin{aligned} w_f &= -f \lambda^{\frac{1}{2}} \left( \frac{J}{F} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_M &= M \lambda^{\frac{1}{4}} |z| \left( \frac{F}{J} \right)^{\frac{1}{4}} (\gamma E)^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_N &= N \lambda^{\frac{3}{4}} \left( \frac{J}{F} \right)^{\frac{1}{4}} (\gamma E)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

où  $z$  désigne l'ordonnée du point considéré, relative à la surface «neutre».

Les trois coefficients  $f$ ,  $M$  et  $N$  obtiennent en recherchant successivement les extrêmes de la surface moyenne initiale, de la répartition des moments de flexion  $M_r$ ,  $M_t$  et de la répartition des forces normales  $N_r$ ,  $N_t$ . Ils dépendent du nombre de Poisson  $\nu$  et des conditions aux limites, mais sont indépendants des autres caractéristiques de la plaque.

Les valeurs numériques des facteurs  $f \lambda^{\frac{1}{2}}$ ,  $M \lambda^{\frac{1}{4}}$  et  $N \lambda^{\frac{3}{4}}$  sont présentées dans les trois dernières colonnes du tableau. Le tableau et les formules (26) nous montrent les résultats suivants:

1. Les valeurs propres varient beaucoup d'un cas à l'autre,
2. les flèches par contre sont toutes du même ordre de grandeur (approximativement identiques dans les trois cas c). Elles sont supérieures à l'épaisseur dans le cas de la plaque Sandwich mentionnée plus haut.
3. Pour la plaque Sandwich en question on a  $|z| (F/J)^{\frac{1}{2}} = (J/F)^{\frac{1}{4}}$ . On voit alors que la plus grande tension de flexion et la plus grande tension de membrane sont du même ordre de grandeur.

#### Bibliographie

- [1] von Kármán, Th.: Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. IV, 4, 1910, p. 349.

- [2] Marguerre, K.: Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung. Proc. 5th Internat. Congress of Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938, p. 93f.
- [3] Ashwell, D. G.: Non linear Problems. Handbook of Engineering Mechanics (edited by W. Flügge), McGraw Hill Book Company, New York, 1962, p. 45-18.
- [4] Moshari, Kh. M. and Galimov, K. Z.: Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells. English Translation by J. Morgenstern, J. J. Schorr-Kon and P. S. T. Staff, Menson, Jerusalem, 1961.
- [5] Collatz, L.: Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1945.
- [6] Bryan, G. H.: Stability of a Plane Plate under Thrusts in its own Plane. Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 22, 1891, p. 54.
- [7] Favre, H.: Cours de Mécanique, T. III. Leemann, Zürich, 1949, p. 120.

Adresse de l'auteur: Prof. Dr. Walter Schumann, EPF, 8006 Zürich, Leonhardstrasse 33.

## Zur Klassifikation von Kräften

Von Christoph Wehrli und Hans Ziegler, ETH, Zürich

### 1. Einleitung

Um die Bewegungsdifferentialgleichungen eines mechanischen Systems mit endlichem Freiheitsgrad zu erhalten, das im folgenden als holonom und skleronom vorausgesetzt werden soll, verwendet man oft mit Vorteil die Lagrangeschen Gleichungen

$$(1.1) \quad \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k.$$

Hier bedeuten die  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) die Lagekoordinaten, die  $\dot{q}_k$  die verallgemeinerten Geschwindigkeiten;  $T$  ist die Bewegungsenergie, und die  $Q_k$  sind – sofern für lateinische Zeiger die Summationsregel verbindlich erklärt wird – die durch den Ausdruck

$$(1.2) \quad \delta A = Q_k \delta q_k$$

für die virtuelle Arbeit definierten verallgemeinerten Kräfte.

Die Lagrangeschen Gleichungen eignen sich auch vorzüglich für das Studium der allgemeinen Eigenschaften des Systems, zum Beispiel seines Stabilitätsverhaltens. In diesem Zusammenhang erweist es sich als zweckmäßig, die verallgemeinerten Kräfte zu klassifizieren<sup>1)</sup>. Dabei handelt es sich darum, festzustellen, welche von ihnen (a) explizit von der Zeit abhängen und somit instationär sind, (b) Funktionen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten bzw. (c) nur solche der Lagekoordinaten sind. Bei der Gruppe (b) interessiert sodann die Frage, welche Anteile bei wirklichen Bewegungen keine bzw. stets negative Arbeit leisten, d. h. gyrokinetisch bzw. dissipativ sind. Davon hängt zum Beispiel, wie schon Lord Kelvin und Tait<sup>2)</sup> gezeigt haben, ihr Einfluss auf die Stabilität einer Gleichgewichtslage ab. Ähnlich ist es<sup>3)</sup> bei den verallgemeinerten Kräften der Gruppe (c), die sich von einem eindeutigen Potential ableiten lassen oder nicht und je nachdem als nichtzirkulatorisch oder als zirkulatorisch bezeichnet werden.

Die angedeutete Klassifikation bietet keine wesentlichen Schwierigkeiten bei linearen Systemen, d. h. dann, wenn die verallgemeinerten Kräfte  $Q_j$  in den  $q_k$  und den  $\dot{q}_k$  linear sind. Scheidet man explizit von der Zeit abhängige Anteile sofort als instationäre verallgemeinerte Kräfte aus und misst man die  $q_k$  von der alsdann vorhandenen Gleichgewichtslage aus, so stellen sich die  $Q_j$  in der Form

$$(1.3) \quad Q_j = -c_{jk} q_k - g_{jk} \dot{q}_k$$

dar, wobei die Koeffizienten  $c_{jk}$ ,  $g_{jk}$  nunmehr konstant sind. Jede der beiden Matrizen  $(c_{jk})$ ,  $(g_{jk})$  kann eindeutig in einen symmetrischen Anteil ('') und einer antimetrischen ('') aufgespalten werden, und eine einfache Analyse der Leistung  $Q_j \dot{q}_j$  zeigt<sup>4)</sup>, dass die einzelnen Bestandteile verallgemeinerte Kräfte der folgenden Klassen darstellen:

$(c'_{jk})$ : nichtzirkulatorische

$(c''_{jk})$ : zirkulatorische

$(g'_{jk})$ : dissipative (falls die Matrix positiv definit)

$(g''_{jk})$ : gyrokinetische.

Diese Zuordnung ist freilich nicht eindeutig umkehrbar. So müssen sich zwar nichtzirkulatorische verallgemeinerte Kräfte stets durch eine

<sup>1)</sup> Vgl. H. Ziegler, On the Concept of Elastic Stability, Advances in Applied Mechanics IV, Academic Press Inc., New York, N. Y., 1956, S. 366.

<sup>2)</sup> Sir W. Thomson and P. G. Tait, Treatise on Natural Philosophy, Neudruck unter dem Titel «Principles of Mechanics and Dynamics», Dover Publications, Inc., New York, N. Y., Bd. I, S. 388.

<sup>3)</sup> H. Ziegler, loc. cit. S. 377.

<sup>4)</sup> H. Ziegler, loc. cit. S. 372.

symmetrische Matrix  $(c'_{jk})$  darstellen und gyrokinetische stets durch eine antisymmetrische Matrix  $(g'_{jk})$ . Andernfalls hätten die ersten nämlich kein eindeutiges Potential, und die Leistung der letzten wäre nicht bei jeder wirklichen Bewegung null. Zirkulatorische verallgemeinerte Kräfte werden aber auch durch asymmetrische Matrizen  $(c_{jk})$  dargestellt und können daher nichtzirkulatorische Anteile enthalten. Analog kann man aus der Asymmetrie einer Matrix  $(g_{jk})$  mit positivem definitem symmetrischem Anteil nur auf dissipative verallgemeinerte Kräfte schließen, denen noch gyrokinetische beigemischt sein können.

Die Klassifikation der in der  $q_k$ ,  $\dot{q}_k$  linearen verallgemeinerten Kräfte  $Q_j$  bietet also offensichtlich keine Schwierigkeiten. Die Trennung der zu verschiedenen Klassen gehörenden verallgemeinerten Kräfte ist indessen nicht immer ganz einfach. Im Falle nichtlinearer Funktionen  $Q_j(q_k, \dot{q}_k)$  treten weitere Komplikationen auf, und es stellt sich die Frage nach der Struktur der verallgemeinerten Kräfte, welche der einen oder anderen Klasse angehören. Als Beitrag zur Beantwortung dieser Frage soll im folgenden untersucht werden, in welcher Weise sich die im System wirkenden elementaren Kräfte, wenn sie dem einen oder anderen einfachen Typ angehören, in den verallgemeinerten Kräften reproduzieren.

### 2. Die verallgemeinerten Kräfte

Für die Herleitung der Lagrangeschen Gleichungen ist es üblich<sup>5)</sup>, das System als Gesamtheit von Massenpunkten aufzufassen. Dieses Bild ist für Systeme, welche sich aus starren Körpern zusammensetzen, zulässig und zweckmäßig und soll auch hier verwendet werden. Ferner sollen die im folgenden auftretenden Funktionen als stetig und, soweit dies nötig ist, auch als differentierbar vorausgesetzt werden.

Es sei  $m_\mu$  ein typischer Massenpunkt und  $\mathbf{r}_\mu = (x_\mu, y_\mu, z_\mu)$  sein Fahrstrahl in einem kartesischen Koordinatensystem. Da das System als skleronom vorausgesetzt wurde, ist der Fahrstrahl eine eindeutige Funktion.

$$(2.1) \quad \mathbf{r}_\mu = \mathbf{r}_\mu(q_k)$$

der Lagekoordinaten allein. Die allgemeinsten zulässigen Verschiebungen des Systems wird durch einen Satz von Inkrementen  $\delta q_k$  der Lagekoordinaten beschrieben, und diese Inkremeante sind im holonomen System voneinander unabhängig. Die virtuelle Verschiebung von  $m_\mu$  ist nach (2.1)

$$(2.2) \quad \delta \mathbf{r}_\mu = \frac{\partial \mathbf{r}_\mu}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Sind  $\mathbf{K}_\mu$  die an den Massenpunkten  $m_\mu$  wirkenden Kräfte einer bestimmten Klasse, so ist – wenn für griechische Zeiger die Summationsregel nicht verwendet wird – ihre virtuelle Arbeit für das ganze System

$$(2.3) \quad \delta A = \sum_\mu \mathbf{K}_\mu \delta \mathbf{r}_\mu = \sum_\mu \mathbf{K}_\mu \frac{\partial \mathbf{r}_\mu}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Die zugehörigen verallgemeinerten Kräfte sind also nach (1.2) durch

$$(2.4) \quad Q_j = \sum_\mu \mathbf{K}_\mu \frac{\partial \mathbf{r}_\mu}{\partial q_j}$$

gegeben.

Im allgemeinsten Fall sind die Elementarkräfte gemäß  $\mathbf{K}_\mu(\mathbf{r}_\mu, \dot{\mathbf{r}}_\mu, t)$  von allen Fahrstrahlen, allen Geschwindigkeiten und der Zeit abhängig und damit insbesondere instationär. Es folgt dann aus (2.4), dass – von seltenen Ausnahmen abgesehen – auch die  $Q_j$  explizit von der Zeit abhängen.

<sup>5)</sup> Vgl. z. B. E. T. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper, übersetzt von F. und K. Mittelsten Scheid, Springer-Verlag, Berlin 1924, S. 37.