

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 84 (1966)
Heft: 1

Artikel: Widerlagerreaktionen bei durchlaufenden schiefen Platten
Autor: Gunten, H.von
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-68807>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der projektierende Ingenieur möge auf Grund dieser Darstellung die grosse technische und wirtschaftliche Leistung des seriösen Stahlbauers anerkennen. Dieser ist aber seinerseits auch gehalten, den Missbrauch seiner

Ingenieur-Kenntnisse durch die Bauherren zu meistern, um damit die Konkurrenzierung des frei erwerbenden Ingenieurs in Grenzen zu halten. Auf der Basis einer solchen Verhaltensweise können Ingenieur und Stahlbauer

zusammenarbeiten und so einen wichtigen Beitrag zum Kostenaspekt im Bauwesen leisten.

Adresse des Verfassers: *Werner Geilinger*, in Firma Geilinger & Co., Eisenbau-Werkstätten, 8401 Winterthur, Postfach.

Widerlagerreaktionen bei durchlaufenden schiefen Platten

DK 624.073.126

Von Dr. sc. techn. **H. von Gunten**, Bern

1. Einleitung

In den letzten Jahren ist das Schrifttum über schiefe Einfeldplatten gewaltig angestiegen, so dass heute dem Ingenieur ausreichende Angaben und Tabellen zum Erstellen von Vor- und Ausführungsprojekten zur Verfügung stehen. Insbesondere hat man ziemlich eingehende Kenntnisse von der Grösse und ungleichmässigen Verteilung der Auflagerreaktionen (vgl. dazu Lit. [1], [2], [3]¹⁾). Für durchlaufende schiefe Platten findet man wohl verschiedenste Literaturangaben über die Grösse und Richtung der Hauptmomente, hingegen gibt es nur sehr spärliche Angaben über die Grösse der Reaktionen bei den Endauflagern. Diese haben zudem meist nur für ganz bestimmte Einzelfälle Gültigkeit. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass in der Praxis oft sehr rudimentäre und leider auch falsche Vorstellungen über diese Kräfte vorhanden sind. Mit der vorliegenden Arbeit ist beabsichtigt, für einige systematisch zusammenhängende Fälle von schiefen Dreifeldplatten genaue Werte der Widerlagerreaktionen anzugeben und auf die komplizierten Zusammenhänge hinzuweisen.

2. Auswahl der untersuchten Plattentypen

Die unten dargestellten Ergebnisse wurden mittels Modellversuchen gewonnen. Es ist hier nicht der Ort, um auf die Einzelheiten der Messtechnik und Umrechnung einzutreten (vgl. hierzu z. B. [4]).

In Bild 1 finden sich die Bezeichnungen, wie sie in der vorliegenden Arbeit benützt werden.

Wie bei den Einfeldplatten sind auch bei schiefen, an den Widerlagern punktförmig gestützten Durchlaufplatten die Reaktionen abhängig von der Plattenschiefe, dem Seitenverhältnis $l:b$, der Anzahl der Lager, der Lage der Abstützungen, der Nachgiebigkeit der Lager und der Belastungsart (vgl. [3], Seite 26).

Bei den durchlaufenden Platten spielen weiter die Zahl und die Längenverhältnisse der Öffnungen eine Rolle.

Diese grosse Zahl von Parametern bedingen – um den Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht zu sprengen – gewaltige Einschränkungen, so dass viele, an sich sehr gerechtfertigte Wünsche, leider nicht erfüllt werden können. Sechs verschiedene Plattentypen, die im folgenden kurz beschrieben sind, wurden untersucht.

Bei den Messungen wurden durchwegs Dreifeldplatten verwendet, und zwar mit den senkrecht zu den Auflagerlinien gemessenen Spannweiten l , l_M und l (vgl. Bild 1). Als Verhältnisse dieser Grössen wurden gewählt:

$$\begin{aligned} l : l_M : l &= 1 : 2 : 1 \\ &= 1 : 1,5 : 1 \\ &= 1 : 1 : 1. \end{aligned}$$

Die Kenntnis der Auflagerreaktionen bei schiefen Einfeldplatten (Angaben in [3]) sowie bei Dreifeldplatten dürften genügen, um bei

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

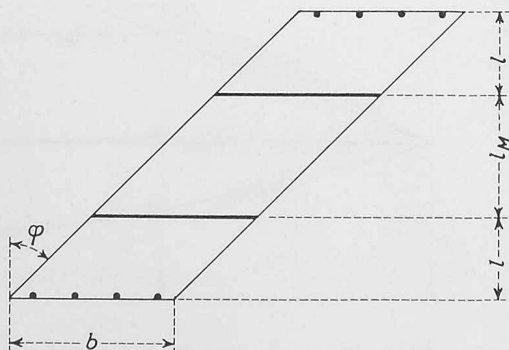


Bild 1. Bezeichnungen

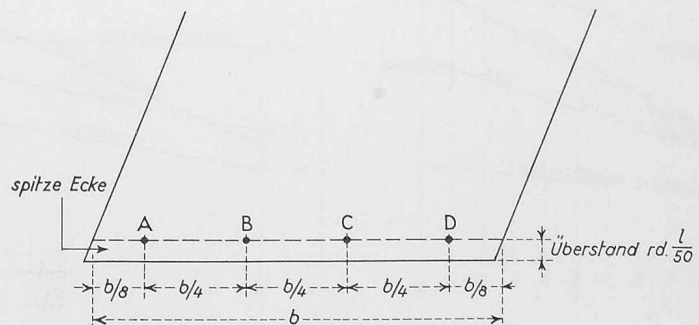


Bild 2. Anordnung und Bezeichnungen der Auflagerpunkte

Vorprojekten für Durchlaufträger mit anderer Felderzahl die Widerlagerreaktionen genügend genau abzuschätzen.

Die Plattenschiefe, hier mit φ bezeichnet, betrug 0° , 15° , 30° , 45° und 60° . Auf eine Messung der Auflagerkräfte für die durchlaufende Rechteckplatte ($\varphi = 0^\circ$) konnte nicht verzichtet werden, da die ungleichmässige Verteilung von vornherein nicht bekannt war und auch die Summe der Einzelreaktionen nicht mit dem Wert des Dreifeldbalkens übereinstimmt, da, bedingt durch den Plattencharakter, über den Punktlagern negative Momente auftreten, welche ihrerseits die Auflagerreaktionen beeinflussen.

Die untersuchten Seitenverhältnisse waren:

$$l : b = 1 : 2$$

$$= 1 : 1.$$

Bei der Festlegung der Anzahl Einzellager musste der grösste und willkürlichste Eingriff getan werden. Nach reiflicher Überlegung wurden bei den Widerlagern vier einzelne Punktlager gewählt. Sie sind in regelmässigen Abständen angeordnet (Bild 2) und wurden im Modell durch kleine Stahlkugeln nachgebildet.

Andrä und Leonhardt [2] haben gezeigt, dass die Anzahl der Auflager einen entscheidenden Einfluss auf die Grösse der Auflagerreaktionen hat. Bevor von den hier vorgelegten Ergebnissen mit vier Endauflagern auf die Grösse der Reaktionen bei einer andern Lageranzahl geschlossen wird, ist es angebracht, die Veröffentlichung von Andrä und Leonhardt sehr genau zu studieren.

Die Zwischenaullager wurden als Linienlager ausgebildet. Um die Nachgiebigkeit aller Auflager auszuschalten, haben wir sehr starke Stahlprofile als Unterstützung gewählt. Die in der Dissertation von Weise [3], S. 11) verwendete Nachgiebigkeit N darf demzufolge in guter Näherung als null gesetzt werden.

In der vorliegenden Untersuchung wurden zwei Belastungen berücksichtigt:

- eine gleichmässig verteilte Vollbelastung, die dem Eigengewicht entspricht und demzufolge die Bezeichnung g trägt und
- eine gleichmässig verteilte Last in den Randfeldern, die nach der Theorie des durchlaufenden Balkens für den Dreifeldträger die maximalen Widerlagerkräfte ergeben würde. Diese Lastanordnung wird mit p bezeichnet.

Die genaue Untersuchung von schiefen durchlaufenden Platten zeigt, dass die Nulllinien der Einflussflächen für die Widerlagerreaktionen nicht mit den Auflagerlinien übereinstimmen und zudem für jedes Einzellager verschieden ausfallen. Obschon demzufolge der Belastungsfall p nicht die maximalen Auflagerkräfte für gleichmässig verteilte Belastung ergibt, dürften die Resultate genügend Anhaltspunkte für eine erste Dimensionierung enthalten.

Tabelle 1 $l:l_M:l = 1:2:1$ $l:b = 1:2$

φ°	Belastung g Lager				Belastung p Lager			
	A	B	C	D	A	B	C	D
0	7	6	6	7	10	10	10	10
15	8	7	5	6	10	10	7	13
30	9	7	6	5	9	10	7	15
45	7	9	8	4	7	10	8	17
60	5	9	12	3	5	9	8	21

Tabelle 4 $l:l_M:l = 1:2:1$ $l:b = 1:1$

φ°	Belastung g Lager				Belastung p Lager			
	A	B	C	D	A	B	C	D
0	7	7	7	7	10	11	11	10
15	9	7	7	5	9	10	10	13
30	9	8	8	3	7	9	9	17
45	7	9	10	2	4	7	9	22
60	3	10	16	1	1	3	8	31

Tabelle 2 $l:l_M:l = 1:1,5:1$ $l:b = 1:2$

φ°	Belastung g Lager				Belastung p Lager			
	A	B	C	D	A	B	C	D
0	8	8	8	8	10	10	10	10
15	9	8	6	9	10	10	8	13
30	8	8	7	10	9	10	8	15
45	7	9	8	10	7	10	8	18
60	5	9	10	11	5	9	8	22

Tabelle 5 $l:l_M:l = 1:1,5:1$ $l:b = 1:1$

φ°	Belastung g Lager				Belastung p Lager			
	A	B	C	D	A	B	C	D
0	8	9	9	8	10	11	11	10
15	9	9	9	8	9	10	10	13
30	7	9	10	9	5	10	10	17
45	5	9	10	11	3	8	10	22
60	2	6	12	16	1	3	8	31

Tabelle 3 $l:l_M:l = 1:1:1$ $l:b = 1:2$

φ°	Belastung g Lager				Belastung p Lager			
	A	B	C	D	A	B	C	D
0	9	8	8	9	10	9	9	10
15	8	8	8	11	10	10	7	12
30	8	8	7	13	9	10	7	14
45	7	9	8	14	7	10	8	17
60	5	9	9	15	5	9	8	20

Tabelle 6 $l:l_M:l = 1:1:1$ $l:b = 1:1$

φ°	Belastung g Lager				Belastung p Lager			
	A	B	C	D	A	B	C	D
0	9	10	10	9	10	11	11	10
15	9	10	9	10	9	10	10	13
30	6	10	10	12	5	10	11	16
45	4	8	10	16	3	8	10	21
60	1	5	9	25	1	3	8	31

3. Messergebnisse

Die in den Tabellen 1 bis 6 angegebenen Zahlen geben an, wie viele Prozente der gesamten Belastung des Randfeldes ($g \cdot b \cdot l$ bzw. $p \cdot b \cdot l$) durch die einzelnen Auflager aufgenommen werden.

4. Schlussbemerkungen

Die Betrachtung der vorliegenden Ergebnisse gibt ein deutliches Bild von den äusserst komplizierten Zusammenhängen. Unter Vollast g kann z. B. je nach Plattentyp und Winkel der Schiefe jedes der vier Auflager A, B, C und D den grössten Auflagerdruck aufweisen.

Bei den Einfeldplatten nimmt stets das Auflager an der stumpfen Ecke, also D, den grössten Wert an. Auch bei den Rechteckplatten ($\varphi = 0^\circ$) sind verschiedene Variationen möglich. Es kann sein, dass alle Lager gleich stark belastet werden; es kann aber auch vorkommen, dass die innern oder äussern Auflager mehr aufzunehmen haben.

Abschliessend soll betont werden, dass die Modellversuche bei der Lösung von Problemen, wie sie in der vorliegenden Arbeit auftraten, das einzige Mittel zur Erlangung genauer Resultate sind.

Alle aus den Tabellen 1 bis 6 sich errechnenden Auflagerkräfte sind Druckkräfte.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Vogt: Die Auflagerkräfte von zweiseitig aufgelagerten schiefwinkligen Einfeldplatten, «Beton- und Stahlbetonbau» 1956, Heft 8.
- [2] W. Andrä und F. Leonhardt: Einfluss des Lagerabstandes auf Biegemomente und Auflagerkräfte schiefwinkliger Einfeldplatten, «Beton- und Stahlbetonbau» 1960, Heft 7.
- [3] H. Weise: Ein modellstatistischer Beitrag zur Untersuchung punktförmig gestützter schiefwinkliger Platten unter besonderer Berücksichtigung der elastischen Auflagnachgiebigkeit, Diss. TH Darmstadt, 1963.

- [4] K.-H. Hehn: Modellstatistische Untersuchung dünner Platten unter besonderer Berücksichtigung ihrer Rand- und Stützbedingungen, Diss. TH Karlsruhe, 1962.

Adresse des Verfassers: Dr. H. von Gunten, Ingenieurbüro Walder & Dr. von Gunten, Egelgasse 72, Bern.

Kipp-Probleme als zusammengesetzte Stabilitätsaufgaben

Von Jean Gut, dipl. Ing. ETH, S. I. A., Küsnacht ZH

DK 624.075.3

In den folgenden Ausführungen seien Balken mit doppelt-symmetrischem I-Profil betrachtet, welche durch Lasten mit Angriffspunkt an den gedrückten Querschnittsteilen auf Kippen beansprucht werden. Wir fassen diese Stabilitätsaufgaben als Überlagerung von zwei Teilproblemen auf und zeigen, wie man durch diesen Kunstgriff ohne grossen Rechenaufwand aus den Lösungen der Teilprobleme recht engliegende obere und untere Schranken für die gesuchten kritischen Lasten angeben kann. Zur Bestimmung der Teillösungen erweisen sich die von Professor Dr. F. Stüssi mit Meisterschaft entwickelten baustatischen Methoden als besonders nützlich: der erstmals von ihm zur Lösung von solchen Kippaufgaben gewählte Weg der schrittweisen Annäherung (das Engesser-Vianello-Verfahren des Knickstabes) [1] in Verbindung mit der bewährten Seilpolygongleichung [2, 3] zur Integration von linearen Differentialgleichungen.

Die Differentialgleichung

Zur Herleitung der Differentialgleichung des Problems ist nach S. Timoshenko [4] im Bild 1 ein verformtes Stabelement im Querschnitt und Grundriss herausgezeichnet. Seine horizontale Auslenkung ist mit u und sein Drehwinkel mit φ bezeichnet; die vertikale Durchbiegung v aus den planmässig wirkenden Lasten (Grundzustand) wird entsprechend der klassischen Theorie vernachlässigt. Zwischen den Verformungen u , φ und dem Moment M_x , beziehungsweise dessen Komponenten M_η , M_ξ , bezogen auf die Querschnittsachsen η , ξ nach der Verformung, bestehen bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung die Beziehungen

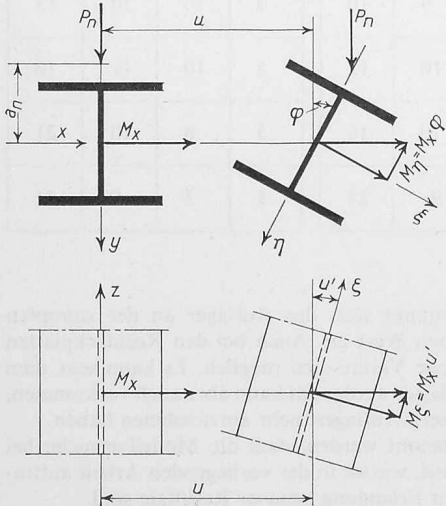


Bild 1. Querschnitt und Grundriss eines Stabelementes vor und nach der Auslenkung

$$(1) \quad EI_y u'' = -M_\eta = -M_x \varphi$$

$$(2) \quad EC_M \varphi''' - GJ_d \varphi'' = m_\xi$$

Hierbei bezeichnet EI_y die Biegesteifigkeit um die Hauptaxe y , EC_M die Wölb- und GJ_d die Drillsteifigkeit des Trägerprofils; die Ableitungen ($'$) beziehen sich auf die Stabaxe z . In der Torsionsgleichung steht m_ξ für alle angreifenden Verdrehmomente, welche durch die Verformungen sowohl aus den inneren Ablenkungskräften wie aus den äusseren Lasten entstehen und die nun zu bestimmen sind.

Aus dem Biegemoment M_x rührt die Torsionskomponente $M_\xi = M_x u'$ als Schnittkraft her; das zugehörige Verdrehmoment beträgt

$$(a) \quad m_{\xi 1} = -M_\xi' = -M_x u''.$$

Eine Last P_n mit Angriffspunkt auf der gedrückten Querschnittshälfte erzeugt das Verdrehmoment $m_{\xi 2} = +P_n a_n \varphi_n$. Bei mehreren solchen Lasten wirkt an jedem Angriffsort ein solches Verdrehmoment; wir schreiben für die Gesamtheit symbolisch

$$(b) \quad m_{\xi 2} = \sum P_n a_n \varphi_n.$$

Aus Gl. (2) wird damit

$$(2a) \quad EC_M \varphi''' - GJ_d \varphi'' = -M_x u'' + \sum P_n a_n \varphi_n.$$

Die Gleichungen (1) und (2a) umschreiben zusammen das Stabilitätsproblem. Setzt man Gl. (1) in Gl. (2a) ein, so folgt daraus die massgebende homogene Differentialgleichung

$$(3) \quad EC_M \varphi''' - GJ_d \varphi'' = \frac{M_x^2}{EI_y} \varphi + \sum P_n a_n \varphi_n$$

mit der alleinigen Variablen φ , welche zusammen mit den Randbedingungen, z. B.

$$(4) \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \quad \varphi''(0) = \varphi''(L) = 0$$

bei Gabelagerung (Flanschenden frei drehbar) die ideale kritische Belastung P_{ki} als kleinsten Eigenwert liefert.

Lösungsweg

Die Differentialgleichung (3) lautet in konzentrierter Schreibweise

¹⁾ Bei Lastangriff auf der gezogenen Querschnittshälfte wäre m_ξ negativ, d. h. stabilisierend. Die später benutzten Einschränkungen verlieren für diesen Fall ihre strenge Gültigkeit.

$$M[\varphi] = P^2 \cdot N_I[\varphi] + P \cdot N_{II}[\varphi],$$

wobei

$$M[\varphi] \equiv EC_M \varphi''' - GJ_d \varphi''$$

(5)

$$N_I[\varphi] \equiv \frac{1}{EI_y} \left(\frac{M_x^2}{P} \right) \varphi \equiv \frac{\bar{M}_x^2}{EI_y} \varphi$$

$$N_{II}[\varphi] \equiv \sum \left(\frac{P_n}{P} \right) a_n \varphi_n \equiv \sum \bar{P}_n a_n \varphi_n$$

die von L. Collatz [5] eingeführten Bezeichnungen sind. Die Bezugslast P erscheint in dieser Gleichung in linearer und in quadratischer Form. Das Verfahren der schrittweisen Annäherung, das wir seiner praktischen Vorzüge wegen anwenden wollen, lässt sich exakt nur auf Gleichungen von der Gestalt

$$(6) \quad M[\varphi] = \lambda \cdot N[\varphi]$$

anwenden²⁾, in welcher der jetzt mit λ benannte Eigenwert linear vorkommt. Zur Lösung der Aufgabe zerlegen wir das gegebene Problem in die folgenden zwei Teilprobleme:

$$(7a) \quad I \quad M[\varphi_I] = \lambda_I \cdot N_I[\varphi_I] \quad \text{mit} \quad \lambda_I = P^2$$

$$(7b) \quad II \quad M[\varphi_{II}] = \lambda_{II} \cdot N_{II}[\varphi_{II}] \quad \text{mit} \quad \lambda_{II} = P.$$

Anschaulich bedeutet das, dass wir die Kräfte, welche die Instabilität verursachen, durch eine Art Belastungsumordnung aus zwei Teilkraftgruppen aufbauen, die zusammen der Gesamtlastgruppe äquivalent sind (vergleiche Bild 2). Im Problem I greifen alle äusseren Lasten in der Schweraxe des Balkens an, wodurch die Instabilität allein durch die Ablenkungskräfte aus dem Moment M_x verursacht wird. Im Problem II werden die äusseren Lasten durch entsprechende Gleichgewichtsgruppen an ihren tatsächlichen Angriffsort versetzt; die Instabilität erfolgt durch die Verdrehmomente aus diesen entgegengesetzt-gleichen Kräften.

Jede dieser Teilkraftgruppen lassen wir nun getrennt am System angreifen und ermitteln für jedes Teilproblem den zugehörigen kleinsten Eigenwert λ . Die Iterationsvorschrift

²⁾ In [1] und [3] wird ein anderer Weg beschrieben.

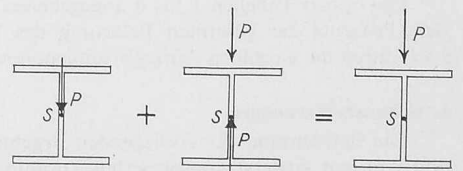


Bild 2. Aufteilung des Gesamtproblems in zwei Teilprobleme