

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 84 (1966)  
**Heft:** 23

**Artikel:** La méthode des éléments finis en élasticité bidimensionnelle  
**Autor:** Dupuis, Georges / Prager, William  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-68931>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

peut être traitée comme suit. On pose  $\Delta z = w$ ;  $w_{x+1, y+1}$  est donné par l'expression (50) qui conduit à:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{16}{dx^4} + \frac{32}{dx^2 dy^2} + \frac{16}{dy^4} \right) z_{x+1, y+1} = \left( \frac{16}{dx^4} + \frac{16}{dx^2 dy^2} \right) \times \\
 & \times z_{x, y+1} + \left( \frac{16}{dx^2 dy^2} + \frac{16}{dy^4} \right) z_{x+1, y} + \left( \frac{16}{dx^4} + \frac{16}{dx^2 dy^2} \right) \times \\
 & \times z'_{x, y+1} dx + \left( \frac{16}{dy^4} + \frac{16}{dx^2 dy^2} \right) z'_{x+1, y} dy + \\
 (52) & + \left( \frac{8}{dx^4} + \frac{4}{dx^2 dy^2} \right) z''_{x, y+1} dx^2 + \left( \frac{8}{dy^4} + \frac{4}{dx^2 dy^2} \right) \times \\
 & \times z''_{x+1, y} dy^2 + \frac{4}{dx} z''_{x, y+1} + z''_{x, y+1} + \frac{4}{dy} z''_{x+1, y} + z''_{x+1, y} + \\
 & + \frac{4}{dx^2} \left( z'''_{x, y+1} + z'''_{x, y+1} dx + z'''_{x, y+1} \frac{dx^2}{4} \right) + \frac{4}{dy^2} \times \\
 & \times \left( z'''_{x+1, y} + z'''_{x+1, y} dy + z'''_{x+1, y} \frac{dy^2}{4} \right) + \Psi_{(x+1, y+1)}
 \end{aligned}$$

L'équation de Westergaard [8, p. 577]

$$\Delta \Delta z = \frac{q - kz}{D}$$

s'écrit comme (52) en y remplaçant  $\Psi_{(x+1, y+1)}$  par  $\frac{q - kz_{x+1, y+1}}{D}$ .

L'équation de Huber

$$az''' + 2cz'' + bz' = p \quad [8, p. 593]$$

conduit à une expression d'une complication analogue à celle de la formule (52).

Cette complication paraît certes assez grande. Il faut toutefois l'apprécier en fonction de la difficulté des problèmes et de celle des solutions connues. Pratiquement, l'application revient à de nombreuses opérations élémentaires que les moyens de calcul modernes doivent permettre de maîtriser. Il se peut que les difficultés d'application proviennent plutôt des conditions aux limites. Dans les formules, en cours de calcul, il est toujours possible de négliger à bon escient les termes vraiment négligeables. La méthode permet en principe la solution numérique suffisamment exacte des problèmes de la nature de ceux qui ont été considérés.

Adresse de l'auteur: *Ferdinand Campus*, 85, Avenue des Grenadiers, Bruxelles 5.

## La méthode des éléments finis en élasticité bidimensionnelle

DK 539.3:518.61

Par **Georges Dupuis**<sup>1</sup> et **William Prager**<sup>2</sup>, Laboratoire de Recherche IBM, Rüschlikon ZH

**Résumé:** La méthode des éléments finis, appliquée à la détermination approchée du champ de déplacement d'un disque élastique soumis à des contraintes données au bord, conduit à un système d'équations linéaires qui sont généralement déduites de considérations intuitives. Le sens précis de ces équations dans le cadre de la théorie mathématique de l'élasticité est établi ici. Les formules explicites sont données pour un réseau formé de triangles rectangles isocèles. Un exemple numérique illustre leur application.

### 1. Introduction

Le procédé des éléments finis appliqué aux disques, plaques et coques et aux continus élastiques à trois dimensions est une généralisation naturelle de la méthode matricielle développée dans l'industrie aéronautique à propos de l'analyse de structures complexes d'ailes et de fuselages (voir, par exemple [1], [2] où l'on trouvera d'autres références).

Pour illustrer l'idée de base, considérons l'état de tension plane généralisée engendré dans un disque polygonal, d'épaisseur constante, soumis à des contraintes données sur son contour. Appliquons sur l'aire de ce disque un réseau triangulaire, et discrétisons le champ de déplacement bidimensionnel par les vecteurs déplacements des nœuds de ce réseau, en supposant que, à l'intérieur de chaque triangle, les composantes du déplacement dans un système de coordonnées rectangulaires cartésiennes  $x_1, x_2$  sont des fonctions linéaires de ces coordonnées. De cette manière, le champ de déplacement de chaque triangle est entièrement défini par les vecteurs déplacements de ses trois sommets.

Le champ de déplacement considéré est continu dans tout le domaine occupé par le disque et engendre un état de déformation constant à l'intérieur de chaque élément triangulaire. L'état de tension plane déduit de l'état de déformation par la loi de Hooke, est constant pour chaque élément. Les distributions uniformes de contraintes transmises à travers un segment du réseau séparant deux triangles adjacents ne sont, en général, pas en équilibre. Cet état de tension constant par région est donc engendré par des charges de ligne uniformément distribuées le long de chaque segment du réseau.

Les composantes de ces *charges de ligne* sont des fonctions linéaires des composantes de déplacement des nœuds. Dans le cas où les forces de volume sont nulles, on peut présumer obtenir une approximation raisonnable du champ de déplacement de la manière suivante:

1. Pour chaque segment, on remplace la distribution uniforme de charges de ligne par des forces parallèles équipollentes appliquées aux extrémités. La résultante des forces ainsi obtenues en un nœud sera appelée *force intérieure* en ce nœud.

<sup>1</sup> Actuellement Assistant à l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'EPUL.

<sup>2</sup> Actuellement Professeur de Mécanique Appliquée à l'Université de Californie, San Diego.

2. Pour chaque segment de bord du disque, on remplace la composante suivant  $x_1$  des contraintes données par deux forces parallèles équipollentes appliquées aux extrémités. De même pour la composante suivant  $x_2$ . La résultante des forces ainsi obtenue en un nœud de bord sera appelée *force extérieure* en ce nœud (pour tous les nœuds intérieurs à la frontière du disque, la force extérieure disparaît).

3. Pour chaque nœud, on écrit que les forces extérieures et intérieures sont égales. Ces relations sont nommées *conditions d'équilibre nodal*. Elles sont linéaires relativement aux déplacements des nœuds.

Puisque les contraintes de bord données, et par suite les forces extérieures, satisfont trois équations d'équilibre, trois conditions d'équilibre nodal sont dépendantes des autres et peuvent être supprimées. Si le réseau triangulaire est formé de  $n$  nœuds, il reste  $2n-3$  conditions d'équilibre nodal *indépendantes* pour les  $2n$  composantes de déplacement des  $n$  nœuds. Pour éliminer les déplacements rigides du disque qui n'entraînent aucune déformation, on peut annuler trois composantes de déplacement des nœuds. Le nombre de composantes de déplacement *indépendantes* est donc égal au nombre de conditions d'équilibre nodal indépendantes.

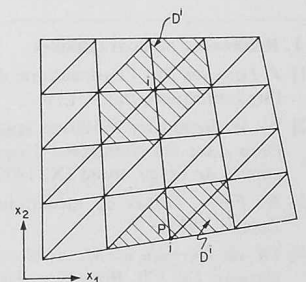
Au lieu de procéder de cette manière intuitive, on peut appliquer le principe du minimum de l'énergie potentielle (cf [3]). Dans ce cas, le champ de déplacement linéaire par régions, continu, considéré ci-dessus, est une fonction concurrente du problème de variation, et l'énergie correspondante est une forme quadratique dans les  $2n-3$  paramètres de déplacement indépendants. La condition d'extremum de cette forme quadratique est équivalente aux conditions d'équilibre nodal indépendantes.

Une autre manière d'obtenir ces conditions est développée au paragraphe 2. Au paragraphe 3, on donne les formules explicites pour un réseau formé de triangles rectangles isocèles. Un exemple numérique illustrant l'application de ces formules est traité au paragraphe 4.

### 2. Obtention des équations d'équilibre nodal

La figure 1 représente un système d'axes rectangulaires cartésiens  $x_1, x_2$  et un disque quadrilatéral sur lequel est appliqué un réseau triangulaire grossier. On affecte aux nœuds un indice en

Fig. 1. Réseau triangulaire et domaines  $D^i$  typiques



lettres romaines et aux segments du réseau, un indice en lettres grecques. Une quantité associée aux nœuds ou aux segments sera affectée de l'indice supérieur correspondant. Par exemple,  $x_1^i$ ,  $x_2^i$  sont les coordonnées du nœud  $i$  et  $L^\alpha$  est la longueur du segment  $\alpha$ .

Il est commode pour la suite d'introduire le symbole  $a^{\alpha i}$  défini de la manière suivante:

$$(1) \quad a^{\alpha i} = \begin{cases} 1 & \text{si le nœud } i \text{ est sur le segment } \alpha \\ 0 & \text{si le nœud } i \text{ n'est pas sur le segment } \alpha \end{cases}$$

Le domaine polygonal formé des triangles qui ont le nœud  $i$  pour sommet sera noté  $D^i$ . A la fig. 1, le domaine  $D^i$  est représenté par des hachures pour une position intérieure et pour une position de bord du nœud  $i$ .

Pour obtenir la première condition d'équilibre nodal relative au nœud  $i$ , considérons le champ de déplacement, linéaire par régions, correspondant à un déplacement unitaire du nœud  $i$  dans la direction  $x_1$  et à aucun déplacement des autres nœuds. Les composantes suivant  $x_2$  de ce champ *artificiel* de déplacement sont identiquement nulles et les composantes suivant  $x_1$  seront notées  $v_1^{\alpha i}$ . Notons que  $v_1^{\alpha i}$  est nulle si  $i$  n'est pas sur  $\alpha$ ; le déplacement  $v_1^{\alpha i}$  varie linéairement le long du segment  $\alpha$  de  $v_1^{\alpha i} = 1$  en  $i$  à  $v_1^{\alpha i} = 0$  à l'autre extrémité du segment  $\alpha$ .

En accord avec le paragraphe 1, ce champ artificiel de déplacement représente une solution des équations fondamentales de l'élasticité bidimensionnelle pour le disque soumis à certaines charges de ligne uniformément distribuées  $q_1^{\alpha i}$ ,  $q_2^{\alpha i}$  agissant le long des segments  $\alpha$  du domaine  $D^i$ .

L'état engendré par les contraintes données au contour sera dit *état naturel*. Si  $\alpha$  est un segment de bord, nous noterons les forces de ligne données par  $t_1^\alpha$  et  $t_2^\alpha$ ; si  $\alpha$  est un segment intérieur, nous poserons  $t_1^\alpha = t_2^\alpha = 0$ . Désignons par  $u_1^\alpha$ ,  $u_2^\alpha$  les déplacements de l'état naturel le long du segment  $\alpha$  et appliquons le théorème de réciprocité de Betti à l'état artificiel connu et à l'état naturel inconnu; nous obtenons<sup>3)</sup>:

$$(2) \quad \sum_{\alpha} \int (q_1^{\alpha i} u_1^\alpha + q_2^{\alpha i} u_2^\alpha) dl = \sum_{\alpha} \int t_1^\alpha v_1^{\alpha i} dl$$

où  $dl$  est l'élément de longueur du segment  $\alpha$  sur lequel porte l'intégration. Les sommes de la relation (2) contiennent la contribution de tous les segments  $\alpha$  du domaine  $D^i$ ; si nous posons  $q_1^{\alpha i} = q_2^{\alpha i} = 0$  pour tous les segments  $\alpha$  extérieurs au domaine  $D^i$ , les sommations en (2) peuvent être étendues à tous les segments du réseau.

Puisque  $q_1^{\alpha i}$ ,  $q_2^{\alpha i}$  sont constants le long de  $\alpha$ , on peut écrire l'intégrand du premier membre de (2) comme le produit scalaire de la charge totale  $Q_1^{\alpha i} = q_1^{\alpha i} L^\alpha$ ,  $Q_2^{\alpha i} = q_2^{\alpha i} L^\alpha$  par le déplacement naturel moyen.

$$(3) \quad U_1^\alpha = \frac{1}{L^\alpha} \int u_1^\alpha dl, \quad U_2^\alpha = \frac{1}{L^\alpha} \int u_2^\alpha dl$$

le long du segment  $\alpha$ . Or,  $v_1^{\alpha i} = 0$  sauf si  $i$  est sur  $\alpha$  et comme  $v_1^{\alpha i}$  varie linéairement le long de  $\alpha$ , l'intégrand du deuxième membre de (2) représente la contribution du segment  $\alpha$  à la première composante  $E_1^i$  de la force extérieure au nœud  $i$ . (Notons que, pour un nœud intérieur, on a  $E_1^i = 0$  car  $t_1^\alpha = 0$  sauf si  $\alpha$  est un segment de bord.) L'équation (2) peut donc s'écrire sous la forme

$$(4) \quad \sum_{\alpha} (Q_1^{\alpha i} U_1^\alpha + Q_2^{\alpha i} U_2^\alpha) = E_1^i.$$

De la même manière, considérons un état artificiel correspondant à un déplacement unitaire du nœud  $i$  dans la direction  $x_2$  et à aucun déplacement des autres nœuds. Appliquons encore le théorème de Betti entre cet état artificiel et l'état naturel; nous obtenons:

$$(5) \quad \sum_{\alpha} (R_1^{\alpha i} U_1^\alpha + R_2^{\alpha i} U_2^\alpha) = E_2^i$$

où  $R_1^{\alpha i}$ ,  $R_2^{\alpha i}$  sont les charges totales agissant sur le segment  $\alpha$  dans l'état artificiel et  $E_2^i$  est la seconde composante de la force extérieure au nœud  $i$ .

Notons que (4) et (5) sont des équations *exactes* pour les déplacements moyens  $U_1^\alpha$ ,  $U_2^\alpha$ .

<sup>3)</sup> Une application similaire du théorème de Betti est faite en [4].

A cause des équations d'équilibre liant les contraintes de bord données, il n'y a que  $2n-3$  équations de ce type indépendantes pour un réseau de  $n$  nœuds. Si le réseau, considéré comme un treillis libre, est  $r$  fois hyperstatique, il y a  $s = 2n - 3 + r$  segments et  $2s$  déplacements moyens  $U_1^\alpha$ ,  $U_2^\alpha$  inconnus. Il s'en suit que le nombre d'inconnues du système d'équations du type (4) et (5) excède largement le nombre d'équations. Pour équilibrer le nombre d'équations et d'inconnues, il faut exprimer les déplacements moyens  $U_1^\alpha$ ,  $U_2^\alpha$  en fonction des déplacements naturels  $U_1^k$ ,  $U_2^k$  des nœuds. Naturellement on n'obtiendra ainsi qu'une solution approchée.

La plus simple approximation correspond à la formule des trapèzes pour les quadratures numériques. Elle donne

$$(6) \quad U_1^\alpha = \frac{1}{2} \sum_k a^{\alpha k} U_1^k, \quad U_2^\alpha = \frac{1}{2} \sum_k a^{\alpha k} U_2^k$$

où la sommation est étendue à l'ensemble des nœuds du réseau. Substituons (6) à (4), il vient:

$$(7) \quad \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_k a^{\alpha k} (Q_1^{\alpha i} U_1^k + Q_2^{\alpha i} U_2^k) = E_1^i.$$

Comparons maintenant (7) avec la première condition d'équilibre nodal au nœud  $i$ . A cette fin, considérons le champ de déplacement linéaire par régions correspondant aux déplacements  $U_1^k$ ,  $U_2^k$  de l'état naturel et évaluons la charge totale correspondante sur le segment  $\alpha$ . Par définition de  $Q_1^{\alpha k}$  et  $R_1^{\alpha k}$ , la première composante de cette charge vaut

$$(8) \quad P_1^\alpha = \sum_k (Q_1^{\alpha k} U_1^k + R_1^{\alpha k} U_2^k)$$

où la sommation est étendue à tous les nœuds du réseau car  $Q_1^{\alpha k}$  et  $R_1^{\alpha k}$  ne sont différents de zéro que si  $\alpha$  appartient au domaine  $D^i$ . La première composante de la force intérieure  $I_1^i$  au nœud  $i$  vaut la moitié de la résultante des charges  $P_1^\alpha$  pour tous les segments  $\alpha$  aboutissant au nœud  $i$

$$(9) \quad I_1^i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_k a^{\alpha i} (Q_1^{\alpha k} U_1^k + R_1^{\alpha k} U_2^k).$$

La première condition d'équilibre nodal en  $i$  est l'équation  $I_1^i = E_1^i$  qui semble différente de la relation (7). Pour montrer que ces deux équations sont, en fait, identiques, appliquons le théorème de réciprocité de Betti aux états artificiels correspondants respectivement à un déplacement unitaire du nœud  $i$  suivant  $x_1$  et à un déplacement unitaire du nœud  $k$  suivant  $x_2$ . La charge totale sur le segment  $\alpha$  dans le premier état a pour seconde composante  $Q_2^{\alpha i}$  et le déplacement moyen suivant  $x_2$ , le long de  $\alpha$ , dans le second état vaut  $a^{\alpha k}/2$ . En supprimant le facteur  $1/2$ , on peut donc écrire l'une des expressions du travail du principe de Betti sous la forme  $\sum_{\alpha} a^{\alpha k} Q_2^{\alpha i}$ . Evaluons l'autre expression du travail de manière semblable; nous obtenons

$$(10) \quad \sum_{\alpha} a^{\alpha k} Q_2^{\alpha i} = \sum_{\alpha} a^{\alpha i} R_1^{\alpha k}.$$

De manière analogue, en appliquant encore le principe de Betti aux états artificiels correspondants à un déplacement unitaire dans la direction  $x_1$ , des nœuds  $i$  et  $k$  respectivement, on obtient

$$(11) \quad \sum_{\alpha} a^{\alpha k} Q_1^{\alpha i} = \sum_{\alpha} a^{\alpha i} Q_1^{\alpha k}.$$

Substituons (10) et (11) en (9); nous reconnaissons que la première condition d'équilibre nodal,  $I_1^i = E_1^i$ , est identique à la relation (7).

### 3. Formules explicites et exemple numérique

On a montré au paragraphe 2 que les conditions d'équilibre nodal peuvent être obtenues en utilisant la formule des trapèzes pour évaluer les déplacements moyens, le long des segments du réseau, qui interviennent dans les relations exactes (4) et (5). Dans ce paragraphe, on donne les formules pour un réseau formé de triangles rectangles, isocèles.



Fig. 3-8. Equations déduites de (4) par la formule des trapèzes. Fig. 3: point intérieur; Fig. 4: point au coin supérieur gauche; Fig. 5: point sur le bord supérieur; Fig. 6: point sur le bord gauche; Fig. 7: point sur le bord inférieur; Fig. 8: point au coin inférieur gauche

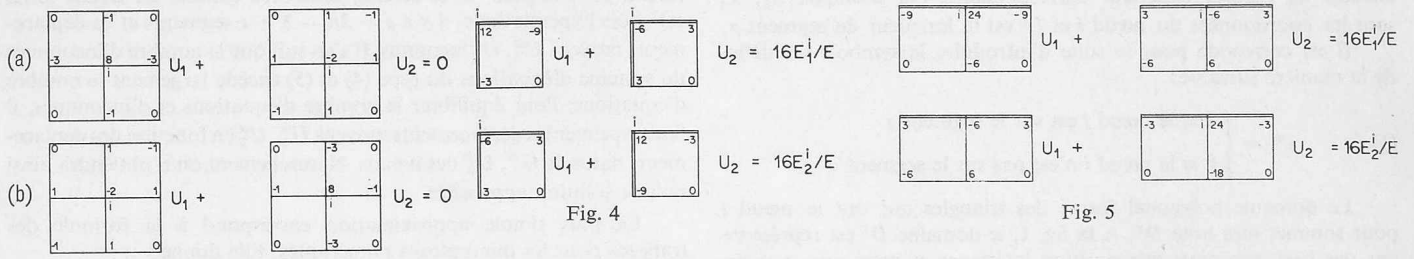


Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

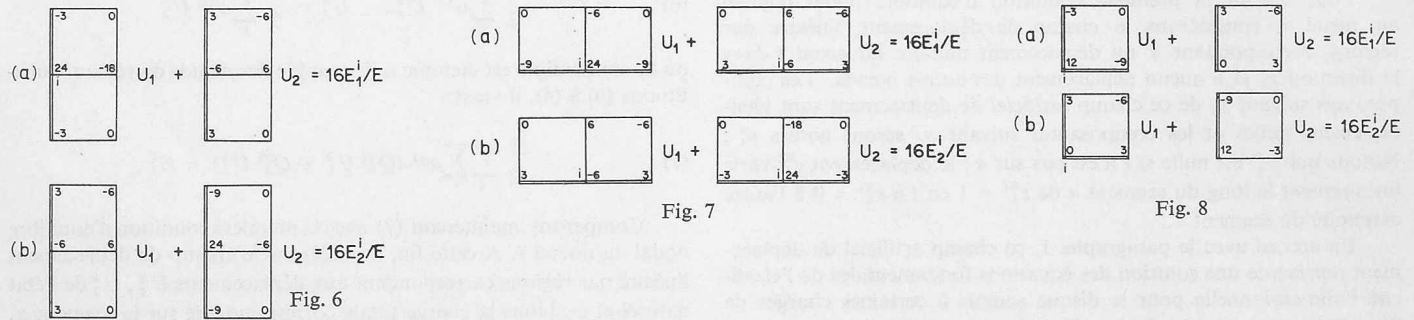


Fig. 7

Fig. 8

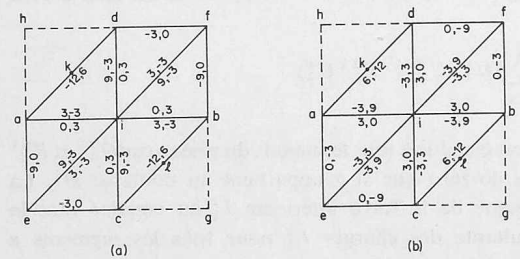


Fig. 2. Domain  $D^i$  et contribution des triangles aux valeurs de  $8Q_1^{\alpha i}/(Et)$ ,  $8Q_2^{\alpha i}/(Et)$  (Fig. 2a) et  $8R_1^{\alpha i}/(Et)$ ,  $8R_2^{\alpha i}/(Et)$  (Fig. 2b).  $E$  = module d'élasticité; coefficient de Poisson =  $1/3$ ;  $t$  = épaisseur du disque

La figure 2a montre le domaine  $D^i$  pour un point  $i$  intérieur et la contribution des triangles aux valeurs de  $8Q_1^{\alpha i}/(Et)$ ,  $8Q_2^{\alpha i}/(Et)$ , où  $t$  est l'épaisseur du disque,  $E$  le module d'élasticité et où le coefficient de Poisson a été choisi égal à  $1/3$ . En donnant la contribution individuelle des triangles adjacents, on dispose de toute l'information nécessaire pour le cas où  $i$  est un point de bord. La contribution des triangles aux valeurs de  $8R_1^{\alpha i}/(Et)$ ,  $8R_2^{\alpha i}/(Et)$  s'obtient à partir de la fig. 2a en effectuant une symétrie par rapport à la seconde bissectrice et en permutant la première et la seconde composante (figure 2b).

En utilisant la formule des trapèzes pour évaluer les déplacements

moyens  $U_1^i$  de (4), on obtient les équations indiquées aux figs. 3-8 pour un point  $i$  intérieur et pour des positions de bord typiques du point  $i$ .

Lorsque le champ de déplacement à déterminer possède un axe de symétrie, par exemple parallèle à  $x_2$ , la disposition des triangles doit être également symétrique. Pour un nœud  $i$  sur l'axe de symétrie, la fig. 2 doit être remplacée par la fig. 9. Si les charges totales  $Q_1^{\alpha i}$ ,  $Q_2^{\alpha i}$  données à la fig. 9 sont substituées à l'équation (4) avec les valeurs moyennes  $U_1^i$ ,  $U_2^i$  correspondant à une interpolation linéaire, on obtient les équations données aux fig. 10a-c.

Pour illustrer la qualité des résultats que l'on peut obtenir avec ces formules, évaluons les déplacements de la poutre représentée à la fig. 11. Les champs de contrainte et de déplacement sont symétriques par rapport à l'axe des  $y$ . La face supérieure de la poutre est sollicitée par une charge verticale uniformément répartie. La face inférieure n'est soumise à aucune contrainte et la résultante des contraintes tangentielles, paraboliquement réparties, agissant sur les deux faces latérales équilibrent les charges verticales de la face supérieure. Pour exclure les déplacements rigides de la poutre, on impose que le déplacement horizontal de l'origine 1 et que le déplacement vertical du point 7 soient nuls.

La solution rigoureuse de ce problème est discutée en [5]. Avec le réseau indiqué à la figure 11 on ne peut espérer obtenir des résultats très précis. La table 1 montre les valeurs approchées et exactes des déplacements verticaux des points 1 à 6 (voir figure 11).

Les équations données aux figures 3-8 sont obtenues en utilisant la formule des trapèzes pour évaluer les déplacements moyens, le long des segments du réseau, qui interviennent dans les relations exactes (4) et (5). On pourrait attendre que des équations donnant de meilleures

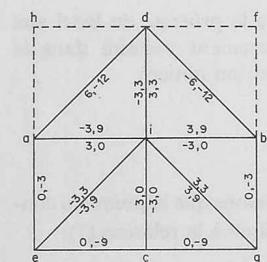


Fig. 9. Pendant de la figure 2 lorsque le nœud  $i$  est sur un axe de symétrie vertical

Fig. 10. Pendants des figures 3, 5, et 7 lorsque le nœud  $i$  est sur un axe de symétrie vertical

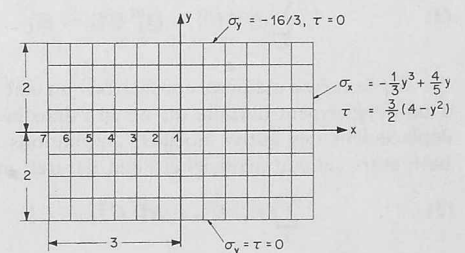
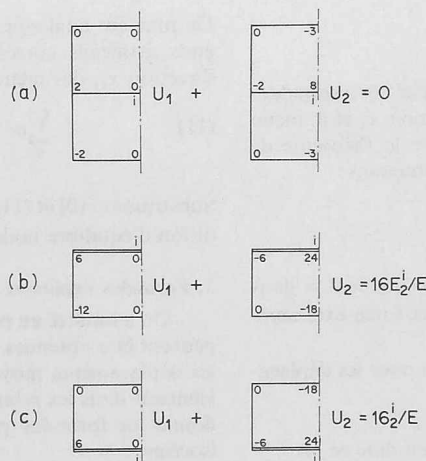


Fig. 11. Représentation schématique du problème illustratif

Table 1: Déplacements verticaux

Point	1	2	3	4	5	6
valeur approchée	32,955	31,954	28,989	24,144	17,566	9,446
valeur exacte	34,275	33,232	30,133	25,073	18,208	9,757

approximations pour les déplacements des nœuds, soient obtenues en utilisant des formules de quadrature d'un plus haut degré de précision.

Cependant, l'application à l'exemple considéré d'équations obtenues à partir de formules d'intégration basée sur une interpolation quadratique, donne de moins bons résultats que ceux de la table 1. Par exemple, on obtient pour le déplacement du point 1, la valeur 32,695.

**Remerciement.** Les auteurs sont reconnaissant à M. le Professeur Mahmut Tanrikulu de l'Université Technique d'Istanbul qui a attiré leur attention sur une erreur numérique dans leurs résultats originaux.

Références

[1] Argyris, J. H.: Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, London, 1964.  
 [2] Clough, R. W.: The Finite Element Method in Structural Mechanics, Chapitre 7 de Stress Analysis, édité par O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, John Wiley & Sons, Ltd., London, 1965.  
 [3] Zienkiewicz, O. C., Cheung, Y. K. et Stagg, K. G.: Stresses in Anisotropic Media with Particular Reference to Problems of Rock Mechanics, University of Wales, Research Report No. C/R/20/65 (1965).  
 [4] Çakiroglu, A. and Kayan, I.: Exact Forms of Finite Difference Equations for Certain Differential Equations, Istanbul Teknik Üniversitesi Bülteni 16 (1963) 77-104.  
 [5] Favre, H.: Cours de Mécanique, vol. 3, p. 29-37, Dunod, Paris, 1949.

Adresses des auteurs: voir page 436.

Kritische Betrachtungen zur Rohrhydraulik

Von André Kropf, dipl. Bau-Ing. ETH, Zürich

DK 532.542

Hierzu Tafeln 21-24

I. Einleitung

Bis zu seiner Ernennung zum Dozenten für Mechanik war Prof. Dr. H. Favre Adjunkt der Versuchsanstalt für Wasserbau an der ETH unter der Leitung von Prof. Dr. E. Meyer-Peter. Aus dieser Zeit stammt eine der grundlegenden Arbeiten auf dem Gebiet der Hydraulik, nämlich seine «Contribution à l'étude des courants liquides» im nichtstationären Zustand. Damit hat Favre dem Praktiker ein Hilfsmittel in die Hand gegeben, das ihm ermöglicht, verschiedene, relativ komplizierte Probleme rechnerisch zu erfassen, die sich in der Praxis oft wiederholen, aber in den seltensten Fällen eingehendere Modellversuche rechtfertigen. Dies trifft namentlich zu bei der angenäherten Bestimmung des erforderlichen Sohlenabsturzes bei seitlichen Einmündungen, bei der Dimensionierung seitlicher Überfallwehre (Regenauslässe) und bei der Ermittlung der Wasserspiegellage in Sammelrinnen von Klärbecken. Es ist nur zu bedauern, dass Favres grundlegende Studien nicht fortgesetzt wurden, um auch jene Fälle zu erfassen, in denen die allgemeine Formel der nicht stationären Bewegung ihre strenge Gültigkeit einbüsst, weil gewisse Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind.

In meiner praktischen Tätigkeit hat mir die Formel von Prof. Dr. Favre, selbst ausserhalb ihres strengen Gültigkeitsbereiches, als Näherungsformel, so gute Dienste geleistet, dass ich es als ein Bedürfnis empfinde, ihm aus Dankbarkeit den nachstehenden Beitrag zu seinem 65. Geburtstag zu widmen.

II. Auszug aus früheren Arbeiten

Die allgemeine Abfluss-Formel [1, 5]<sup>1)</sup> der Rohrhydraulik lautet:

$$(1) \quad J = \lambda \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g}$$

worin  $J$ ,  $D$ ,  $v$  und  $g$  die übliche Bedeutung haben, während mit  $\lambda$  die Widerstandsziffer bezeichnet wird.

Gleichung (1) nach  $v$  aufgelöst und an Stelle des Durchmessers  $D$  der hydraulische Radius  $R = \frac{D}{4}$  eingesetzt, ergibt Gl. (1a):

$$(1a) \quad v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda} J^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}}$$

die der Form nach mit der Formel von Chésy

$$v = C \sqrt{JR} \quad \text{übereinstimmt.}$$

Im Baufach ist die Strickler-Gaukler-Manningsche Formel geläufiger, deren Ansatz lautet:

$$(2) \quad v = k J^{1/2} R^{2/3}$$

Zwischen dem  $k$ -Wert der Stricklerschen Formel und dem  $\lambda$ -Wert der allgemeinen Formel besteht somit die einfache Beziehung:

$$(3) \quad k = \frac{1}{R^{1/6}} \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$$

<sup>1)</sup> Literaturverzeichnis am Schluss des Aufsatzes.

Der Umstand, dass zur Ermittlung der selben Grösse, neben den bereits erwähnten Formeln, noch andere nebeneinander bestehen können, deutet bereits darauf hin, dass keine derselben voll befriedigt. Dies geht schon aus dem Umstand hervor, dass weder  $\lambda$  noch  $k$  wirkliche Konstanten sind, sondern komplexe Funktionen der Reynoldsschen Zahl und der relativen Rauigkeit. Es soll deshalb versucht werden, gestützt auf die publizierten Messresultate Nikuradses, deren Richtigkeit vorausgesetzt wird, eine möglichst allgemeine Abflussformel herzuleiten, in welcher die Widerstandsziffer nur von der Beschaffenheit der Rohrwandung abhängen soll.

Als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen nehmen wir folgenden Ansatz an:

$$(4) \quad v = k J^\alpha R^\beta$$

worin  $k$  eine Konstante sein soll, während die Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$  noch zu ermitteln sind.

Bisher haben die meisten Autoren für  $\alpha$  den Wert  $1/2$  eingesetzt, in der Annahme, dass im turbulenten Bereich der Widerstand immer streng mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zunehme, was aber nicht immer zutrifft.

Noch grössere Zweifel wirft die allgemein anerkannte  $\lambda$ -Formel auf, weil darin der Exponent von  $R$  mit  $\beta = \frac{1}{2}$  offensichtlich nicht stimmen kann, ansonst die in der Praxis bewährte Strickler-Formel ( $\beta = 2/3$ ) falsch sein müsste. Es ist deshalb verständlich, dass die Widerstandsziffer  $\lambda$  nicht allein von der Wandrauigkeit abhängt, sondern gleichzeitig einen Korrekturfaktor implizit einschliesst. Wenn die Formel (1a) dennoch richtige Resultate liefert, so nur deshalb, weil frühere Autoren den Verlauf der  $\lambda$ -Funktion auf Grund eingehender Messungen im Laboratorium und an ausgeführten Leitungen empirisch ermittelt haben [5, 1].

Die neuere Forschung unterscheidet drei Gruppen von Leitungen, je nach dem generellen Verlauf der  $\lambda$ -Funktion, nämlich:

Gruppe A: Glatte Rohre

Für absolut glatte Rohre<sup>2)</sup> ist  $\lambda$  eine Funktion der Reynoldsschen

Zahl  $Re = \frac{vD}{\nu}$ , also proportional der Geschwindigkeit  $v$ , dem Rohrdurchmesser  $D$  und umgekehrt proportional der kinematischen Zähigkeit  $\nu$  (siehe Kurve a in Bild 1)<sup>3)</sup>.

Gruppe B: Rohre mit rauhem Charakter.

Für diese Gruppe von Rohren ist  $\lambda$  zudem noch abhängig von der

relativen Rauigkeit  $\frac{2s}{D} = \frac{s}{2R}$ . ( $s$  = absolute Rauigkeit, d. h.

mittleres Mass der Unebenheiten der Rohrwandung in mm). Die von Nikuradse [5] für diese Art von Rohren abgeleiteten Funktionen

$\lambda \left( R, \frac{2s}{D} \right)$  verlaufen generell wie Kurve b in Bild 1. Für kleine

<sup>2)</sup> Hierzu wurden gezogene Messingrohre verwendet mit absolut glatter Wandung; die zugehörigen  $\lambda$ -Werte können daher als oberste Grenzwerte betrachtet werden.

<sup>3)</sup> Für Reinwasser bei 10 °C,  $\nu = 1,31 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .