

Diagramme für die Traglast von Stahlbetonquerschnitten bei kleiner Exzentrizität der Drucklast

Autor(en): **Knoll, Franz**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **83 (1965)**

Heft 52

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-68335>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Diagramme für die Traglast von Stahlbetonquerschnitten bei kleiner Exzentrizität der Druckkraft

DK 624.043:624.012.45

Von Franz Knoll, dipl. Bauing., Institut für Baustatik, Hoch- und Brückenbau an der ETH, Zürich

Hierzu Tafeln 48-53

1. Einleitung

Das Problem der Traglast von rechteckigen Stahlbetonquerschnitten unter Normalkraft mit kleiner, einfacher Exzentrizität enthält unter Annahme der weiter unten verzeichneten Spannungs-Dehnungsdiagramme (2.2) neun Parameter:

- Querschnittsmasse: d, b, h'
- Material-Eigenschaften: σ_F, β
- Armierung: Fe, Fe'
- Traglast: P
- Exzentrizität: e

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Bruchstauchung ϵ_r des Betons und der Elastizitätsmodul des Stahles fest gegeben sind.

Zur Vereinfachung wurden die Diagramme (Traglast P) auf den normierten Querschnitt $\bar{d} = \bar{b} = 10$ cm bezogen. Durch eine affine Vergrößerung in beiden Richtungen lassen sie sich leicht auf beliebige Querschnittsabmessungen übertragen (siehe Abschnitt 5). Ferner wurde eine symmetrische Armierung angenommen: $Fe = Fe'$. Dies wird in vielen Fällen den konstruktiven Gegebenheiten entsprechen, da eine kleine Exzentrizität der Normalkraft oft mit wechselndem Vorzeichen auftritt.

Damit ist die Zahl der Variablen auf sechs reduziert; die beiden Materialparameter σ_F und β werden diskret variiert, indem für eine Auswahl von Kombinationen je ein Diagramm für die gegenseitige Beziehung der übrigen Größen angelegt ist. Die Kombinationen sind:

σ_F kg/cm ²	$\beta = 200$	250	300	350	400 kg/cm ²
3500	x	x	x	x	
4200	x	x	x	x	x
5000			x	x	x

Sie überdecken das Gebiet der gebräuchlichen Fälle.

Die Tabellen, die den Diagrammen zugrunde liegen, sind auf der elektronischen Rechenanlage des Rechenzentrums der ETH (Control-Data 1604) berechnet worden. Weitere Fälle können bei Bedarf ohne weiteres nachgerechnet werden. Die Exzentrizität variiert in den Grenzen $0 < e < e_{Gr}$, wobei e_{Gr} durch den Zustand gegeben ist, bei dem die eine Randspannung σ_b gerade verschwindet. Der Armierungsgehalt ist auf die äusseren Querschnittsabmessungen bezogen:

$$(1) \quad \mu = \frac{Fe}{bd} = \mu' = \frac{Fe'}{bd}$$

Zum besseren Verständnis der Beziehungen ist im folgenden eine kurze Herleitung der Formeln gegeben, die der automatischen Berechnung zugrunde gelegt wurden. Um einen Iterationsprozess zu vermeiden, ist die Berechnung von P explizite dargestellt worden, was unter den nachstehenden Voraussetzungen über die Materialeigenschaften möglich war.

2. Allgemeines

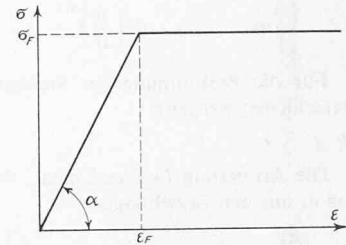
2.1 Voraussetzungen

- Ebenbleiben der Querschnitte (Bernoulli-Navier)
- Zeiteinflüsse wie Kriechen, Schwinden etc. sind nicht berücksichtigt
- Als Grenze des behandelten Bereiches der Exzentrizität gilt einerseits der Fall des zentrischen Druckes ($e = 0$), andererseits die Bedingung, dass keine Zugspannungen auftreten. Im zweiten Grenzfall liegt somit die neutrale Axe auf dem Rande des Querschnittes.
- Die Diagramme gelten für symmetrisch armierte Rechteckquerschnitte bei einfacher Exzentrizität (keine schiefe Biegung).

¹⁾ Die Bruchspannung β beträgt etwa $2/3$ der Würfeldruckfestigkeit (Kurzzeitversuch).

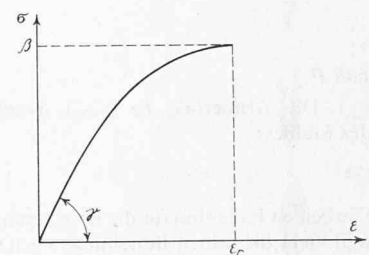
2.2 Spannungs-Dehnungsdiagramm des Stahles

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= E_e = 2100 \text{ t/cm}^2 \\ \sigma_F &= \text{Flie\ssspannung} \end{aligned}$$

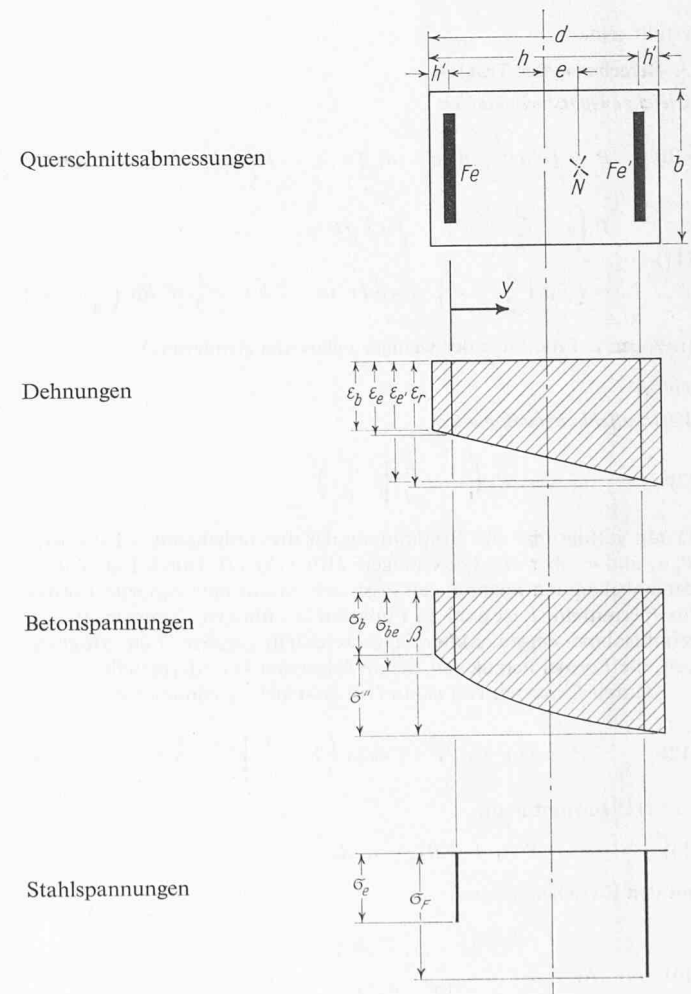


2.3 Spannungs-Stauchungsdiagramm des Betons

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= E_b = 2 \beta / \epsilon_r \\ \epsilon_r &= 3000, \text{ Bruchstauchung} \\ \beta &= \text{Bruchspannung}^1) \end{aligned}$$



2.4 Bezeichnungen



Belastung: Traglast P mit Angriffspunkt N senkrecht zum Querschnitt, Exzentrizität e .

2.5 Beziehungen

$$(2) \quad \sigma = 2\beta \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_r} \right) - \beta \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_r} \right)^2$$

$$(3) \quad \varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\beta}}$$

$$(4) \quad \varepsilon_e = (\varepsilon_r - \varepsilon_b) \frac{h'}{d} + \varepsilon_b = \varepsilon_r \frac{h'}{d} + \varepsilon_b \frac{h}{d}$$

$$(5) \quad \sigma_b = \beta - \sigma''$$

$$(6) \quad \sigma_{be} = \beta - \sigma'' \left(\frac{h}{d} \right)^2$$

Für die Bestimmung der Stahlspannung σ_e müssen zwei Fälle unterschieden werden:

Fall A

Die Armierung Fe fließt nicht. Dann erhält man die Stahlspannung σ_e aus den Beziehungen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \sigma_e = \varepsilon_e E_e = \varepsilon_r E_e \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_{be}}{\beta}} \right) = \\ = \varepsilon_r E_e \left(1 - \frac{h}{d} \sqrt{\frac{\sigma''}{\beta}} \right) \end{aligned}$$

Fall B

Die Armierung Fe fließt. Dann gilt nach der Charakteristik des Stahles:

$$(8) \quad \sigma_e = \sigma_F$$

Die beiden Fälle sind für die Berechnung der Traglast zu unterscheiden, weil nicht die selben Beziehungen gelten.

Allgemein muss die Ungleichung:

$$(9) \quad \sigma_e \leq \sigma_F$$

erfüllt sein.

3. Berechnung der Traglast

Gleichgewichtsbedingungen

$$(10) \quad P = \int \sigma dF = \beta b d + \sigma_F Fe' + \sigma_e Fe - \frac{1}{3} \sigma'' b d$$

$$(11) \quad \begin{aligned} P \left(e + \frac{d}{2} - h' \right) = \int \sigma y dF = \\ = \beta b d \left(\frac{d}{2} - h' \right) + \sigma_F Fe' (d - 2h') - \frac{1}{3} \sigma'' b d \left(\frac{d}{4} - h' \right) \end{aligned}$$

(bezogen auf die Lage der weniger belasteten Armierung)

Fall A

Verträglichkeitsbedingung

$$(7) \quad \sigma_e = \varepsilon_r E_e \left(1 - \frac{h}{d} \sqrt{\frac{\sigma''}{\beta}} \right)$$

Damit verfügt man zur Bestimmung der drei unbekannt Parameter P , σ_e und σ'' über drei Gleichungen: (10), (11), (7). Durch Elimination der unbekannt Spannungen lässt sich daraus eine explizite Formel für P ermitteln. P ist dann in Funktion der übrigen Parameter (Querschnittsabmessungen, Materialeigenschaften) gegeben. Eine Möglichkeit, die Formel herzuleiten, sei im folgenden kurz dargestellt.

Durch Einsetzen von (7) in (10) lässt sich σ_e eliminieren:

$$(12) \quad P = \beta b d + \sigma_F Fe' + \varepsilon_r E_e \left(1 - \frac{h}{d} \sqrt{\frac{\sigma''}{\beta}} \right) Fe - \frac{1}{3} \sigma'' b d$$

Aus (11) gewinnt man:

$$(13) \quad \sigma'' = P R_1 + \beta R_2 + \sigma_F R_3$$

mit den Zwischengrößen:

$$(14) \quad R_1 = - \frac{12 \left(e + \frac{d}{2} - h' \right)}{b d (d - 4 h')}$$

$$(15) \quad R_2 = + \frac{6 (d - 2 h')}{d - 4 h'}$$

$$(16) \quad R_3 = + \frac{12 \mu' (d - 2 h')}{d - 4 h'} = + \frac{12 Fe' (d - 2 h')}{b d (d - 4 h')}$$

Löst man die Gleichung (12) nach der Wurzel auf, so ist implizite:

$$(17) \quad \sqrt{\sigma''} = \frac{d \sqrt{\beta}}{Fe h \varepsilon_r E_e} \left(Fe \varepsilon_u E_e - P + \beta b d + \sigma_F Fe' - \frac{1}{3} \sigma'' b d \right)$$

Einsetzen von (13) und Quadrieren ergibt:

$$(18) \quad \sigma'' = P^2 R_4^2 R_6^2 + 2 P R_4^2 R_5 R_6 + R_4^2 R_5^2$$

mit den Hilfsgrößen:

$$(19) \quad R_4 = + \frac{d \sqrt{\beta}}{Fe h \varepsilon_r E_e}$$

$$(20) \quad \begin{aligned} R_5 = Fe \varepsilon_r E_e + \beta b d + \sigma_F Fe' - \frac{1}{3} (b d \beta R_2 + \sigma_F b d R_3) = \\ = Fe \varepsilon_r E_e - \beta b d \frac{d}{d - 4 h'} - \sigma_F Fe' \frac{3 d - 4 h'}{d - 4 h'} \end{aligned}$$

$$(21) \quad R_6 = -1 - \frac{1}{3} R_1 b d = \frac{4 e + d}{d - 4 h'}$$

Der Vergleich mit (13) ergibt eine quadratische Gleichung für P allein:

$$(22) \quad 0 = P^2 R_4^2 R_6^2 + P (2 R_4^2 R_5 R_6 - R_1 + R_4^2 R_5^2 - \beta R_2 - \sigma_F R_3)$$

Die positive Wurzel ist:

$$(23) \quad P = R_7 + \sqrt{R_8}$$

mit:

$$(24) \quad R_7 = \frac{R_1}{2 R_4^2 R_6^2} - \frac{R_5}{R_6}$$

$$(25) \quad R_8 = \frac{R_1^2}{4 R_4^4 R_6^4} - \frac{R_1 R_5}{R_4^2 R_6^3} + \frac{\beta R_2}{R_4^2 R_6^2} + \frac{\sigma_F R_3}{R_4^2 R_6^2}$$

Bemerkung: Die andere Wurzel der quadratischen Gleichung würde, wie eine Kontrollrechnung zeigt, auf eine Lösung von P führen, die der Bedingung (9) widerspricht. Sie hat somit keine physikalische Bedeutung.

Fall B

Anstelle der Verträglichkeitsbedingung (7) gilt hier die Fließbedingung:

$$(9) \quad \sigma_e = \sigma_F$$

Setzt man diese in (10) ein, so findet man:

$$(26) \quad P = \beta b d + \sigma_F (Fe + Fe') + \frac{1}{3} \sigma'' b d$$

Gleichung (13) gilt unverändert, da dort das Glied σ_e nicht erscheint:

$$(13) \quad \sigma'' = P R_1 + \beta R_2 + \sigma_F R_3$$

Einsetzen von (13) in (26) ergibt, aufgelöst nach der Traglast:

$$(27) \quad P = + \frac{\beta R_9 + \sigma_F R_{10}}{R_{11}}$$

Die Hilfsgrößen sind:

$$(28) \quad R_9 = b d \left(1 - \frac{R_2}{3} \right)$$

$$(29) \quad R_{10} = 2 Fe - \frac{1}{3} R_3 b d$$

$$(30) \quad R_{11} = 1 + \frac{1}{3} b d R_1$$

4. Gültigkeitsbereiche

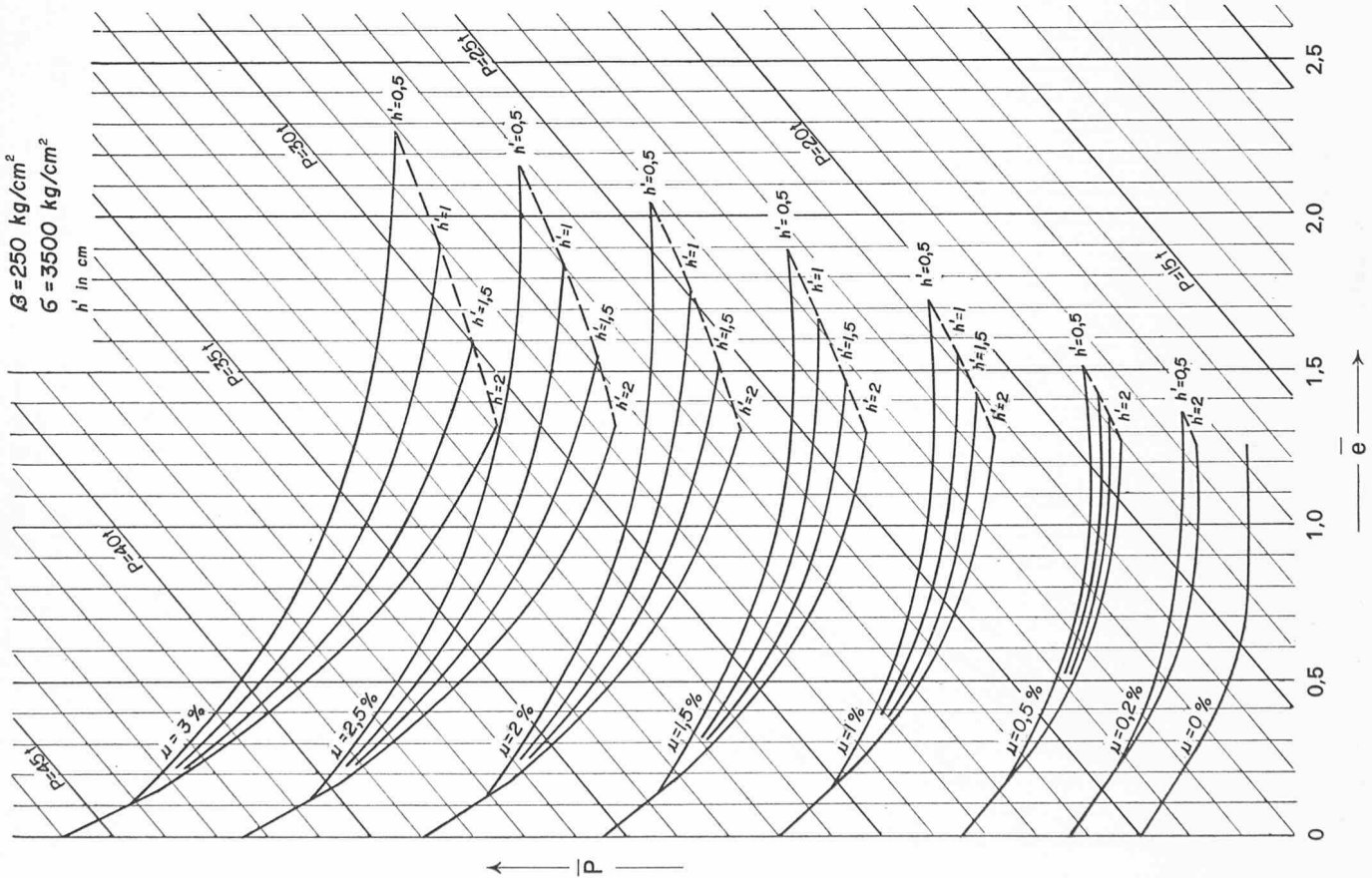
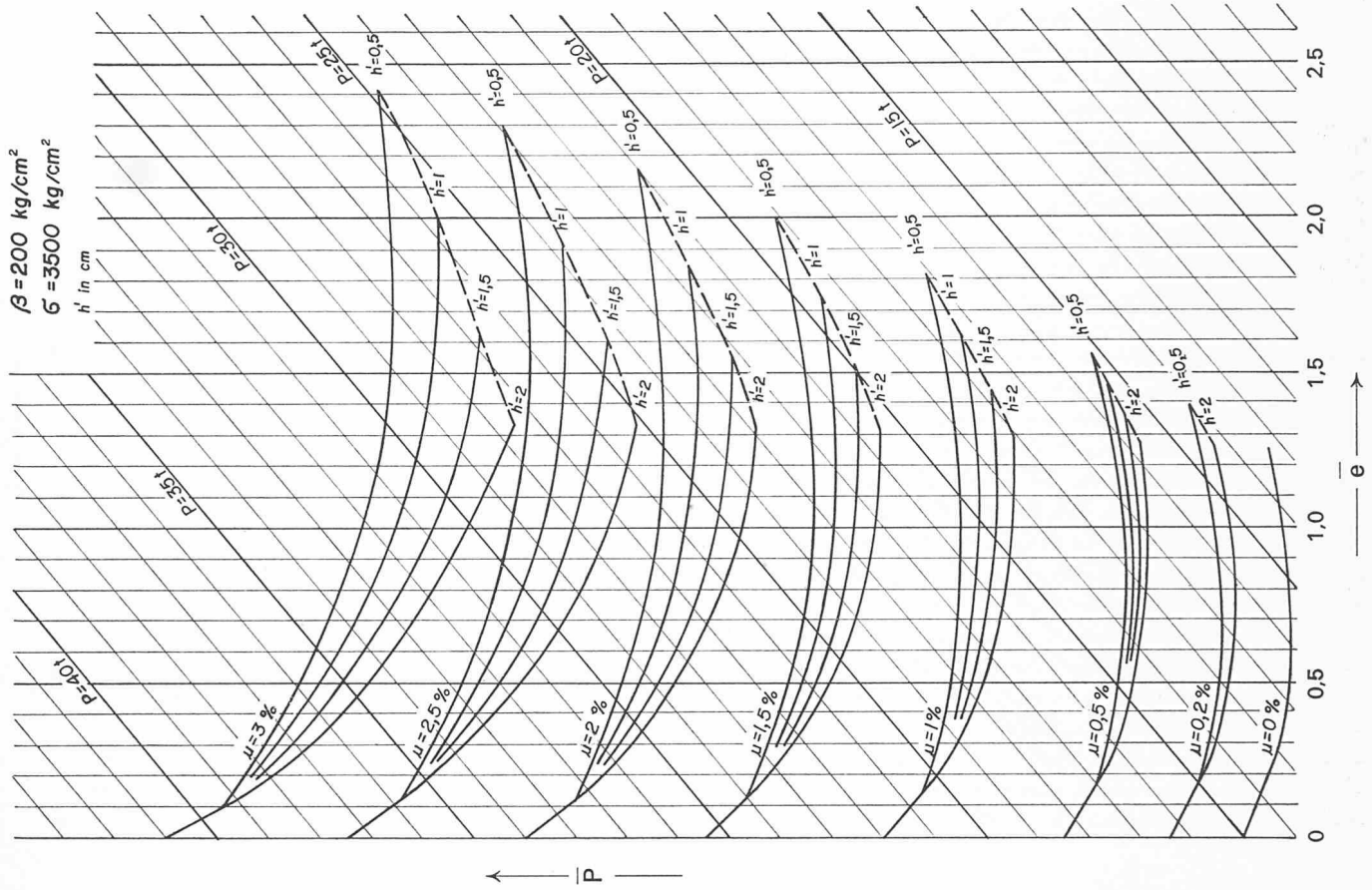
4.1 Minimale Exzentrizität

Diese Grenze ist durch den Fall des zentrischen Druckes gegeben:

$$(31) \quad e = 0$$

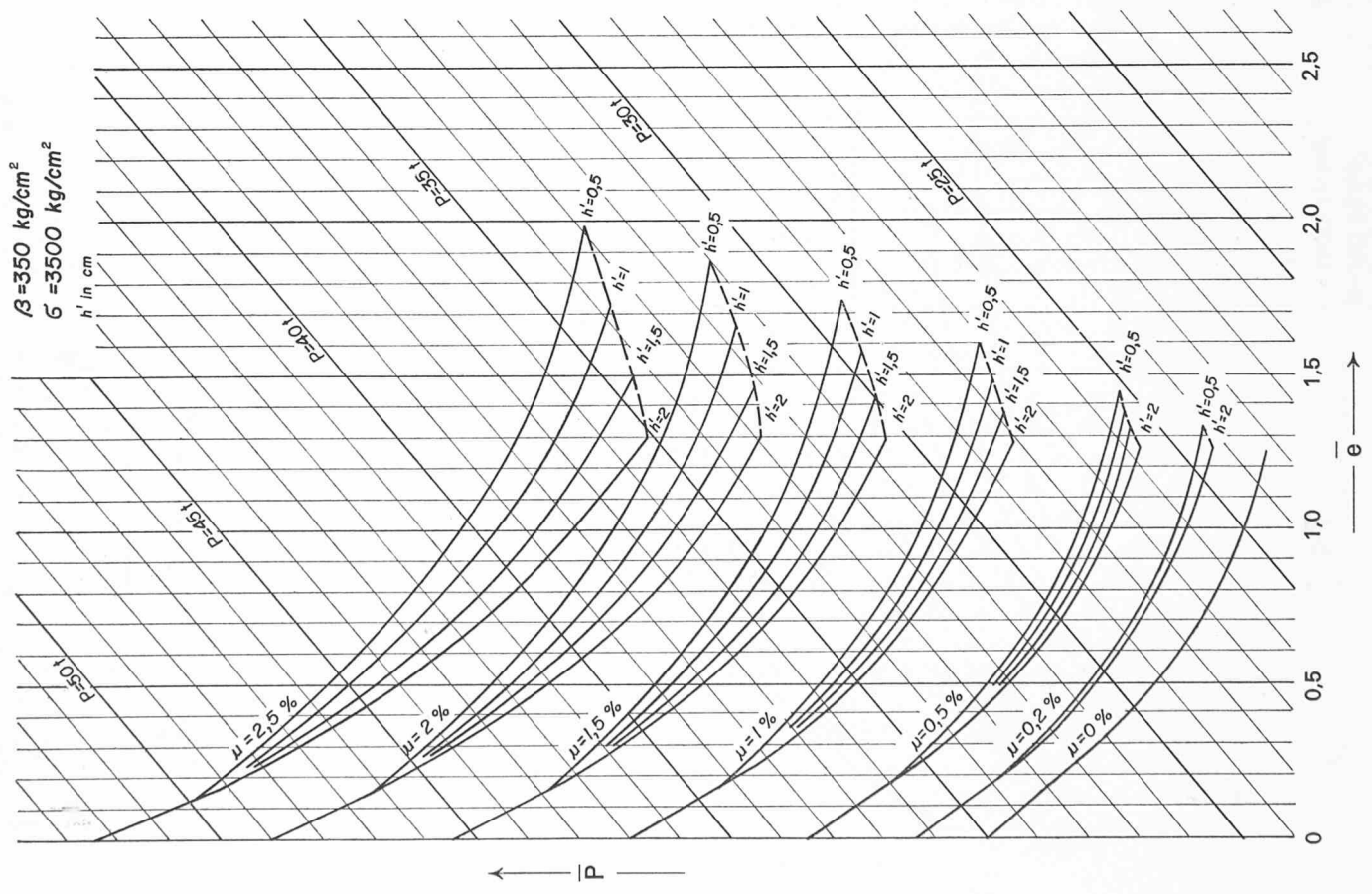
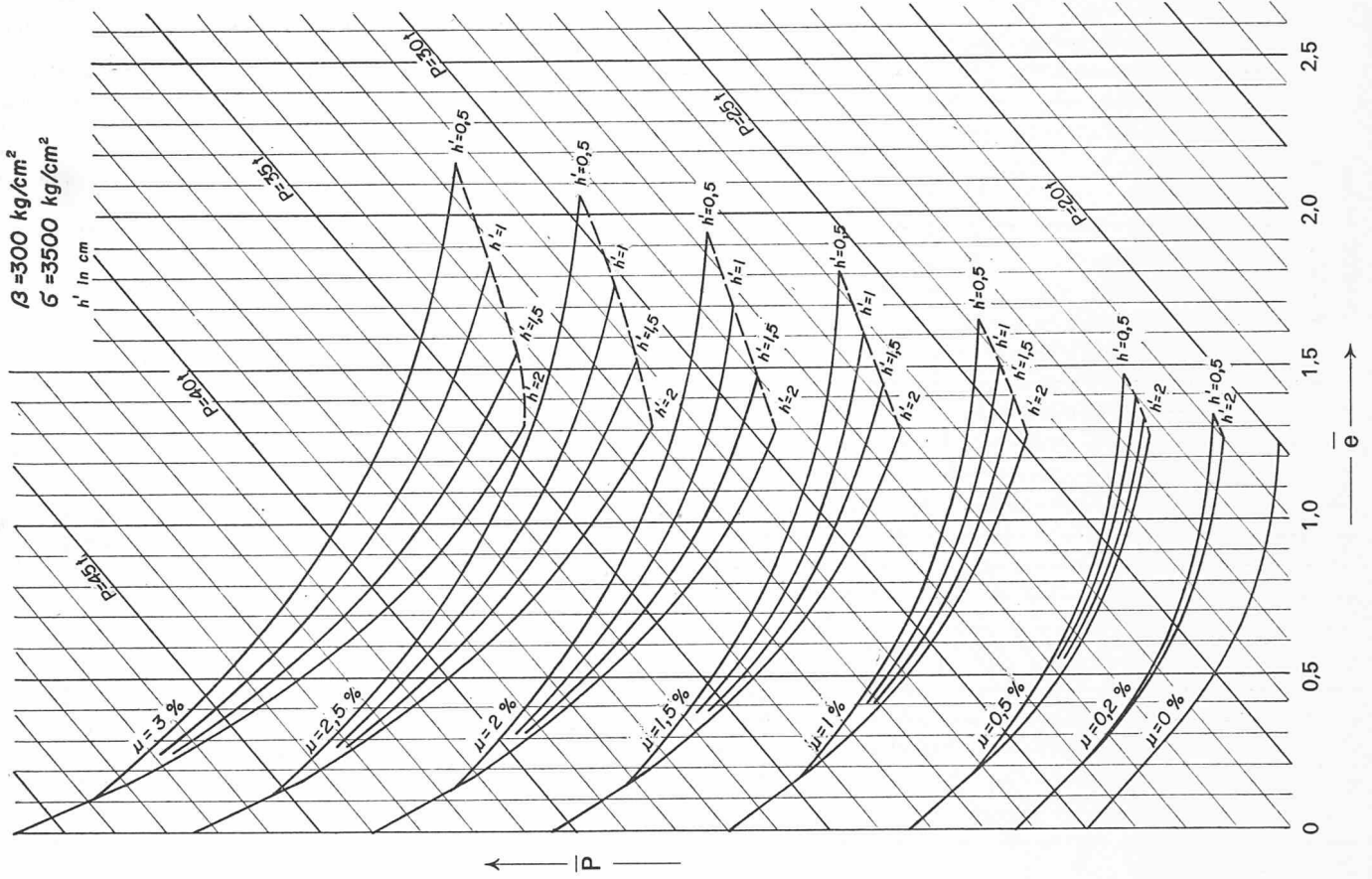
Eine negative Exzentrizität würde spiegelbildlich wieder auf dasselbe Problem führen.

Traglast von Stahlbetonquerschnitten bei kleiner Exzentrizität der Druckkraft



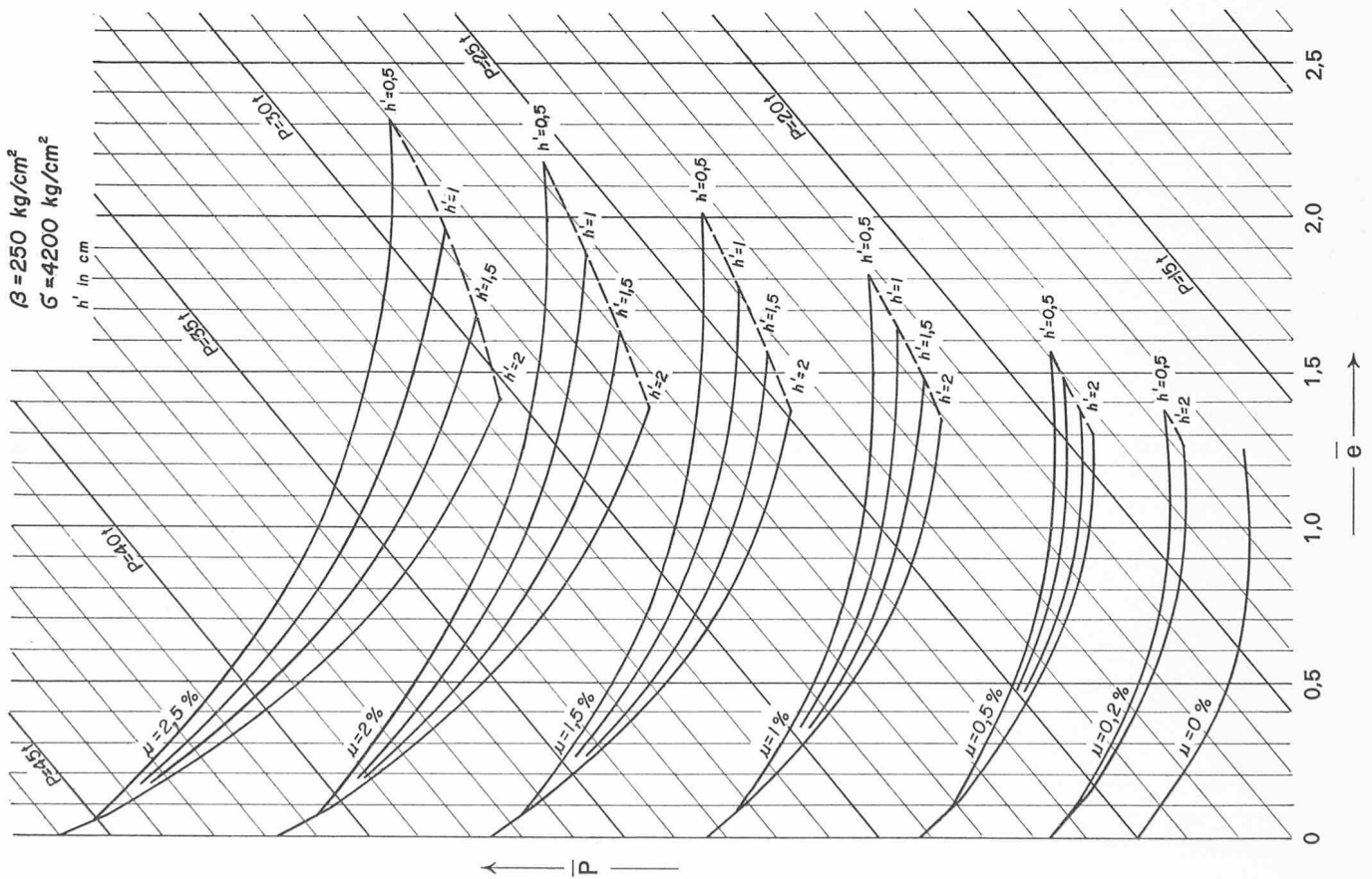
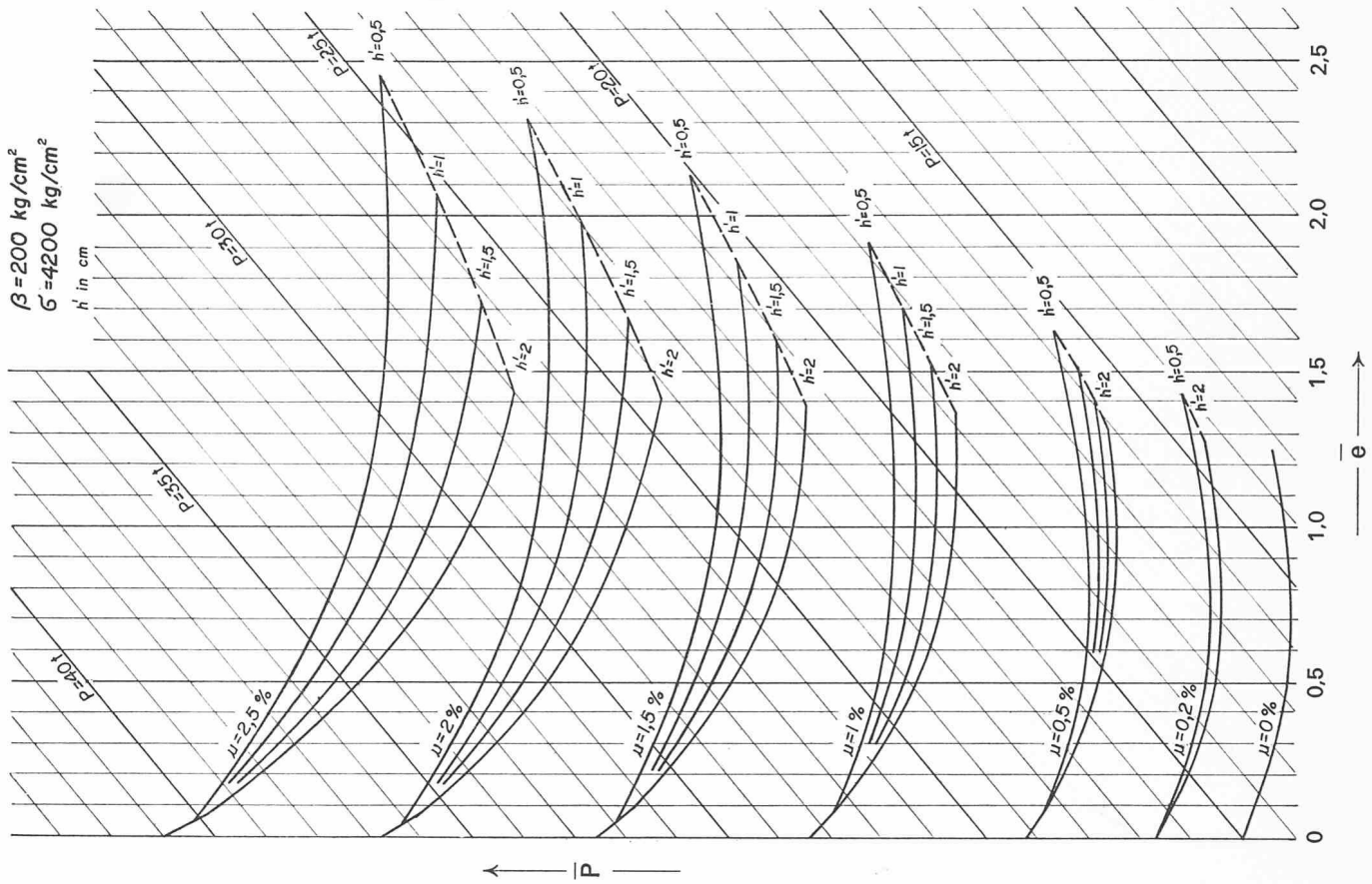
Alle im Diagramm erscheinenden Grössen beziehen sich auf den normierten Querschnitt mit $\bar{b} = \bar{d} = 10 \text{ cm}$

Traglast von Stahlbetonquerschnitten bei kleiner Exzentrizität der Druckkraft



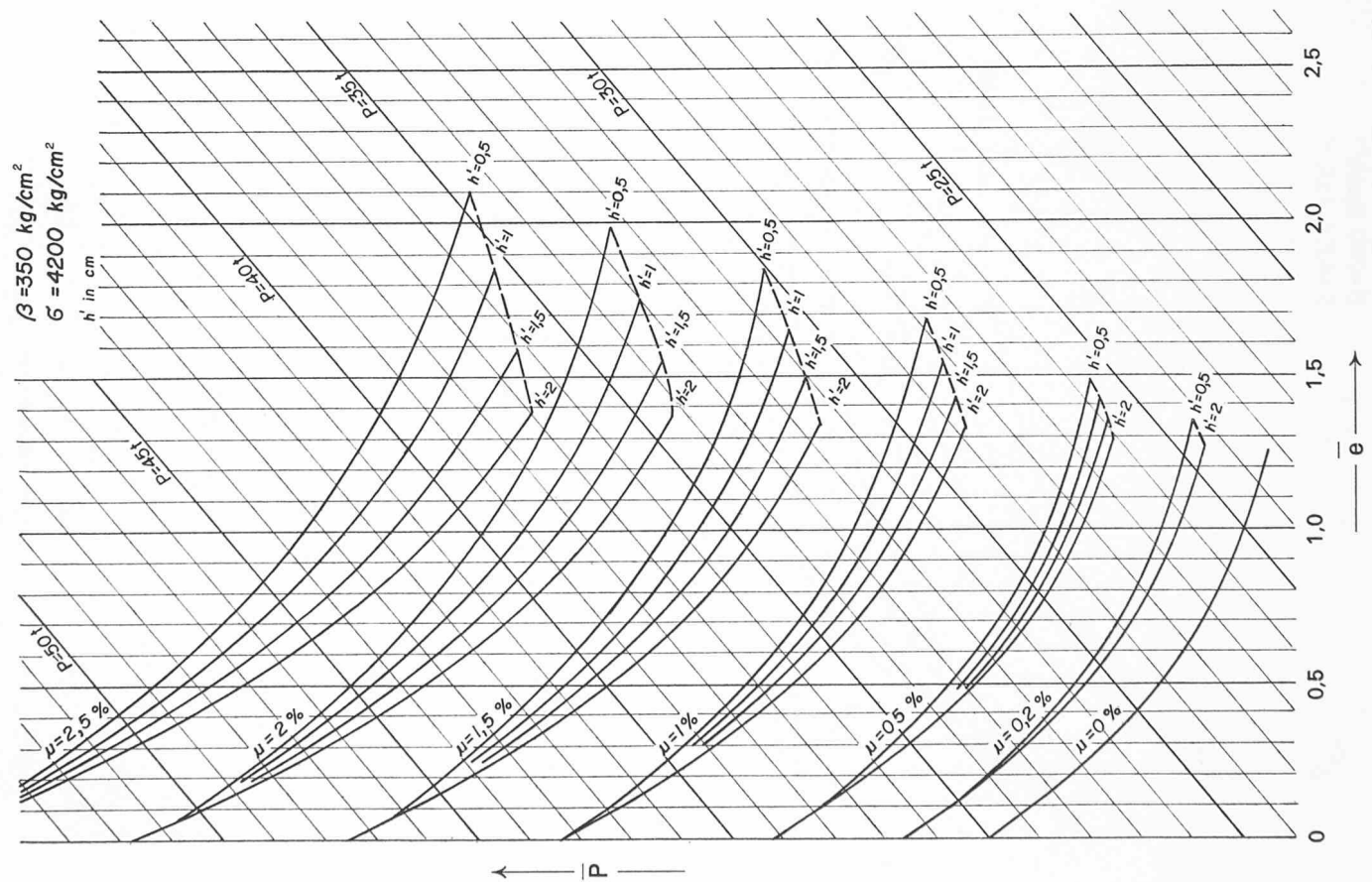
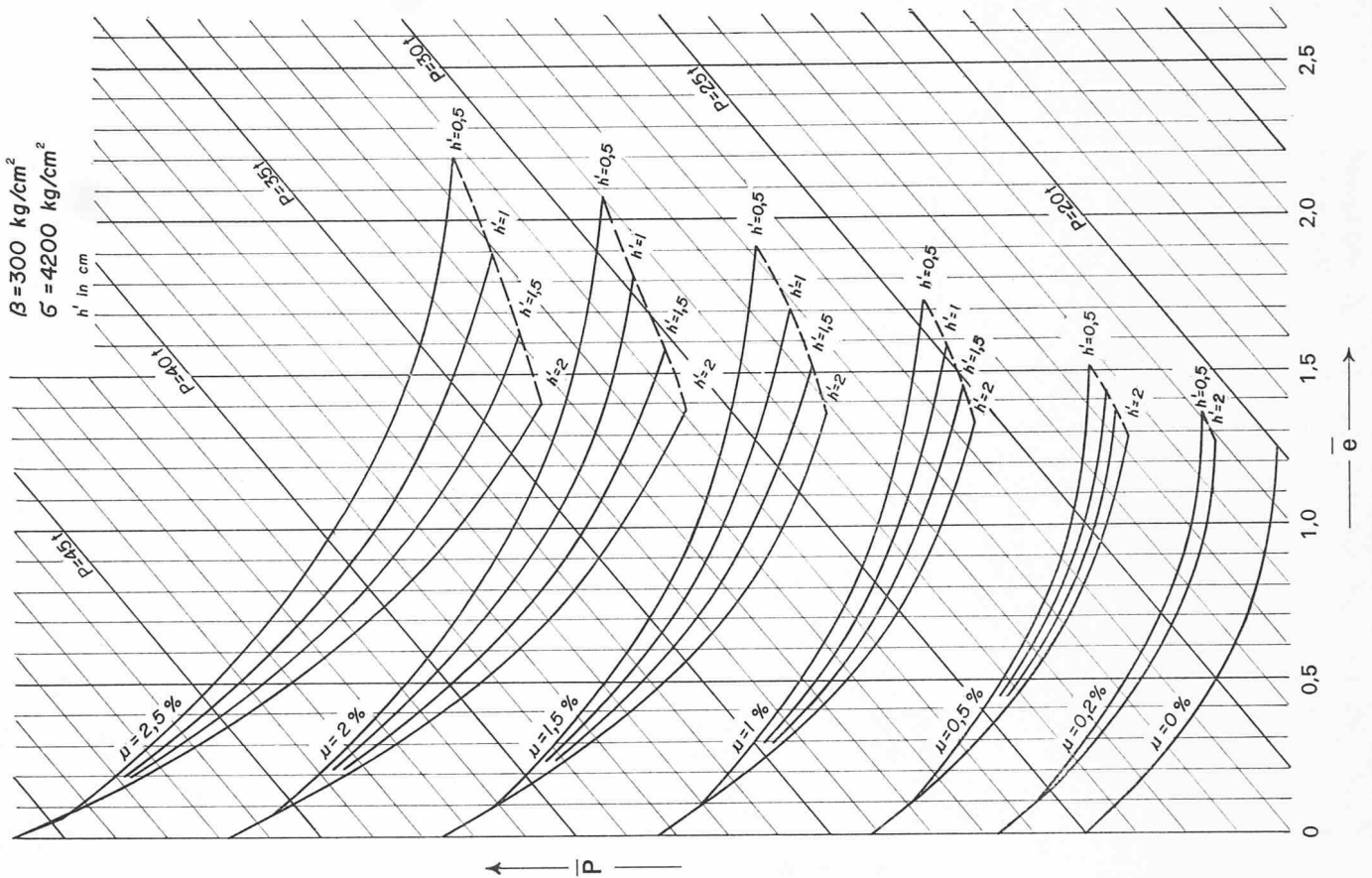
Alle im Diagramm erscheinenden Grössen beziehen sich auf den normierten Querschnitt mit $\bar{b} = \bar{d} = 10 \text{ cm}$

Traglast von Stahlbetonquerschnitten bei kleiner Exzentrizität der Druckkraft



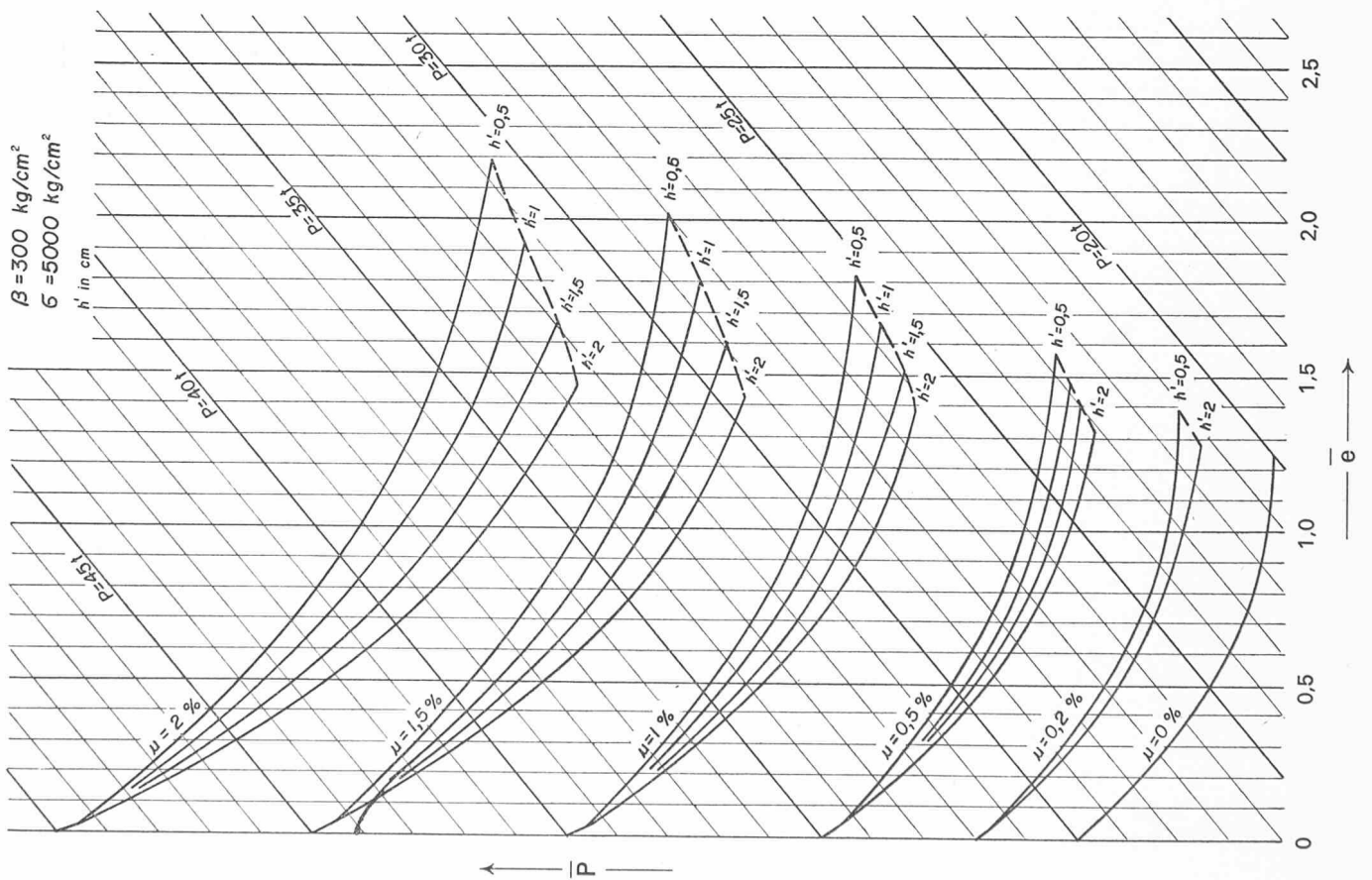
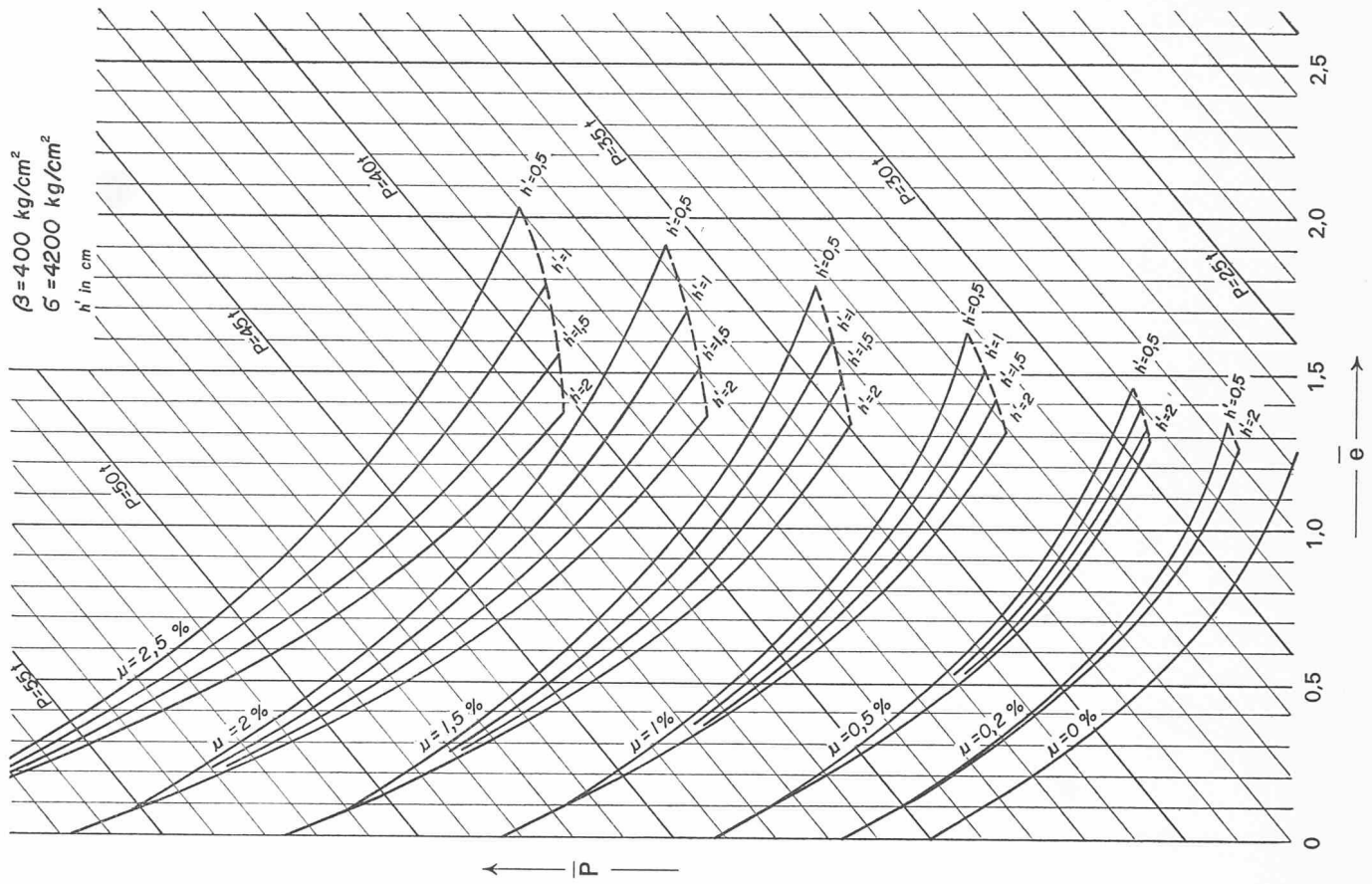
Alle im Diagramm erscheinenden Größen beziehen sich auf den normierten Querschnitt mit $\bar{b} = \bar{d} = 10 \text{ cm}$

Traglast von Stahlbetonquerschnitten bei kleiner Exzentrizität der Druckkraft



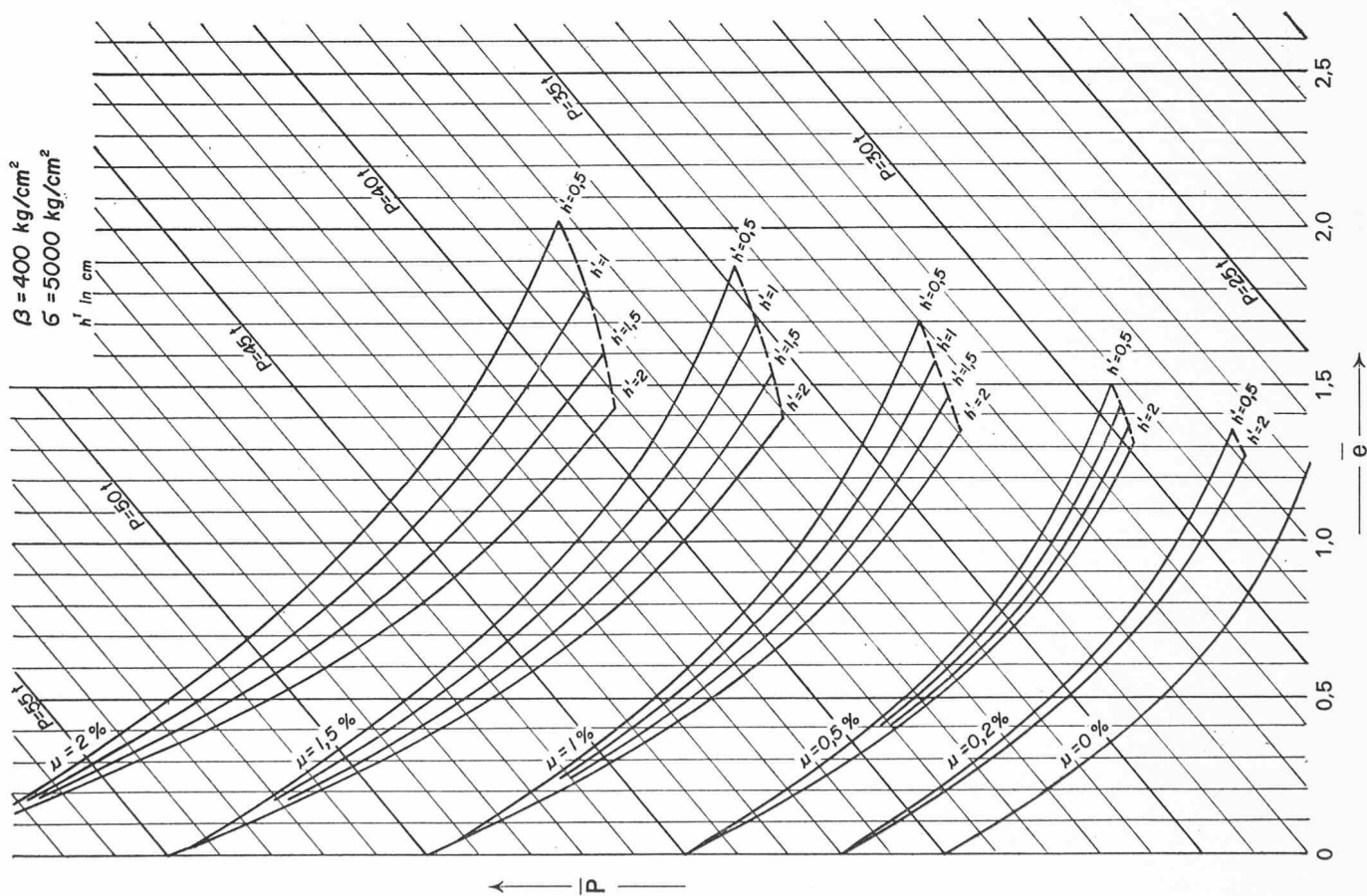
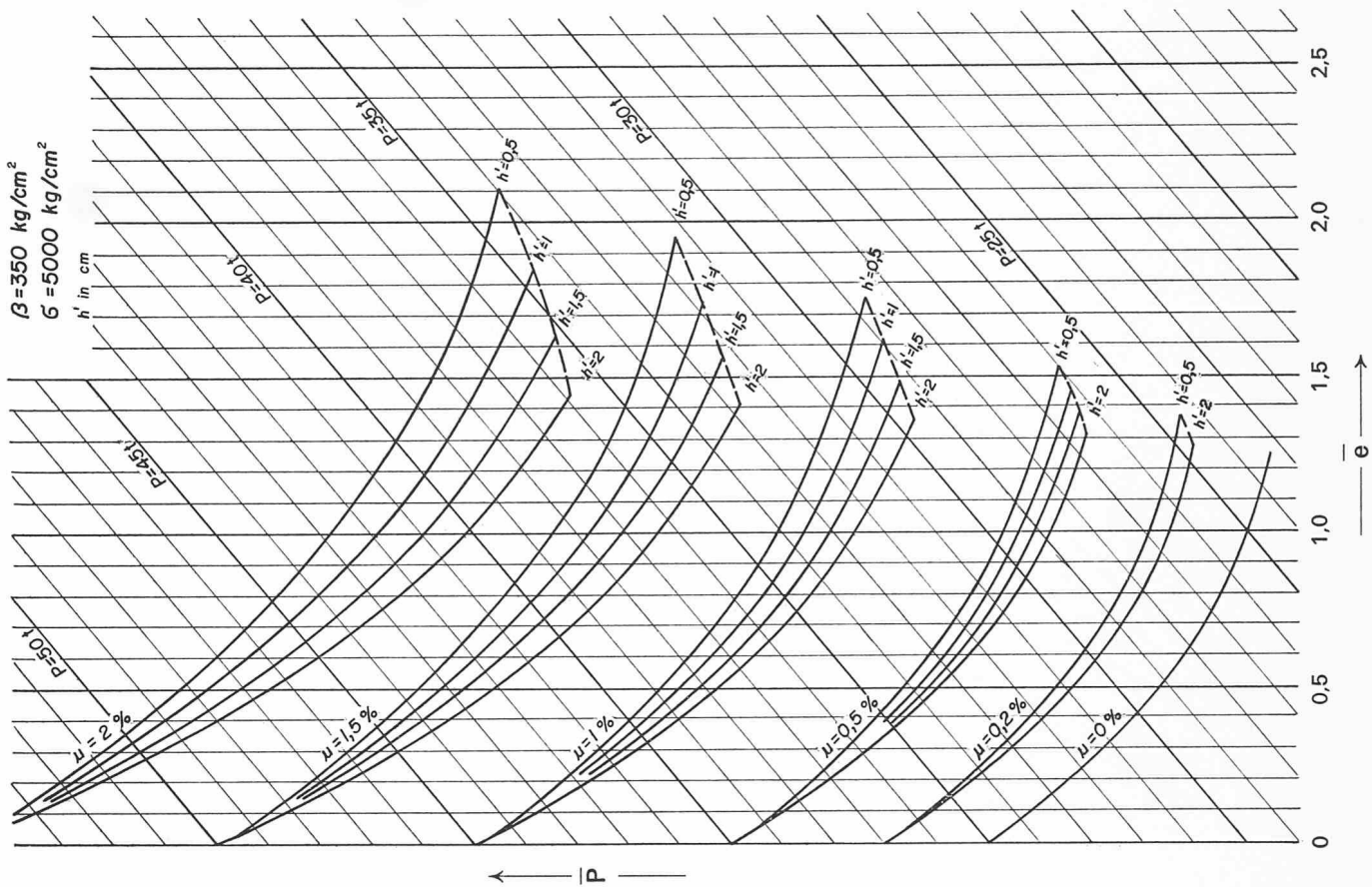
Alle im Diagramm erscheinenden Grössen beziehen sich auf den normierten Querschnitt mit $\bar{b} = \bar{d} = 10 \text{ cm}$

Traglast von Stahlbetonquerschnitten bei kleiner Exzentrizität der Druckkraft



Alle im Diagramm erscheinenden Grössen beziehen sich auf den normierten Querschnitt mit $\bar{b} = \bar{d} = 10 \text{ cm}$

Traglast von Stahlbetonquerschnitten bei kleiner Exzentrizität der Druckkraft



Alle im Diagramm erscheinenden Grössen beziehen sich auf den normierten Querschnitt mit $\bar{b} = \bar{d} = 10 \text{ cm}$

4.2 Maximale Exzentrizität

Liegt die neutrale Axe gerade auf dem Querschnittsrand, so ist damit der Grenzfall zwischen «grosser» und «kleiner» Exzentrizität bestimmt. Weil in den Diagrammen nur der Fall der kleinen Exzentrizität behandelt wird, bedeutet dieser Spezialfall gleichzeitig die obere Grenze des Gültigkeitsbereiches der abgeleiteten Formeln. Da die Lage der neutralen Axe hauptsächlich durch die Exzentrizität bestimmt wird, soll für diesen Parameter auch das Grenzkriterium dargestellt werden.

Die Randspannung beträgt im Grenzfall gerade:

$$(32) \quad \sigma_b = 0$$

und

$$(33) \quad \sigma'' = \beta$$

Die Stahlspannung rechnet sich aus einer Dehnungsbetrachtung zu:

$$(34) \quad \sigma_e = \frac{h'}{d} \varepsilon_r E_e$$

Die Gleichgewichtsbedingung bezüglich der Querschnittsaxe lautet (Gleichung 34 eingesetzt):

$$(35) \quad P e = \frac{1}{12} \beta b d^2 + \left(\frac{d}{2} - h' \right) \left(\sigma_F F e' - F e \frac{h'}{d} \varepsilon_r E_e \right)$$

Dividiert man durch Gleichung (10), so ergibt sich daraus die maximale Exzentrizität:

$$(36) \quad e_{Gr} = \frac{d \beta + 6 \mu (d - 2 h') \left(\sigma_F - \frac{h'}{d} \varepsilon_r E_e \right)}{8 \beta + 12 \mu \left(\sigma_F + \frac{h'}{d} \varepsilon_r E_e \right)}$$

4.3 Fliessbedingung für die Druckarmierung $F e'$

Die Dehnung der Armierung $F e'$ beträgt wenigstens (für den Fall, dass die neutrale Axe auf dem gegenüberliegenden Querschnittsrand liegt):

$$(37) \quad \varepsilon'_{e \min} = \varepsilon_r \frac{d - h'}{d}$$

Die Fliessbedingung ist:

$$(38) \quad \varepsilon'_e \geq \varepsilon_F$$

oder:

$$(39) \quad \sigma_F \leq \varepsilon_r E_e \frac{d - h'}{d}$$

Sie ist für alle Kombinationen von Daten in der Tabelle (Tafeln 48-53) erfüllt, was sich leicht nachprüfen lässt.

4.4 Fliessbedingung für die Armierung $F e$

Dieses Kriterium entscheidet über die Gültigkeit der Formeln, die für Fall A und Fall B verschieden hergeleitet wurden. Der Grenzfall entsteht dann, wenn die Armierung $F e$ gerade fliesst, wenn also die Dehnung ε_e der Fließdehnung ε_F entspricht. Man erhält daraus die Bedingung:

$$(40) \quad \varepsilon_e = \varepsilon_F = \frac{\sigma_F}{E_e}$$

Nach Gleichung (2) wird:

$$(41) \quad \sigma_e = 2 \beta \left(\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_r} \right) - \beta \left(\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_r} \right)^2$$

und aus dem Verlauf der Betonspannungen:

$$(42) \quad \sigma'' = \left(\frac{d}{h} \right)^2 \left[\beta - 2 \beta \left(\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_r} \right) + \beta \left(\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_r} \right)^2 \right]$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$(43) \quad P = \beta b d + 2 \sigma_F F e - \frac{1}{3} \sigma'' b d$$

und

$$(44) \quad P e = \frac{1}{3} \frac{1}{4} \sigma'' b d^2$$

bezogen auf die Symmetrieaxe des Querschnittes. Dividiert man (44) durch (43), so erhält man mit:

$$(45) \quad e_{AB} = \frac{\frac{1}{12} \sigma'' d^2}{\beta b d + 2 \sigma_F F e - \frac{1}{3} \sigma'' b d}$$

die kritische Exzentrizität, die der Grenze zwischen Fall A und Fall B entspricht.

5. Rechenbeispiele

(Alle mit $\bar{\quad}$ gezeichneten Grössen beziehen sich auf den normierten Querschnitt $\bar{b} = \bar{d} = 10$ cm.)

5.1

Gesucht sei die Traglast eines symmetrisch armierten Stahlbetonquerschnittes mit den folgenden Daten:

$$\begin{aligned} b &= 20 \text{ cm} & F e &= 12 \text{ cm}^2 = F e' \\ d &= 30 \text{ cm} & \mu &= 2,0\% = \mu' \\ h' &= 3 \text{ cm} & \sigma_F &= 3500 \text{ kg/cm}^2 \\ e &= 3 \text{ cm} & \beta &= 300 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Reduktion der geometrischen Masse auf den normierten Querschnitt:

$$\bar{d} = 10 \text{ cm} \quad \frac{d}{\bar{d}} = 3$$

$$\bar{b} = 10 \text{ cm} \quad \frac{b}{\bar{b}} = 2$$

$$\bar{h}' = h' \frac{\bar{d}}{d} = 1 \text{ cm}$$

$$\bar{e} = e \frac{\bar{d}}{d} = 1 \text{ cm}$$

Aus der entsprechenden Tabelle (für $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2, \sigma = 3500 \text{ kg/cm}^2$) folgt für die Traglast:

$$\bar{P} = 33,0 \text{ t (für den normierten Querschnitt)}$$

Durch zweimalige affine Transformation mit den Reduktionsverhältnissen findet man die Traglast des tatsächlichen Querschnitts:

$$P = \bar{P} \frac{d}{\bar{d}} \frac{b}{\bar{b}} = 198,0 \text{ t}$$

5.2

Für die Normalkraft $P = 400 \text{ t}$ mit der Exzentrizität $e = 5 \text{ cm}$ ist ein Querschnitt gesucht, für den P gerade die Bruchlast darstellt. Gegeben sind:

$$\frac{h'}{d} = 0,1 \quad \sigma_F = 3500 \text{ kg/cm}^2$$

$$b = 30 \text{ cm} \quad \beta = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mu = \mu' = 1,5\%$$

Eine kurze Übersichtsrechnung ergibt:

$$d \approx \frac{P}{b \beta 0,9} \approx 60 \text{ cm}$$

Man erhält:

$$\bar{e} = e \frac{d}{\bar{d}} = 0,83 \text{ cm}$$

und findet in der Tabelle (für $\beta = 250 \text{ kg/cm}^2$ und $\sigma = 3500 \text{ kg/cm}^2$):

$$\bar{P} = 27,7 \text{ t}$$

Erweitern auf den tatsächlichen Querschnitt ergibt:

$$P = 500 \text{ t}$$

Die Querschnittshöhe d ist also zu gross. Verkleinert man auf $d = 50 \text{ cm}$, so erhält man $\bar{e} = 1,0 \text{ cm}$, $\bar{P} = 26,6 \text{ t}$ und die Traglast des wirklichen Querschnitts:

$$P = 400 \text{ t}$$

Literatur:

W. H. Gardner Jr. and Donald H. Kline: Charts for Design of Reinforced Concrete Columns. Proc. of ASCE Journ. of Struct. Div. ST5, May 1960

Adresse des Verfassers: F. Knoll, dipl. Bauing., Obere Berneckstrasse 83, 9000 St. Gallen.