

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 84 (1966)  
**Heft:** 46

**Artikel:** Eine Kette von longitudinal gegeneinander schwingenden Einzelmassen als einfaches Modell zur Behandlung von Rotorschwingungen mit nachgiebigen und dämpfenden Lagern  
**Autor:** Münch, Benjamin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-69026>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Prof. Dr. Gustav Eichelberg zum 75. Geburtstag

Am 21. November feiert der ehemalige Ordinarius (1929–1959) für Thermodynamik und Verbrennungsmotoren an der Eidgenössischen Technischen Hochschule seinen 75. Geburtstag. Der Jubilar vermittelte dem Ingenieur-Studenten das erforderliche Rüstzeug wissenschaftlichen Denkens und begeisterte ihn für die Schönheit technischen Schaffens. Er förderte das Verantwortungsbewusstsein für seinen Beruf.

Der Jubilar befasste sich nach seinem Studium in der Firma Gebrüder Sulzer AG in Winterthur mit den Problemen des Grossmotorenbaues. Damals herrschte auf diesem Gebiet noch reine Empirie. Angeregt durch die Denkweise seines früheren Lehrers, Prof. Dr. A. Stodola, der vor allem im Dampfturbinenbau aus den Gesetzen der exakten Naturwissenschaften dem praktisch tätigen Ingenieur anwendbare Arbeitsverfahren aufzeigte, erkannte er die Möglichkeit, die selben Methoden auf den Bau von Dieselmotoren auszudehnen. Als Untersuchungsgegenstände seien genannt: Torsionsschwingungen von Kurbelwellen, Ventilfederschwingungen, Verfahren der direkten Brennstoffeinspritzung und der thermodynamische Ablauf des Motorenprozesses mit Ladungswechsel. Von besonderer Bedeutung waren die rechnerische Bestimmung und die

experimentelle Nachprüfung der Temperaturverteilung sowie die daraus resultierenden Wärmespannungen und Deformationen. Mit diesen wegweisenden Arbeiten wurde Eichelberg zu einem der massgebenden Begründer der wissenschaftlichen Entwicklungsmethoden auf dem damals in lebhaftem Aufbau begriffenen Gebiet des Grossmotorenbaues. Der heute erreichte hohe Stand der Entwicklung ist weitgehend das Ergebnis solcher Methoden.

Der Reichtum der damals in der Praxis gewonnenen Erfahrungen und die Tiefe des dabei Erlebten wirkten sich befruchtend auf die spätere Lehrtätigkeit des Jubilars aus. Sein Einblick in die wirklichen Probleme fand einen Niederschlag in seinen lebendigen Vorlesungen. Das fachliche Bestreben war stets getragen von tiefer begründeten menschlichen Belangen. Diese geistige Haltung, die in der Sorge um die Erhaltung der Menschenwürde und um den Sinn der Arbeit ihren Ausdruck fand, verlieh dem Wort des Lehrers besonderes Gewicht.

Unsere besten Wünsche für das weitere Wohlergehen verbinden sich mit dem herzlichen Dank für die reiche Fülle des Empfangenen. Vor allem möchten wir unseren verehrten Lehrer bei bester Gesundheit und in der gewohnten Lebendigkeit bei freudigem Tun wissen.

Prof. M. Berchtold

## Eine Kette von longitudinal gegeneinander schwingenden Einzelmassen als einfaches Modell zur Behandlung von Rotorschwingungen mit nachgiebigen und dämpfenden Lagern

Prof. Dr. G. Eichelberg zum 75. Geburtstag gewidmet von Dr. sc. techn. Benjamin Münch, Maschinenfabrik Oerlikon, Zürich

DK 531.391.3:621.824

### Zusammenfassung

Die Untersuchung kritischer Drehzahlen von Rotoren mit elastisch nachgiebigen und dämpfenden Lagern, welche ihrerseits wieder elastisch auf einer festen Unterlage abgestützt sind, erfordert einen hohen Rechenaufwand. Ein einfaches mechanisches Modell, nämlich ein System von drei longitudinal gegeneinander schwingenden Einzelmassen, leistet für Studien und qualitative Vergleichsrechnungen gute Dienste. Das Modell kann auch zur Auswertung von auf einer Auswuchtmaschine gemessenen Schwingungsausschlägen verwendet werden, um daraus Werte für die Elastizität und Dämpfungsfähigkeit von Gleitlagern zu gewinnen.

### 1. Einleitung

Die Konstruktion schnellaufender Maschinen, insbesondere der verschiedenen Arten von Turbomaschinen, erfordert die Beherrschung des dynamischen Verhaltens des Rotors, wenn dieser im Betrieb unter dem Einfluss stets vorhandener geringer Unwuchten zu Biegeschwingungen angeregt wird. Mit der Entwicklung des Maschinenbaus entstanden daher zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen eine Menge von rechnerischen und graphischen Verfahren, deren Resultate oft in komplizierteren Fällen durch Modellversuche ergänzt wurden [7]\*).

Die zunehmende Verbreitung des Einsatzes programmgesteuerter digitaler Rechenmaschinen brachte eine wesentliche Hilfe bei der Berechnung der biegekritischen Drehzahlen, besonders in Fällen mit mehr als zwei Lagern. Die angewandten Verfahren [5], [6], [7], [8] bedienen sich alle der Matrizenrechnung, indem die vier mechanischen Grössen an jeder Stelle der Welle, nämlich der radiale Schwingungsausschlag, die Neigung der Wellenaxe, das Biegemoment und die Querkraft, als Komponenten eines Zustandsvektors aufgefasst werden. Ein einzelnes Element des Rotors, zum Beispiel ein glattes Wellenstück, eine Scheibe oder ein starres oder querelastisches Lager, ist dann charakterisiert durch seine Übertragungsmatrix, mit welcher der Zustandsvektor an der einen Seite dieses Rotorelementes zu multiplizieren ist, um den Zustandsvektor an der anderen Seite zu erhalten. Kompliziertere Elemente eines Rotors, zum Beispiel ein

elastisch nachgiebiges Lager, dessen Lagerkörper mit bekannter Masse seinerseits wieder elastisch auf einer feststehenden Unterlage abgestützt ist, lassen sich auf diese Weise durch die Untersuchung ihrer Übertragungsmatrix leicht in die Rechnung einführen. Mit diesem Verfahren gelingt einerseits die Lösung des Eigenwertproblems, nämlich die Berechnung der kritischen Drehzahlen (Eigenwerte der Schwingungsfrequenzen) mehrfach gelagerter Rotoren und andererseits auch die Ermittlung der Resonanzausschläge, wenn ein gegebener Rotor mit elastisch nachgiebigen und dämpfenden Lagern mit gegebenen Unwuchten läuft.

In der Praxis geht es nunmehr noch darum, alle für die Rechnung wesentlichen Parameter zu bestimmen. Die elastische Nachgiebigkeit und Dämpfungsfähigkeit von ölgeschmierten Gleitlagern wurde von Hagg und Sankey [3], [4] experimentell mittels eines besonderen Prüfstandes untersucht. Eine andere Möglichkeit zur Ermittlung dieser Werte wird im Abschnitt 4 dieses Aufsatzes angegeben. Dabei wird keine besondere Versuchseinrichtung benötigt, sondern lediglich eine moderne Auswuchtmaschine. Weitere Probleme bieten die Bestimmung der Elastizität einer Lagerauflage an kompakten Konstruktionen, etwa bei der Verwendung von Schildlagern bei Turbogeneratoren.

Besonders bei biegefesten, starren Rotoren gewinnen die Einflüsse der Lager- und Fundamenteauflage eine erhöhte Bedeutung, wobei durch zahlreiche Konstruktionsstudien die günstigste Lösung gesucht werden muss. In solchen Fällen ist es oft zunächst nicht notwendig, das dynamische Verhalten des Rotors mittels der oben erwähnten genaueren Verfahren zu untersuchen, sondern es genügt die Rechnung mit einem einfachen mechanischen Modell. Das Verhalten eines solchen Modells, nämlich eines Systems einer Anzahl in Serie mit Federn und Dämpfungsgliedern untereinander und mit einer festen Unterlage verbundenen Einzelmassen, wird im folgenden näher behandelt und auf seine Eignung untersucht.

### 2. Kette von longitudinal schwingenden Massen als einfaches Modell

Als einfaches mechanisches Modell zur angenäherten Untersuchung von Rotorschwingungen mit nachgiebigen Lagern und Fundamenten wählen wir die in Bild 1 für vier Massen schematisch skizzierte Kette von longitudinal gegeneinander schwingenden Massen.

\*) Literaturverzeichnis am Schluss dieses Aufsatzes.

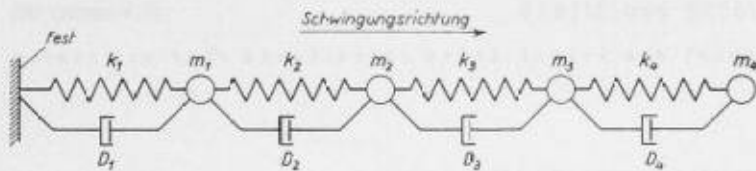


Bild 1 (links). Mechanisches Modell mit longitudinal schwingenden Massen

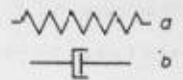


Bild 2 (rechts). Darstellung der Federelemente (a) und Dämpfungselemente (b)

Die Federelemente mit den Federkonstanten  $k_i$  und die Dämpfungsglieder  $D_i$  sind in Bild 1 wie auch in den andern Abbildungen nach der im Bild 2 angegebenen Art dargestellt. Als Dämpfungsglieder setzen wir solche voraus, welche eine der Schwinggeschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft liefern.

Die erste Masse dieses Ersatzsystems soll nun mittels einer Feder und eines Dämpfungsgliedes an eine feste Unterlage gebunden sein; die folgenden Einzelmassen mit denselben Elementen (aber mit anderen Feder- und Dämpfungskonstanten) je an die vorhergehende Masse. Das System ist auf diese Weise «einfach zusammenhängend», das heisst es stehen nur Massen mit aufeinander folgendem Index miteinander in direkter Verbindung.

Die Analogie zwischen einem wirklichen Rotor und dem Modellschwinger mit drei Massen ist in Bild 3 dargestellt. Zur auf diese Weise angenäherten Behandlung eignen sich symmetrische Rotoren, welche auf zwei gleich gebauten Lagern mit derselben Lagerabstützung gelagert sind. Diese Bedingung ist in der Regel bei Turbogeneratorrotoren gut erfüllt, oft aber auch bei Turbinenrotoren, etwa bei doppel-flutigen Niederdruckrotoren von Dampfturbinen.

Ein besonderes Problem bildet die passende Aufteilung der Gesamtmasse  $m_R$  des Rotors in zwei Teilmassen  $m_M$  und  $m_E$ , welche näherungsweise in der Rotormitte und in den Lagerpartien des Rotors konzentriert sein sollen. Grundsätzlich können die Aufteilung der Massen und die einzusetzende «Rotorelastizität» beliebig gewählt werden, jedoch derart, dass das Schwingungsverhalten des Modellschwingers demjenigen des wirklichen Rotors im untersuchten konkreten Falle möglichst nahe kommt. In der praktischen Anwendung kann man sich aber nicht mit einer so allgemein gehaltenen Anweisung begnügen. Es wird empfohlen, die Teilmassen  $m_M$  und  $m_E$  so zu wählen, dass deren Summe die Rotormasse ergibt. Massenaufteilung und eingesetzte Rotorelastizität sollen ferner so aufeinander abgestimmt werden, dass der auf starren Lagern gelagerte Rotor in der genaueren Rechnung und im Modell (eine Masse  $m_M$  mit der Rotorelastizität an eine feste Unterlage gebunden) dieselbe kritische Drehzahl (Eigenfrequenz) aufweist. Werden die oben angegebenen beiden Bedingungen erfüllt, so bleibt noch ein einziger frei wählbarer Parameter übrig, mit welchem das Modell dem konkreten Fall angepasst werden kann. Wird beispielsweise der Rotor durch eine Unwucht in

der Mitte zum Schwingen angeregt, kann durch passende Wahl der Parameter erreicht werden, dass die Schwingungsauslässe des wirklichen Rotors und des Modells dieselben sind.

### 3. Theorie des Modellschwingers

Das in Bild 1 schematisch dargestellte Schwingungssystem soll nun auf sein Verhalten untersucht werden, wenn an einer oder mehreren der Massen  $m_i$  periodische Störkräfte angreifen. Wir wollen unserer Problemstellung gemäss voraussetzen, dass die Störkräfte zwar untereinander phasenverschoben sein können, jedoch alle mit derselben Kreisfrequenz  $\omega$  periodisch sein sollen. Am  $i$ -ten Massenpunkt greife die Störkraft  $P_i$  an:

$$(1) \quad P_i = \bar{P}_i \cos(\omega t + \psi_i)$$

oder

$$(2) \quad P_i = P_{xi} \cos(\omega t) - P_{yi} \sin(\omega t)$$

mit

$$(3) \quad \begin{cases} P_{xi} = \bar{P}_i \cos \psi_i \\ P_{yi} = \bar{P}_i \sin \psi_i \end{cases}$$

Die Amplitude  $\bar{P}_i$  hängt von der gegebenen Unwucht  $U_i$  (in cmkg) und der Kreisfrequenz  $\omega$  ab:

$$(4) \quad \bar{P}_i = \frac{U_i \omega^2}{g}$$

$$g = 980,7 \text{ cm/s}^2$$

Auf gleiche Weise kann natürlich auch eine periodische Störkraft in die Rechnung eingesetzt werden, deren Amplitude  $\bar{P}_i$  direkt als Kraftamplitude (z. B. in kp) gegeben ist.

Den auftretenden Schwingungsauslag der Masse  $m_i$  aus der Ruhelage bezeichnen wir gemäss Bild 4 mit  $q_i$ . Entsprechend der Problemstellung verzichten wir auf die Untersuchung von Einschwingvorgängen und betrachten nur stationäre Lösungen. Wir wählen daher für die periodische Bewegung des Massenpunktes  $m_i$

Tabelle 1. Koeffizienten der linearen Gleichungen zur Bestimmung der Schwingungsauslässe

Gleichung	Unbekannte Teilamplitude (Masse $m_i$ )						Konstante
	$x_{i-1}$	$y_{i-1}$	$x_i$	$y_i$	$x_{i+1}$	$y_{i+1}$	
$A_i$	$-k_i$	$+D_i \omega$	$k_i + k_{i+1} - m_i \omega^2$	$-(D_i + D_{i+1}) \omega$	$-k_{i+1}$	$+D_{i+1} \omega$	$P_{xi}$
$B_i$	$-D_i \omega$	$-k_i$	$+(D_i + D_{i+1}) \omega$	$k_i + k_{i+1} - m_i \omega^2$	$-D_{i+1} \omega$	$-k_{i+1}$	$P_{yi}$

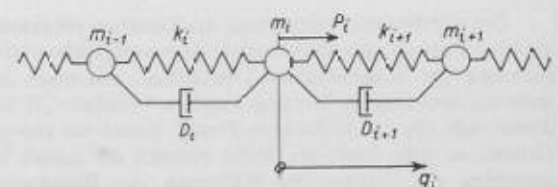
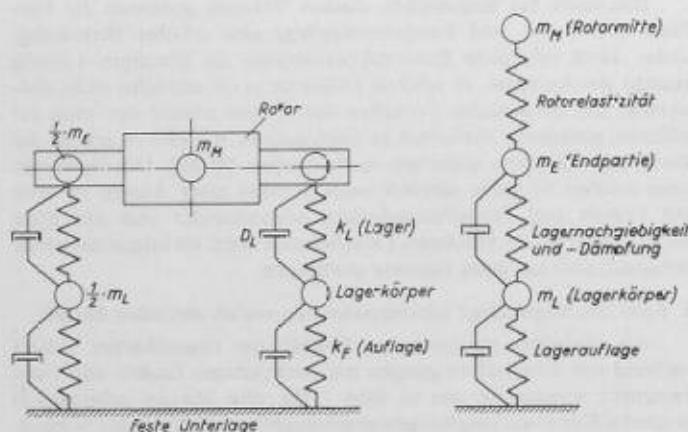


Bild 4. Allgemeiner Massenpunkt  $m_i$ , angreifende Kräfte und Schwingungsauslag

Bild 3 (links). Analogie zwischen einem symmetrisch schwingenden Rotor mit elastisch nachgiebigen und dämpfenden Lagern, welche ihrerseits elastisch abgestützt sind, und dem Modellschwingungssystem

Tabelle 2. Schwingungssystem mit  $n$  Massen  $m_i$ ; Koeffizienten des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Amplituden  $x_i$  und  $y_i$

Glied	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$x_3$	$y_3$	...	$x_{i-2}$	$y_{i-2}$	$x_{i-1}$	$y_{i-1}$	$x_i$	$y_i$	$x_{i+1}$	$y_{i+1}$	$x_{i+2}$	$y_{i+2}$	...	$x_{n-2}$	$y_{n-2}$	$x_{n-1}$	$y_{n-1}$	$x_n$	$y_n$	Konst.
$A_1$	$k_1+k_2$ $-m_1\omega^2$	$-D_1\omega$ $-D_2\omega$	$-k_2$	$+D_2\omega$	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	$+P_{11}$
$B_1$	$+D_1\omega$ $+D_2\omega$	$k_1+k_2$ $-m_1\omega^2$	$-D_2\omega$	$-k_2$	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	$+P_{12}$
$A_2$	$-k_2$	$+D_2\omega$	$k_2+k_3$ $-m_2\omega^2$	$-D_2\omega$ $-D_3\omega$	$-k_3$	$+D_3\omega$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	$+P_{22}$
$B_2$	$-D_2\omega$	$-k_3$	$+D_2\omega$ $+D_3\omega$	$k_2+k_3$ $-m_2\omega^2$	$-D_3\omega$	$-k_3$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	$+P_{23}$
...																									...
$A_{i-1}$	0	0	0	0	0	0		$-k_{i-1}$	$+D_{i-1}\omega$	$k_{i-1}+k_i$ $-m_{i-1}\omega^2$	$-D_{i-1}\omega$ $-D_i\omega$	$-k_i$	$+D_i\omega$	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	$+P_{i-1,1}$
$B_{i-1}$	0	0	0	0	0	0		$-D_{i-1}\omega$	$-k_{i-1}$	$+D_{i-1}\omega$ $+D_i\omega$	$k_{i-1}+k_i$ $-m_{i-1}\omega^2$	$-D_i\omega$	$-k_i$	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	$+P_{i-1,2}$
$A_i$	0	0	0	0	0	0		0	0	$-k_i$	$+D_i\omega$	$k_i+k_{i+1}$ $-m_i\omega^2$	$-D_i\omega$ $-D_{i+1}\omega$	$-k_{i+1}$	$+D_{i+1}\omega$	0	0		0	0	0	0	0	0	$+P_{i,1}$
$B_i$	0	0	0	0	0	0		0	0	$-D_i\omega$	$-k_i$	$+D_i\omega$ $+D_{i+1}\omega$	$k_i+k_{i+1}$ $-m_i\omega^2$	$-D_{i+1}\omega$	$-k_{i+1}$	0	0		0	0	0	0	0	0	$+P_{i,2}$
$A_{i+1}$	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	$-k_{i+1}$	$+D_{i+1}\omega$	$k_{i+1}+k_{i+2}$ $-m_{i+1}\omega^2$	$-D_{i+1}\omega$ $-D_{i+2}\omega$	$-k_{i+2}$	$+D_{i+2}\omega$		0	0	0	0	0	0	$+P_{i+1,1}$
$B_{i+1}$	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	$-D_{i+1}\omega$	$-k_{i+1}$	$+D_{i+1}\omega$ $+D_{i+2}\omega$	$k_{i+1}+k_{i+2}$ $-m_{i+1}\omega^2$	$-D_{i+2}\omega$	$-k_{i+2}$		0	0	0	0	0	$+P_{i+1,2}$	
...																									...
$A_{n-1}$	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$-k_{n-1}$	$+D_{n-1}\omega$	$k_{n-1}+k_n$ $-m_{n-1}\omega^2$	$-D_{n-1}\omega$ $-D_n\omega$	$-k_n$	$+D_n\omega$	$+P_{n-1,1}$
$B_{n-1}$	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$-D_{n-1}\omega$	$-k_{n-1}$	$+D_{n-1}\omega$ $+D_n\omega$	$k_{n-1}+k_n$ $-m_{n-1}\omega^2$	$-D_n\omega$	$-k_n$	$+P_{n-1,2}$
$A_n$	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	$-k_n$	$+D_n\omega$	$k_n$ $-m_n\omega^2$	$-D_n\omega$	$+P_{n,1}$
$B_n$	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	$-D_n\omega$	$-k_n$	$+D_n\omega$	$k_n$ $-m_n\omega^2$	$+P_{n,2}$

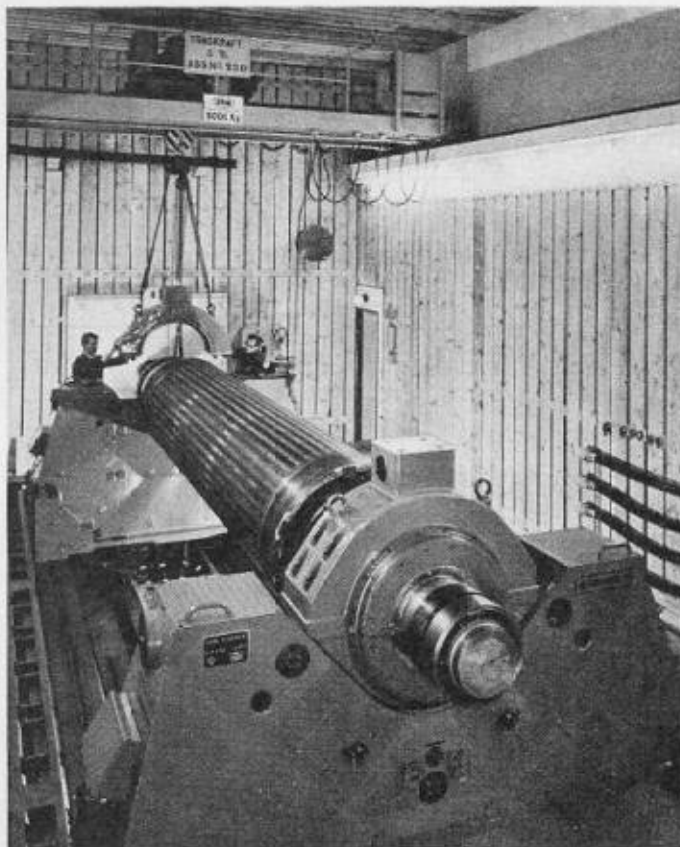


Bild 5. Turbogeneratormotor in der Wucht- und Schleudranlage der Maschinenfabrik Oerlikon

den Ansatz:

$$(5) \quad q_i = a_i \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Mit den aus Amplitude  $a_i$  und Phasenwinkel  $\varphi_i$  gebildeten Grössen

$$(6) \quad \begin{cases} x_i = a_i \cos \varphi_i \\ y_i = a_i \sin \varphi_i \end{cases}$$

erhalten wir die zeitliche Veränderung von  $q_i$  und deren Ableitungen nach der Zeit  $t$ :

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{q}_i = x_i \omega \sin(\omega t) - y_i \omega \cos(\omega t) \\ \ddot{q}_i = -x_i \omega^2 \cos(\omega t) - y_i \omega^2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Sind die Teilamplituden  $x_i$  und  $y_i$  einmal bekannt, so lassen sich aus (6) leicht die Amplitude  $a_i$  und der Phasenwinkel  $\varphi_i$  ermitteln:

$$(8) \quad \begin{cases} a_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \\ \varphi_i = \arctg(y_i/x_i) \end{cases}$$

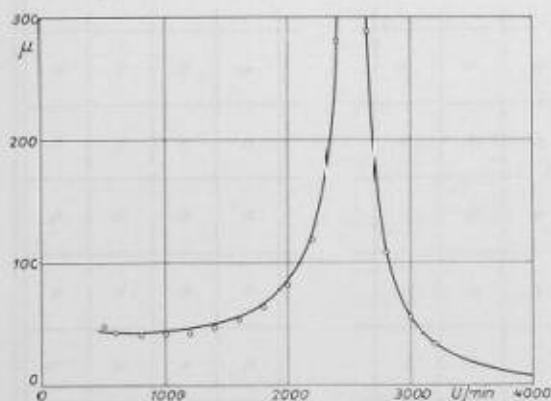


Bild 6. Resonanzkurve eines mit einer Testwucht drehenden Turbogenerators. Die ausgezogene Kurve gibt das Rechnungsergebnis als Dreimassenfall wieder, die eingetragenen Punkte die auf der Wuchtmaschine gemessenen Schwingungsausschläge

Die Bewegungsdifferentialgleichung des Massenpunktes  $m_i$  erhalten wir, indem wir die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte mit Einschluss der Trägheitskräfte (im d'Albertschen Sinne) formulieren:

$$(9) \quad \begin{aligned} -m_i \ddot{q}_i - k_i (q_i - q_{i-1}) - D_i (\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}) \\ + k_{i+1} (q_{i+1} - q_i) + D_{i+1} (\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i) + P_i = 0 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung (9) für den Massenpunkt  $m_i$  verknüpft die Zeitfunktionen der Schwingungsausschläge  $q_{i-1}, q_i, q_{i+1}$  der Massen  $m_{i-1}, m_i$  und  $m_{i+1}$  miteinander. Führen wir in (9) den Ausdruck (3) für die periodische Störkraft  $P_i$  und den Lösungsansatz (5) bzw. (7) ein, so können wir nach Cosinus- und Sinusgliedern separieren und erhalten die beiden linearen Gleichungen unter den Teilamplituden  $x_{i-1}, y_{i-1}, x_i, y_i, x_{i+1}$  und  $y_{i+1}$  der drei aufeinanderfolgenden Massen  $m_{i-1}, m_i$  und  $m_{i+1}$ .

Gleichung  $A_i$ , Cosinusglieder:

$$(10) \quad \begin{aligned} D_i \omega y_{i-1} - k_i x_{i-1} + D_{i+1} \omega y_{i+1} - k_{i+1} x_i \\ - m_i \omega^2 x_i + (k_i + k_{i-1}) x_i - (D_i + D_{i+1}) \omega y_i = P_{xi} \end{aligned}$$

Gleichung  $B_i$ , Sinusglieder:

$$(11) \quad \begin{aligned} -D_i \omega x_{i-1} - k_i y_{i-1} - D_{i+1} \omega x_{i+1} - k_{i+1} y_i \\ - m_i \omega^2 y_i + (k_i + k_{i+1}) y_i + (D_i + D_{i+1}) \omega x_i = P_{yi} \end{aligned}$$

Die Glieder der beiden Gleichungen (10) und (11) sind – als Teil einer Koeffizientenmatrix – schematisch in der Tabelle 1 dargestellt.

Analog zum allgemeinen Fall des Massenpunktes  $m_i$  erhalten wir die Bewegungsdifferentialgleichungen des ersten, an die feste Unterlage gebundenen Massenpunktes  $m_1$  sowie des letzten Massenpunktes  $m_n$  am freien Ende der Kette. Im ersten Falle ist zu berücksichtigen, dass die feste Auflage keine Bewegungen zulässt. Somit gilt:

$$(12) \quad q_{i-1} = q_0 = \dot{q}_0 = \ddot{q}_0 = 0$$

Den Massenpunkt  $m_n$  am freien Ende beeinflussen keine Bindungskräfte eines weiteren Massenpunktes  $m_{n+1}$  mehr, somit verschwinden dort in der Bewegungsdifferentialgleichung alle Glieder, welche Grössen mit dem Index  $i+1$  enthalten.

Für jeden der  $n$  Massenpunkte ergeben sich auf diese Weise zwei lineare Gleichungen. Man hat also schliesslich  $2n$  lineare Gleichungen zur Bestimmung der  $2n$  unbekannteren Teilamplituden  $x_i$  und  $y_i$ . Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist für den allgemeinen Fall in der Tabelle 2 dargestellt. Man beachte, dass von Null verschiedene Koeffizienten nur in der Nähe der Hauptdiagonalen der Matrix auftreten, eine Tatsache, welche damit zusammenhängt, dass unser Modell als Kette von «einfach zusammenhängenden» Massenpunkten konstruiert wurde. Eine solche «Bandmatrix» erleichtert die Auflösung des linearen Gleichungssystems ausserordentlich.

Schliesslich interessiert noch, in welchem Verhältnis der Rechenaufwand für die Durchrechnung eines als Modell nach Bild 3 gewählten Dreimassensystems steht verglichen mit demjenigen, der zur Berechnung der erzwungenen Schwingungen eines Rotors mit elastischen und dämpfenden Lagern mit einem der im Abschnitt 1 erwähnten Verfahren erforderlich ist. Beim Dreimassenfall reduziert sich das lineare Gleichungssystem auf 6 Gleichungen, und es ist auch hier der Einsatz einer programmgesteuerten Rechenmaschine zweckmässig. Es zeigt sich aber, dass der Rechenaufwand nur etwa 4% des für die genaue Rechnung notwendigen beträgt, so dass das Modell für viele Anwendungen Vorteile bietet.

#### 4. Anwendungen

a) Das beschriebene mechanische Modell eignet sich zur Beurteilung von Konstruktionsstudien von Lagerabstützungen. Dort geht es zunächst im Entwurfsstadium mehr um eine vergleichende Gegenüberstellung einer grösseren Anzahl von Varianten, ohne dass schon eine höhere Genauigkeit der Rechnung gefordert werden müsste. Der Lagerkörper im weiteren Sinne umfasst dann die feststehenden Teile des Lagers sowie einen Anteil der Lagerkonstruktion, etwa bei einem Schildlager den zentralen Teil des Lagerschildes.

b) An die Stelle der experimentellen Ermittlung der Elastizität und Dämpfungsfähigkeit eines ölgeschmierten Gleitlagers mittels eines besonderen Prüfstandes nach Hagg und Sankey [3] können Versuche mit ausgeführten Rotoren in einer modernen Auswuchtmaschine treten, wie sie heute in den meisten Firmen des Maschinenbaus vorhanden sind. In einer grösseren Auswuchtmaschine, welche den Betrieb mit höheren Drehzahlen bis zur Nennzahl gestattet, wird

ein Rotor mit gleichartigen Gleitlagern gelagert, wie sie später im Betrieb eingebaut werden. Der Lagerkörper der Wuchtmaschine wird sorgfältig isotrop weich oder hart (das heisst nach allen radialen Richtungen gleich nachgiebig mit veränderlicher Steifigkeit der Auflage) ausgeführt; gemessen werden während des Wuchtvorganges die Schwingungsausschläge des Lagerkörpers, also der Masse  $m_L$  oder  $m_1$  in unserem Modell. Die Elastizität und Dämpfung der Auflage (Lagerung des Lagerkörpers) sind Eigenschaften der Wuchtmaschine und können mittels eines einfachen Schwingungsversuches bestimmt werden. Am gut ausgewuchteten Rotor wird nun eine bekannte Testunwucht angebracht. Ohne zusätzlichen Mehraufwand an Messtechnik können mit Hilfe der ohnehin an der Wuchtmaschine vorhandenen genauen Messinstrumente die Schwingungsausschläge bei verschiedenen Drehzahlen gemessen werden. Die Nachrechnung der so gewonnenen Resonanzkurve erfolgt mit verschiedenen eingesetzten Ölfilmparametern, bis eine genügende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messergebnis vorhanden ist.

Als Beispiel sei ein an einem Turbogeneratorrotor nach Bild 5 in der Auswucht- und Schleudernanlage der Maschinenfabrik Oerlikon aufgenommener Amplitudenverlauf (Bild 6) angegeben. Die Hauptdaten des Rotors betragen:

Rotormasse	31 600 kg
Rotordurchmesser (Ballen)	1000 mm
Nenn Drehzahl	3000 U/min
Lagerabstand	7060 mm
Lagerdurchmesser	360 mm

Die Lagerkörper im Gesamtgewicht von 2830 kp waren beim Versuch «isotrop weich» mit einer Federkonstanten von 12300 kp/cm und einer Dämpfungskonstanten von 250 kps/cm gegen die feste Unterlage abgestützt. Der Rotor lief im Versuch mit einer statischen Testunwucht von insgesamt 130,4 cmkg, welche zur Hälfte in der Mitte und zu je einem Viertel an jedem Ballenende symmetrisch angebracht war. Die Aufteilung der Rotormasse für die Rechnung als Dreimassenfall wurde wie folgt vorgenommen:

Masse in Rotormitte	16600 kg
Masse an den Lagerstellen	15000 kg
Federkonstante des Rotors	$6,1 \cdot 10^5$ kp/cm

Da die Unwuchten nur zum Teil in der Mitte angebracht waren, wurde entsprechend deren Anordnung in die Rechnung eingesetzt:

Unwucht in der Mitte	110 cmkg
Unwuchten an den Lagerpartien	20 cmkg
Die Nachrechnung des Schwingungssystems als Dreimassenfall mit den Lagerparametern	
Federkonstante des Ölfilms	$8 \cdot 10^5$ kp/cm
Dämpfungskonstante des Ölfilms	$3,4 \cdot 10^3$ kps/cm

ergab die in Bild 6 angegebene Resonanzkurve, welche mit den Messungen gut übereinstimmt und damit die Brauchbarkeit der Näherungsrechnung zeigt.

e) Schliesslich sei noch daran erinnert, dass das System der  $n$  longitudinal gegeneinander schwingenden Massen mechanisch analog ist zu einem Torsionsschwingungsproblem von  $n$  miteinander durch elastisch nachgiebige und dämpfende Wellenstücke verbundenen Drehmassen. In dieser Analogie entspricht der Masse  $m_i$  die Drehmasse  $\Theta_i$  bzw. das Schwungmoment  $GD^2$ , der Federkonstanten  $k_i$  die Drehsteifigkeit des  $i$ -ten Wellenstückes, der Dämpfungskonstanten  $D_i$  die analoge Dämpfungskonstante für die Torsionsschwingung, der Schwingungsamplituden die Amplitude des Winkelausschlages und endlich den an den Massen  $m_i$  angreifenden periodischen Störkräften  $P_i$  die an den Drehmassen  $\Theta_i$  wirkenden periodischen Störmomente.

#### Literaturverzeichnis

- [1] Biezeno, C. R. und R. Grammel: Technische Dynamik, Springer Berlin, 1953.
- [2] Den Hartog: Mechanische Schwingungen, Springer Berlin, 1952.
- [3] Hagg, A. C. und Sankey, G. O.: Some Dynamic Properties of Oil-Film Journal Bearings with Reference to the Unbalance Vibration of Rotors, Trans. ASME, J. Appl. Mech. Bd. 23, Juni 1956, Seiten 302-305.
- [4] Hagg, A. C. und Sankey, G. O.: Oil Film Properties for Unbalance Vibration Calculations, Trans. ASME, J. Appl. Mech. Bd. 25, März 1958, Nr. 1, Seiten 141-143.
- [5] Myklestad, N. O.: A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibrations of Airplane Wings and Other Types of Beams, «J. Aeronaut. Sciences». Bd. 11, 1944, Seite 153.
- [6] Thomson, W. T.: Matrix-Solution of the Vibration of Nonuniform Beams, Trans. ASME, Bd. 72, 1950, Seite 337.
- [7] Traupel, W.: Thermische Turbomaschinen, Band 2, Springer Berlin, 1960, Seiten 365 ff. und 374 ff.
- [8] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, 4. Auflage, Springer Berlin, 1963, Seite 446 ff.

## Wärmeschock-Beanspruchungen in zylindrischen Gefässen

DK 539.41:621-222.2

Professor Dr. G. Eichelberg zum 75. Geburtstag am 21. November 1966 gewidmet von Dr. A. Christ, Escher Wyss AG Abt. Forschung

### Einleitung

Unser verehrter Jubilar hat sich im Zusammenhang mit dem Dieselmotorbau sehr viel mit Wärmespannungen beschäftigt; deshalb möchte ich bei dieser Gelegenheit etwas zu diesem Thema beitragen.

Die theoretischen Grundlagen zum Berechnen von stationären und instationären Wärmespannungen liegen zwar seit langer Zeit fest, und es lässt sich dazu kaum noch etwas Wesentliches beisteuern. Jedoch ist die mathematische Handhabung reichlich kompliziert, insbesondere bei nichtstationären Fällen. Deshalb wird in der alltäglichen Praxis solchen Problemen entweder aus dem Wege gegangen oder es werden die Probleme an «Spezialisten» zum Bearbeiten weitergeleitet. Dementsprechend ist auch das «technische Gefühl», d. h. das konkrete Vorstellungsvermögen für solche Vorgänge im allgemeinen nicht stark entwickelt; oft werden harmlose Fälle überbewertet, gefährliche unterschätzt.

Hier möchten die folgenden Ausführungen einsetzen. Sie werden weniger den Theoretiker als den Konstrukteur ansprechen und ihm eine auf anschauliche Weise von einfachen Vorstellungen hergeleitete Formel an die Hand geben zum Berechnen der maximalen Wärmespannungen in der Wand eines zylindrischen Gefässes oder Rohres, und zwar einerseits für den Fall gleichmässiger Aufwärmung und andererseits für den wohl häufigeren Fall des eigentlichen Wärmeschocks. Unter Wärmeschock soll der Vorgang verstanden werden, bei dem sich die Temperatur des an der Gefäss- oder Rohrwand vorbeiströmenden Mediums plötzlich ändert. Dabei wird angenommen, die Wärmeübergangszahl zwischen Medium und Wand sei endlich und bekannt.

Selbstverständlich wird nicht verkannt, dass es schon lange ein einfaches Verfahren zum Bestimmen aller nichtstationären Tempe-

raturfelder unter beliebigen Randbedingungen gibt; nämlich das graphische Verfahren von Schmidt. Es verlangt jedoch, dass der Temperaturverlauf im fraglichen Wandstück von Anfang an schrittweise verfolgt wird. Dabei interessiert aber der Temperaturverlauf gar nicht so sehr, sondern es ist lediglich nach der maximalen zusätzlichen Spannung infolge des Wärmeschocks gefragt. Wohl kann aus den Temperaturkurven diese Information gewonnen werden, aber insgesamt stellt doch das ganze graphische Verfahren einen etwas langen und in jedem sich stellenden Fall neu zu begehenden Weg dar, so dass auch aus diesem Grund eine Formel zur Spannungsberechnung recht erwünscht wäre.

### Einfache Temperaturfelder

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet das stationäre Temperaturfeld in einer ebenen Wand (Platte). Hier fällt die Temperatur  $\theta$  in der Wand (Dicke  $\delta$ ) bekanntlich linear ab, d. h. die Neigung der Temperaturverteilungskurve  $d\theta/dx$  ist eine Konstante, weil überall dieselbe Wärmemenge durchfliesst. Die pro  $m^2$  durchfliessende Wärmemenge, d. h. die Wärmestromdichte  $q$  ist ja mit der Neigung des Temperaturverlaufes direkt verknüpft durch das Fouriersche Erfahrungsgesetz

$$(1) \quad q = -\lambda \frac{d\theta}{dx}$$

wobei das Minuszeichen andeutet, dass die Wärme entgegen der Richtung des Temperaturanstieges fliesst, (Bild 1).

Der einfachste instationäre Vorgang ist der Fall gleichmässiger Aufwärmung. Auf der einen Seite (bei  $x = 0$ ) ist die Wand isoliert gedacht, während von der anderen Seite her ( $x = \delta$ ) ein zeitlich kon-