

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 82 (1964)  
**Heft:** 44

**Artikel:** Zur Regelung hydraulischer Turbomaschinen auf einen vorgegebenen Betriebszustand  
**Autor:** Hinze, D.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-67602>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Regelung hydraulischer Turbomaschinen auf einen vorgegebenen Betriebszustand

Von Dipl.-Ing. **D. Hinze**, Escher Wyss Aktiengesellschaft, Zürich

DK 621.24:621.531.9

Zur Beurteilung der Regelung hydraulischer Turbomaschinen auf einen gegebenen Betriebszustand werden die Eigenschwingungen des Regelkreises als Vergleichsbasis wählbarer Reglereinstellungen benutzt. Es wird ein Verfahren angegeben zur numerischen Auswertung der entwickelten Formen.

## 1. Der Regelkreis

Eine hydraulische Turbomaschine sei mit einer elektrischen Maschine starr zu einem Maschinensatz verkuppelt. Ein Maschinensatz, der nach Bild 1 durch eine horizontale Druckleitung zwischen einem Oberwasser- und einem Unterwasserbecken unter Belastung durch ein elektrisches Netz arbeitet, werde als Regelstrecke betrachtet. Der Betriebszustand der hydraulischen Turbomaschine hänge von der Stellung  $y$  eines Servomotors ab;  $y$  sei Eingangsgrösse der Regelstrecke. Ausgangsgrösse sei die Drehzahl  $n$  der Welle des Maschinensatzes. Druckschwankungen in der Druckleitung werden als Störung der Regelstrecke vorausgesetzt. Ein Regler mit der Maschinendrehzahl  $n$  als Eingangsgrösse und der Servomotorstellung  $y$  als Ausgangsgrösse ergänze nach Bild 2 die Regelstrecke zum Regelkreis.

Im folgenden kennzeichnen der Index 0 und das Klammersymbol  $[\ ]_0$  Werte eines vorgegebenen stationären Betriebszustandes, des sogenannten ausgeregelten Zustandes. Gesucht werden die Eigenschwingungen des Regelkreises im ausgeregelten Zustand.

### 1.1. Die Regelstrecke

Nach Bild 1 werde eine Lauflänge  $s$  der Druckleitung von ihrem Anfang beim Oberwasserbecken zum Maschinensatz hin gemessen. Die Lauflänge der Strömung von der Druckseite der hydraulischen Turbomaschine bis zur Mündung der Saugleitung ins Unterwasserbecken wird gegenüber der Länge  $L$  der Druckleitung vernachlässigt. Bezeichnet  $t$  die Zeit, dann wird die Geschwindigkeit der Druckleitungsströmung – und damit eine positive Durchflussrichtung an der Turbomaschine – durch

$$v = \frac{ds}{dt}$$

bestimmt.

$p$  sei der hydrostatische Druck,  $\rho$  die Dichte des Fluidums, das mit

$$p = p(\rho)$$

elastisch vorausgesetzt wird. Die Schallgeschwindigkeit  $a$  im Fluidum sei gegeben durch

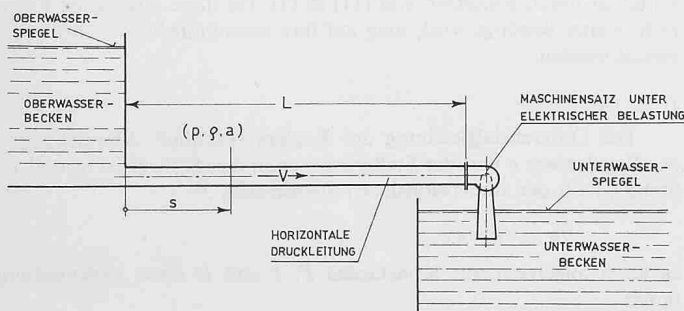
$$a^2 \equiv \frac{dp}{d\rho}$$

so dass eine Linearisierung

$$a = \text{const.} \gg 1 \quad ; \quad p - p^* = a^2(\rho - \rho^*)$$

möglich wird mit einer Integrationskonstanten ( $p^*$ ;  $\rho^*$ ). Berücksichtigt man wieder die vorausgesetzte Grössenordnung von  $a$ , so folgt als weitere Vereinfachung

$$\rho = \rho^* = \text{const.}$$



Daher kann von den Drücken  $p$  übergegangen werden zu den Druckhöhen  $H$  nach

$$p \equiv \rho g H \quad ; \quad dH = dp/\rho g,$$

worin  $g$  für die Schwerebeschleunigung steht.

Eine charakteristische Zeit  $t^*$  des Regelkreises werde als Laufzeit einer Schallwelle in der Druckleitung gewählt,

$$t^* \equiv L/a,$$

so dass eine dimensionslose Zeit

$$\tau \equiv t/t^*$$

definiert ist. Machzahlen

$$M \equiv v/a$$

und Reibungskräfte der Leitungsströmung werden vernachlässigbar klein vorausgesetzt.

$H_0$  und  $v_0$  seien Druckhöhe und Strömungsgeschwindigkeit in der Druckleitung beim ausgeregelten Betriebszustand, so dass gilt

$$\left[ \frac{H}{H_0} \right]_0(s) = 1 \quad ; \quad \left[ \frac{v}{v_0} \right]_0(s) = 1.$$

$\Delta H$  bezeichne die Druckhöhendifferenz an der hydraulischen Turbomaschine,  $\Delta H_0$  den entsprechenden stationären Wert.  $Q$  stehe für den Volumenstrom durch die Turbomaschine,  $Q_0$  für den stationären Volumenstrom. Die freien Spiegel der beiden Wasserbecken seien unbeschränkt ausgedehnt. Damit folgen die Randbedingungen der Druckleitung:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{H}{H_0} \right] (s=0) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{H}{H_0} \right] (s=0) = 0 \\ \left[ \frac{H}{H_0} \right] (s=L) = \frac{\Delta H}{\Delta H_0} \quad ; \quad \left[ \frac{v}{v_0} \right] (s=L) = \frac{Q}{Q_0} \end{array} \right.$$

$M_T$  sei das hydraulische Moment der Turbomaschine an der Welle des Maschinensatzes;  $M_G$  bezeichne das der elektrischen Maschine vom Netz aufgeprägte Moment an der Maschinenwelle. Im ausgeregelten Zustand gilt

$$[M_T]_0 = [M_G]_0 = M_0.$$

Mit der Drehzahl  $n_0$  des ausgeregelten Zustandes wird eine Charakteristik der elektrischen Maschine

$$(2) \quad \frac{M_G}{M_0} = \left( \frac{n_0}{n} \right)^K$$

vorausgesetzt mit einer von der Art der Netzbelastung und der Spannungsregelung abhängigen Konstanten  $K$ .

Zur Darstellung der Charakteristik einer hydraulischen Turbomaschine werden von den im Strömungsmaschinenbau üblichen Kennzahlen  $[1]^*$  die folgenden gewählt:

\*) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluss des Aufsatzes.

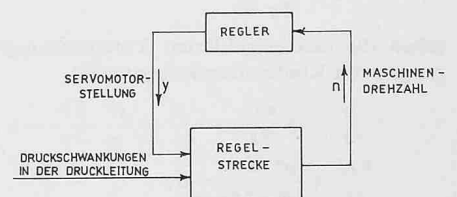


Bild 1 (links)  
Die Regelstrecke

Bild 2 Der Regelkreis

$$(3) \left\{ \begin{array}{ll} \varphi \equiv \frac{Q}{uF} & \text{Durchsatzzahl} \\ \psi \equiv \frac{g \Delta H}{u^2/2} & \text{Druckzahl} \\ \lambda \equiv \frac{M_T n \pi / 30}{\rho Q u^2 / 2} & \text{Leistungszahl} \end{array} \right.$$

Darin ist  $F$  ein geeignet gewählter Kontrollquerschnitt der Strömung in der Maschine; weiter stehe

$$u \equiv n \cdot \text{const.}$$

für eine wohldefinierte Umfangsgeschwindigkeit.

Sei  $y_0$  der Sollwert der Stellgröße  $y$ , so dass eine dimensionslose Stellgröße

$$\eta \equiv y/y_0$$

definiert ist. Dann kann als Charakteristik einer hydraulischen Turbomaschine

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi(\varphi, \eta) \\ \lambda = \lambda(\varphi, \eta) \end{array} \right.$$

angenommen werden. Ihr ausgeregelter Zustand ist gegeben durch

$$(n_0; y_0; \varphi_0) \quad ; \quad \psi_0 = \psi(\varphi_0, 1) \quad ; \quad \lambda_0 = \lambda(\varphi_0, 1).$$

Für das hydraulische Moment folgt nun

$$(5) \frac{M_T}{M_0} = \frac{n}{n_0} \frac{Q}{Q_0} \frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \frac{\varphi}{\varphi_0} \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

### 1.1.1. Der Maschinensatz

Für das Gleichgewicht der Momente an der Maschinenwelle liefert der Drallsatz

$$(6) M_T - M_G = \frac{GD^2}{4g} \frac{\pi}{30} \frac{dn}{dt}$$

Dabei steht  $GD^2$  für das Schwungmoment der rotierenden Massen des Maschinensatzes.

$t_A$  sei die Zeit, in welcher der Maschinensatz unter der Wirkung des Momentes  $M_0$  von der Drehzahl  $n = 0$  auf diejenige  $n = n_0$  des ausgeregelten Zustandes beschleunigt wird; es ist

$$t_A = \frac{1}{M_0} \frac{GD^2}{4g} \frac{\pi n_0}{30}$$

Mit der sogenannten Anlaufzeit  $t_A$  der Schwungmassen geht Gl. (6) über in

$$\frac{M_T}{M_0} - \frac{M_G}{M_0} = \frac{t_A}{t^*} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{n}{n_0}\right)$$

Die Ableitung dieser Beziehung nach  $\tau$  führt unter Berücksichtigung von (2), (3), (4) und (5) auf

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{t_A}{t^*} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{n}{n_0}\right) + \\ + \left[ K \left(\frac{n}{n_0}\right)^{K-1} - 2 \frac{n}{n_0} \frac{\varphi}{\varphi_0} \frac{\lambda}{\lambda_0} \right] \frac{d}{d\tau} \left(\frac{n}{n_0}\right) - \\ - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \left[ \frac{\lambda}{\lambda_0} + \frac{\varphi}{\varphi_0} \frac{\partial(\lambda/\lambda_0)}{\partial(\varphi/\varphi_0)} \right] \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) - \\ - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \frac{\varphi}{\varphi_0} \frac{\partial(\lambda/\lambda_0)}{\partial\eta} \frac{d\eta}{d\tau} = 0 \end{array} \right.$$

### 1.1.2. Die Druckleitung

Mit den dimensionslosen Variablen

$$(8) \Sigma \equiv \frac{s}{L} \quad ; \quad \Pi \equiv \frac{H}{H_0} \quad ; \quad \Upsilon \equiv \frac{v}{v_0}$$

und mit einer Konstanten der Druckleitung

$$\varepsilon \equiv \frac{v_0 a}{2gH_0}$$

gehen die den eingeführten Voraussetzungen folgenden Formulierungen von Kontinuitätsbedingung [2],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial s} = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial s} = 0,$$

und Impulssatz [2],

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} + g \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} - g \frac{v}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial s} = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

über in

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \Pi\tau + 2\varepsilon \Upsilon\Sigma = 0 \\ \Pi\Sigma + 2\varepsilon \Upsilon\tau = 0 \end{array} \right.$$

worin Indizierung für die partielle Ableitung nach dem Index steht. Ein Störungsansatz [3]

$$\begin{array}{l} \Pi = 1 + A e^{\alpha\Sigma} e^{\beta\tau} \\ \Upsilon = 1 + B e^{\alpha\Sigma} e^{\beta\tau} \end{array}$$

mit der Basis  $e$  natürlicher Logarithmen und mit Konstanten  $A, B, \alpha, \beta$  liefert in Gl. (9) nichttriviale Lösungen für  $A$  und  $B$ , wenn

$$\alpha = \pm \beta$$

erfüllt ist. Mit neuen Konstanten  $A_1, B_1, A_2, B_2$  vereinfacht sich daher der Störungsansatz zu

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi - 1 = e^{\beta\tau} (A_1 e^{\beta\Sigma} + A_2 e^{-\beta\Sigma}) \\ \Upsilon - 1 = e^{\beta\tau} (B_1 e^{\beta\Sigma} + B_2 e^{-\beta\Sigma}) \end{array} \right.$$

Mit (3) und (8) lauten die Bedingungen (1)

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \Pi(\tau, \Sigma = 0) = 1 \quad ; \quad \Pi_\tau(\tau, \Sigma = 0) = 0 \\ \Pi(\tau, \Sigma = 1) = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \frac{\varphi}{\varphi_0} \quad ; \quad \Upsilon(\tau, \Sigma = 1) = \frac{n}{n_0} \frac{\varphi}{\varphi_0} \end{array} \right.$$

Die erste dieser Bedingungen liefert im Störungsansatz

$$A_2 = -A_1.$$

Berücksichtigt man, dass wegen Gl. (9) aus

$$\Pi_\tau(\tau, \Sigma = 0) = 0$$

auch

$$\Upsilon_\Sigma(\tau, \Sigma = 0) = 0$$

folgt, so führt die zweite Bedingung auf

$$B_2 = B_1.$$

Daher ergibt der Störungsansatz mit den beiden ersten Randbedingungen in Gl. (9) schliesslich

$$A_1 + 2\varepsilon B_1 = 0 \quad ; \quad A_1/B_1 = -2\varepsilon.$$

Für die Störung selbst bedeutet dies

$$\frac{\Pi - 1}{\Upsilon - 1} = -2\varepsilon \operatorname{th}(\beta\Sigma).$$

Die beiden letzten der Bedingungen (10) ergeben in dieser Beziehung

$$\frac{n}{n_0} \frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 - \frac{(n/n_0)^2 \varphi/\varphi_0 - 1}{2\varepsilon \operatorname{th}(\beta)}$$

Unter Berücksichtigung von (4) erhält man als Ableitung dieser Beziehung nach  $\tau$

$$(11) \quad -\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) = \frac{\left[ \frac{\varphi_0}{\varphi} \varepsilon \operatorname{th}(\beta) + \frac{n}{n_0} \frac{\varphi}{\varphi_0} \right] \frac{d}{d\tau} \left(\frac{n}{n_0}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \frac{\partial(\varphi/\varphi_0)}{\partial\eta} \frac{d\eta}{d\tau}}{\frac{n}{n_0} \varepsilon \operatorname{th}(\beta) + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \frac{\varphi}{\varphi_0}}}$$

Die Differentialgleichung der Regelstrecke ergäbe sich nun unmittelbar durch Einsetzen von (11) in (7). Da diese allgemeine Form nicht weiter benötigt wird, mag auf ihre umständliche Anschrift verzichtet werden.

## 1. 2. Der Regler

Die Differentialgleichung des Reglers verknüpft Abweichungen der Regelgröße  $n$  und der Stellgröße  $y$  von den Sollwerten  $n_0$  und  $y_0$ . Stehe  $\eta_H$  für den dimensionslosen Stellbereich,

$$\eta_H \equiv y_H/y_0,$$

so kann allgemein mit Konstanten  $P, I$  und  $D$  diese Verknüpfung durch

$$(12) \quad -\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\eta - 1}{\eta_H} \right) = P \frac{d}{d\tau} \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) + I \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) + D \frac{d^2}{d\tau^2} \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right)$$

dargestellt werden [4] [5]. Das negative Vorzeichen auf der linken Seite berücksichtigt den Regelsinn [6].

Die Konstanten  $P$ ,  $I$  und  $D$  folgen aus der Konstruktion und aus der Einstellung des Reglers. So gilt zum Beispiel [4] für Kataraktregler, die zur Regelung hydraulischer Turbomaschinen oft verwendet werden,

$$\begin{cases} P = 1/\xi_p \\ I = 1/\xi_p \tau_n \\ D = 0 \end{cases}$$

Darin ist  $\xi_p$  der auf  $n_0$  bezogene Proportionalbereich (temporäre Statik) des Reglers;  $\tau_n$  steht für seine auf  $t^*$  bezogene Nachstellzeit (Isodromzeit).

## 2. Die Eigenschwingungen

Zur Berechnung der Eigenschwingungen des Regelkreises im ausgeregelten Zustand genügt es, beliebig kleine Abweichungen von diesem Zustand zu betrachten. Daher werden in (7) und (11) alle Funktionen und ihre partiellen Ableitungen ersetzt durch die Werte des ausgeregelten Zustandes; die totalen Ableitungen nach  $\tau$  werden ersetzt durch die Ableitungen der Abweichungen vom ausgeregelten Zustand.

Führt man die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \varphi/\varphi_0 & E &\equiv \eta/\eta_H \\ \Psi &\equiv \psi/\psi_0 & A &\equiv \lambda/\lambda_0 \end{aligned}$$

ein und schreibt Indizierung für ihre partielle Ableitung nach dem Index, so lässt sich mit (11) in (7) und mit der Konstanten

$$T \equiv t_A/t^*$$

die Verknüpfung von Ausgangsabweichung  $(n/n_0 - 1)$  und Eingangsabweichung  $(\eta - 1)/\eta_H$  der Regelstrecke angeben für Zustände, welche dem ausgeregelten beliebig benachbart sind:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &T \frac{d^2}{d\tau^2} \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) + \\ &\left[ K - 2 + \frac{1 + \varepsilon \operatorname{th}(\beta)}{1/2 [\Psi_\Phi]_0 + \varepsilon \operatorname{th}(\beta)} (1 + [A_\Phi]_0) \right] \times \\ &\times \frac{d}{d\tau} \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) = \\ &= \left\{ [A_E]_0 - \frac{1/2 [\Psi_E]_0}{1/2 [\Psi_\Phi]_0 + \varepsilon \operatorname{th}(\beta)} (1 + [A_\Phi]_0) \right\} \frac{d}{d\tau} \frac{\eta - 1}{\eta_H} \end{aligned} \right.$$

### 2.1. Die Bestimmungsgleichung der Eigenschwingungen

Für die Regelabweichung  $(n/n_0 - 1)$  werde eine harmonische Schwingung angesetzt,

$$\frac{n}{n_0} - 1 = N e^{\beta\tau + \gamma}$$

mit den Konstanten  $N$ ,  $\gamma$  und mit derselben freien Grösse  $\beta$ , die bereits im Ansatz für die Druckleitungsstörung eingeführt wurde. Setzt man nun (12) in (13) ein, so folgt mit dem Ansatz für die Regelabweichung eine transzendente Bestimmungsgleichung für  $\beta$  mit reellen Koeffizienten

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &[(D C_1 + c_{11}) + (D C_2 + c_{12}) \operatorname{th}(\beta)] \beta^2 + \\ &+ [(P C_1 + c_{21}) + (P C_2 + c_{22}) \operatorname{th}(\beta)] \beta + \\ &+ [(I C_1) + (I C_2) \operatorname{th}(\beta)] = 0 \end{aligned} \right.$$

welche die Konstanten

$$c_{11} = T [\Psi_\Phi]_0; \quad c_{12} = 2 \varepsilon T$$

$$c_{21} = (K - 2) [\Psi_\Phi]_0 + 2 ([A_\Phi]_0 + 1); \quad c_{22} = 2 \varepsilon \{ K + ([A_\Phi]_0 - 1) \}$$

$$C_1 = [\Psi_\Phi]_0 [A_E]_0 - [\Psi_E]_0 [A_\Phi]_0 - [\Psi_E]_0; \quad C_2 = 2 \varepsilon [A_E]_0$$

enthält.

Sei  $i$  die imaginäre Einheit. Die Wurzeln  $\beta_k$  der Gleichung (14) bestimmen, vermöge

$$\beta_k = \delta_k + i \omega_k,$$

wobei die Dämpfung  $\delta_k$  und die Frequenz  $\omega_k$  der  $k$ ten Eigenschwingung bedeuten.

## 2.2. Die Berechnung der Eigenschwingungen

Da numerische Prozesse an sich unübersichtlich sind, empfiehlt sich stets ihre Herleitung aus anschaulichen Zusammenhängen. Ein Verfahren zur Berechnung der Eigenschwingungen nach (14) wird deshalb nicht aus dieser Bestimmungsgleichung entwickelt, sondern aus einer äquivalenten Form, die aus dem technisch anschaulichen Begriff des Frequenzganges [6] eines linearen Übertragungssystems abgeleitet wird. Für den hier betrachteten Regelkreis ergibt sich nämlich aus (12) und (13) als Frequenzgang

$$G(\beta) = - \frac{[C_1 + C_2 \operatorname{th}(\beta)] (D \beta^2 + P \beta + I)}{[c_{11} + c_{12} \operatorname{th}(\beta)] \beta^2 + [c_{21} + c_{22} \operatorname{th}(\beta)] \beta};$$

die Gleichung

$$(15) \quad G = 1$$

ist offenbar der Bestimmungsgleichung (14) äquivalent.

Seien

$$U = U(\delta, \omega)$$

$$V = V(\delta, \omega)$$

reelle Funktionen derart, dass allgemein

$$(16) \quad G = U + i V$$

gilt mit reellen Grössen  $\delta$  und  $\omega$  in

$$\beta = \delta + i \omega.$$

Die Form (15) wird als Grundlage eines Rechenverfahrens benutzt, das mit der bekannten Newton-Raphson-Iteration geeignet gewählte Anfangsnäherungen  $(\delta_k^{(0)}, \omega_k^{(0)})$  korrigiert, bis (15) mit vorgegebener Genauigkeit erfüllt wird.

## 3. Der Rechenprozess

Beachtet man

$$\operatorname{th}(\beta) = \frac{\operatorname{sh}(2\delta)}{\cos(2\omega) + \operatorname{ch}(2\delta)} + i \frac{\sin(2\omega)}{\cos(2\omega) + \operatorname{ch}(2\delta)},$$

so ergibt sich aus der Definition des Frequenzganges

$$G = - \frac{g_{11} + i g_{12}}{g_{21} + i g_{22}}$$

mit reellen Funktionen

$$\begin{cases} g_{11} = g_{11}(\delta, \omega) & ; & g_{12} = g_{12}(\delta, \omega) \\ g_{21} = g_{21}(\delta, \omega) & ; & g_{22} = g_{22}(\delta, \omega) \end{cases},$$

die im Abschnitt 5 angegeben werden.

Daher wird nach (16)

$$U = - \frac{g_{11} g_{21} + g_{12} g_{22}}{g_{21}^2 + g_{22}^2}; \quad V = - \frac{g_{12} g_{21} - g_{11} g_{22}}{g_{21}^2 + g_{22}^2}.$$

Aus (15) erhält man als Bestimmungsgleichung der Eigenschwingungen

$$(g_{11} + g_{21}) + i (g_{12} + g_{22}) = 0;$$

das heisst, dass die Eigenschwingungen durch die Nullstellen der komplexen Funktion

$$B(\beta) = (g_{11} + g_{21}) + i (g_{12} + g_{22})$$

definiert sind.

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \delta} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \delta} = b_1(\delta, \omega);$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial \delta} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \delta} = b_2(\delta, \omega);$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \omega} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \omega} = -b_2(\delta, \omega);$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial \omega} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \omega} = b_1(\delta, \omega)$$

befriedigen offenbar die Cauchy-Riemann-Bedingungen für die Existenz der Ableitung

$$B'(\beta) = \frac{d}{d\beta} \{ B(\beta) \} = b_1 + i b_2.$$

Die reellen Funktionen  $b_1(\delta, \omega)$  und  $b_2(\delta, \omega)$  werden ebenfalls im Abschnitt 5 angegeben.

Sei nun eine Anfangsnäherung

$$\beta_k^{(0)} = \delta_k^{(0)} + i \omega_k^{(0)}$$

der  $k$ -ten Eigenschwingung hinreichend genau gegeben, so konvergiert eine Iteration nach Newton-Raphson

$$\beta_k^{(j+1)} = \beta_k^{(j)} - \frac{B(\beta_k^{(j)})}{B'(\beta_k^{(j)})};$$

$$j = 0, 1, 2, \dots$$

gegen den gesuchten Wert  $\beta_k$ . Die Iteration kann abgebrochen werden, sobald nach

$$|U^{(j)} - 1| \leq \Delta \text{ und } |V^{(j)}| \leq \Delta$$

eine durch  $\Delta$  gegebene Genauigkeit erreicht wurde.

Geeignete Anfangsnäherungen können meist aus der technischen Erfahrung gewonnen werden.

Ein Flussschema des Rechenprozesses wurde dem Abschnitt 5 hinzugefügt, Bild 3.

#### 4. Anwendungsbereich des Rechenverfahrens

Zur Aufrechterhaltung eines gegebenen Betriebszustandes ist ein Kompromiss zu finden zwischen schneller Reaktion des Reglers auf Abweichungen vom Sollzustand infolge einer Störung des Regelkreises und hoher Dämpfung dieser Abweichungen [8]. Ausserdem soll meist auch die Frequenz der Abweichungen klein bleiben. Alle diese Grössen sind Funktionen der durch  $P, I$  und  $D$  gegebenen Reglereinstellung und im allgemeinen auch der Störung selbst. Da über diese Störung allgemein nichts ausgesagt werden kann, beschränkt sich das hier entwickelte Rechenverfahren auf die übliche Voraussetzung beliebig kleiner Störungen. Um einen geeigneten Kompromiss zu finden, genügt es dann, die Resultate möglicher Reglereinstellungen miteinander zu vergleichen. Die praktische Gültigkeit eines solchen Vergleichs wird von der Voraussetzung beliebig kleiner Störungen nicht wesentlich eingeschränkt. Unabhängig von Vereinfachungen, die nur in der Nähe der Stabilitätsgrenze – also für hinreichend kleine Dämpfungen – gelten, ist daher das angegebene Rechenverfahren geeignet, einen Überblick über die massgebenden Zusammenhänge bei der Regelung auf einen vorgelegten Betriebszustand zu gewinnen. Dieser Überblick mag die technische Erfahrung so ergänzen, dass stets eine den individuellen Verhältnissen angepasste optimale Reglereinstellung festgelegt werden kann. Zweckmässig benutzt man dabei statt der Dämpfung und der Frequenz die anschaulicheren Grössen [8]  $T_{1/10}$  (Abklingzeit einer Störung auf  $1/10$  ihres Anfangswertes) und  $a_{1/10}$  (Anzahl Ausschläge in der Zeit  $T_{1/10}$ ).

Für die optimale Reglereinstellung wurden in einer früheren Arbeit [8] die Resultate der Berechnungen mit einem vereinfachten Computer-Programm gegeben, das Beziehungen voraussetzt, wie sie bei kleinen Dämpfungen annähernd gelten. Die Berechnungen mit dem hier abgeleiteten Computer-Programm, das ohne diese vereinfachenden Voraussetzungen gültig ist, ergeben keine wesentlichen Änderungen gegenüber den früheren Resultaten.

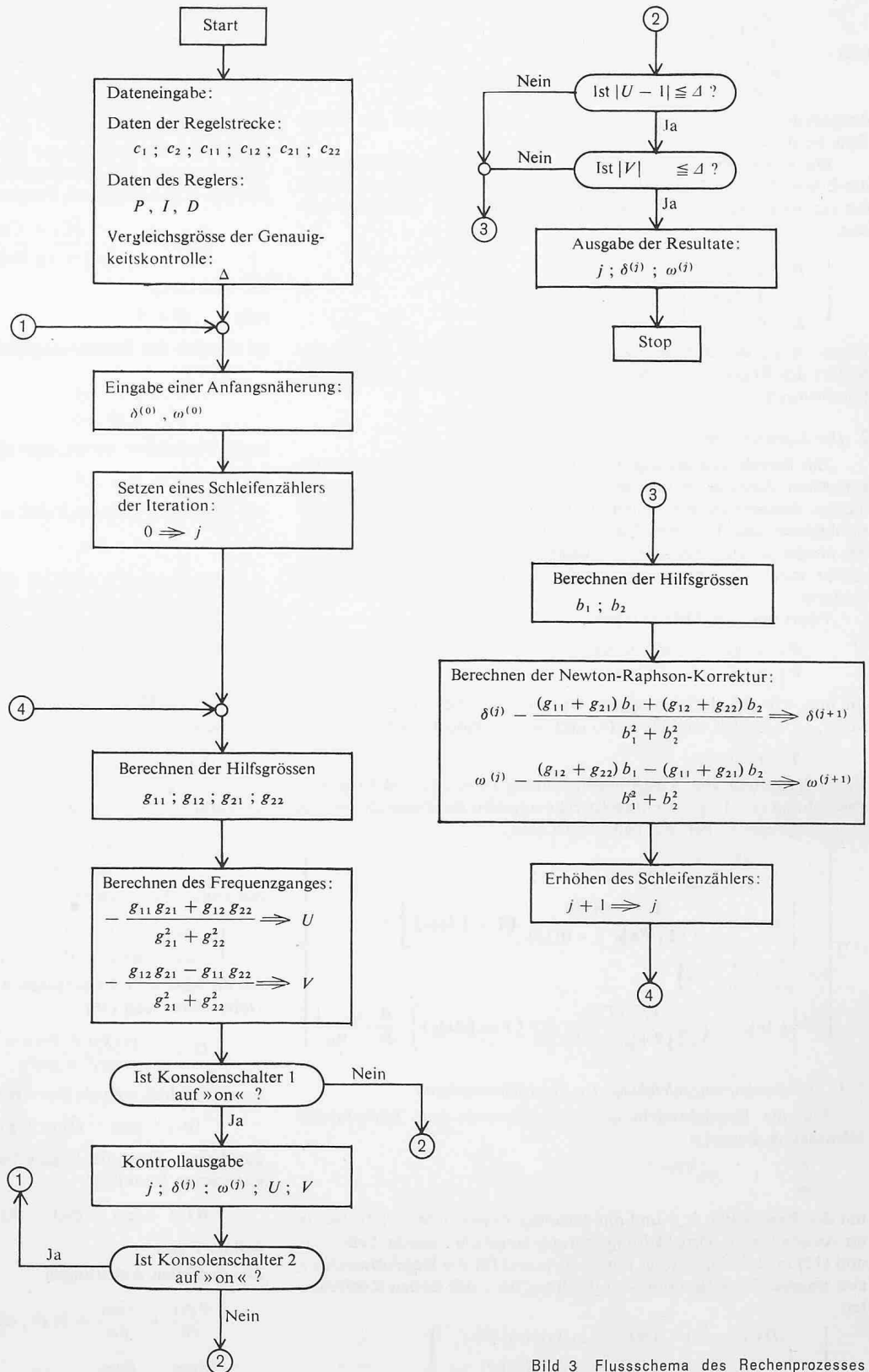


Bild 3 Flusschema des Rechenprozesses

#### 5. Anhang

##### 5. 1. Die Funktionen $g_{ij}(\delta, \omega)$

$$g_{11} = [(\delta^2 - \omega^2)D + \delta P + I] \left( C_1 + C_2 \frac{\text{sh}(2\delta)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)} \right) - \omega(2\delta D + P) C_2 \frac{\sin(2\omega)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)};$$

$$g_{12} = \omega(2\delta D + P) \left( C_1 + C_2 \frac{\text{sh}(2\delta)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)} \right) + [(\delta^2 - \omega^2)D + \delta P + I] C_2 \frac{\sin(2\omega)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)};$$

$$g_{21} = [(\delta^2 - \omega^2) c_{11} + \delta c_{21}] + [(\delta^2 - \omega^2) c_{12} + \delta c_{22}] \frac{\text{sh}(2\delta)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)} - \omega(2\delta c_{12} + c_{22}) \frac{\sin(2\omega)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)};$$

$$g_{22} = \omega \left[ (2\delta c_{11} + c_{21}) + (2\delta c_{12} + c_{22}) \frac{\text{sh}(2\delta)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)} \right] + [(\delta^2 - \omega^2) c_{12} + \delta c_{22}] \frac{\sin(2\omega)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)}.$$

### 5. 2. Die Funktionen $b_j(\delta, \omega)$

$$b_1 = [2\delta(DC_1 + c_{11}) + (PC_1 + c_{21})] + [2\delta(DC_2 + c_{12}) + (PC_2 + c_{22})] \frac{\text{sh}(2\delta)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)} - 2\omega(DC_2 + c_{12}) \frac{\sin(2\omega)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)} +$$

$$+ 2[(\delta^2 - \omega^2)(DC_2 + c_{12}) + \delta(PC_2 + c_{22}) + IC_2] \frac{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)}{[\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)]^2} + 2\omega[2\delta(DC_2 + c_{12}) + (PC_2 + c_{22})] \frac{\sin(2\omega) \text{sh}(2\delta)}{[\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)]^2};$$

$$b_2 = 2\omega \left[ (DC_1 + c_{11}) + (DC_2 + c_{12}) \frac{\text{sh}(2\delta)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)} \right] + [2\delta(DC_2 + c_{12}) + (PC_2 + c_{22})] \frac{\sin(2\omega)}{\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)} -$$

$$- 2[(\delta^2 - \omega^2)(DC_2 + c_{12}) + \delta(PC_2 + c_{22}) + IC_2] \frac{\sin(2\omega) \text{sh}(2\delta)}{[\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)]^2} + 2\omega[2\delta(DC_2 + c_{12}) + (PC_2 + c_{22})] \frac{\cos(2\omega) \text{ch}(2\delta)}{[\cos(2\omega) + \text{ch}(2\delta)]^2}.$$

### 5. 3. Flussschema des Rechenprozesses

Bild 3 zeigt ein Flussschema des Rechenprozesses, dessen Aufbau sich wesentlich aus der Unsicherheit bei der Wahl geeigneter Anfangsnäherungen  $\beta_k^{(0)}$  ergibt. Deshalb mussten nämlich Möglichkeiten zur Kontrolle und Korrektur einer einmal begonnenen Iteration dem eigentlichen Rechenprozess hinzugefügt werden. Diese Kontroll- und Korrekturmöglichkeiten werden benutzt oder übergangen je nach der Stellung zweier sogenannter Konsolenschalter, die manuell zu jeder beliebigen Zeit während des automatischen Programmablaufs verstellt werden können. Solche Konsolenschalter sind bei den meisten Rechenautomaten zu finden; sind sie nicht vorhanden, so können sie oft simuliert werden.

Sobald sich aus einem bestimmten Anwendungsbereich des Rechenverfahrens die Variationsbereiche der Konstanten angeben lassen, ist auch die Unsicherheit bei der Wahl der Anfangsnäherung überwunden. Auf eine dauernde Überwachung und Korrektur der Rechnung kann dann verzichtet werden, so dass sich das Fluss-Schema entsprechend vereinfacht.

### Literaturverzeichnis

- [1] *W. Traupel*: Thermische Turbomaschinen. Bd. 1, Springer 1958.
- [2] *P. Frank, R. v. Mises*: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Bd. 2, Braunschweig 1961.
- [3] *J. Raabe*: Stabilitätsbetrachtungen an Wasserturbinenreglern. «Z. Maschinenmarkt», 67. Jg. (1961), Nr. 12.
- [4] *T. Stein*: Wasserturbinenregler mit identischer Integral- und Differentialwirkung. «Schweiz. Bauzeitung», 72. Jg. (1954), Nr. 11 und 12.
- [5] *G. Lein, H. Eilken*: Regulierung von Kaplan turbinen. J. M. Voith GmbH, Heidenheim/Brenz (als Manuskript gedruckt).
- [6] *R. C. Oldenburg, H. Sartorius*: Dynamik selbsttätiger Regelungen. Bd. 1, München 1955.
- [7] *G. Hutarew*: Regelungstechnik. Springer 1955.
- [8] *T. Stein, D. Hinze*: Einfluss der Elastizität auf die optimale Reglereinstellung von Wasserturbinen. «Schweiz. Bauzeitung», 82. Jg. (1964), Nr. 13.

## Die Jahreskosten der Abfallbeseitigung

DK 628.49.003

Von **K. A. Wuhrmann**, dipl. Ing., Eidg. Anstalt für Wasserversorgung, Abwasserreinigung und Gewässerschutz (EAWAG), Zürich

Viele Gemeinden und Regionen stehen vor der Aufgabe, die Abfallbeseitigung auf hygienische und grosszügige Art zu planen. Beim Vergleich der verschiedenen Möglichkeiten und Verfahren tritt alsbald die Frage der Bau- und Jahreskosten in den Vordergrund. Die mit der Planung beauftragten Behörden und Berater sind im allgemeinen ohne Schwierigkeiten in der Lage, sich anhand eingeholter Offerten ein Bild über die Baukosten sowie die eventuell in Frage kommenden Subventionen zu machen. Schwieriger wird es mit den Jahreskosten. Sie setzen sich zusammen aus Kapitaldienst und Betriebskosten.

### 1. Kapitaldienst

Zur Ermittlung der Wirtschaftlichkeit eines Projektes und für Variantenrechnungen ist die Einrechnung des Kapitaldienstes unerlässlich, und zwar unabhängig von der vorgesehenen Finanzierungsart. Die letztgenannte kann einem der beiden Grundtypen entsprechen: 1. Eigenfinanzierung aus vorhandenen Mitteln. 2. Fremdfinanzierung durch aufgenommene Kapital.

Die jährlich wiederkehrenden Belastungen bestehen aus dem Kapitalzins sowie der Abschreibung im ersten, der Tilgung im zweiten Falle. Funktionell entspricht die Abschreibung der Tilgung, mit dem Unterschied jedoch, dass sich die Abschreibung immer auf die Abschreibungsperiode, die der Lebensdauer der Anlage angemessen sein muss, die Tilgung lediglich auf die mit dem Kapitalgeber vereinbarten Bedingungen bezieht. Ein weiterer Unterschied in den Berechnungsarten kann darin bestehen, dass jährlich gleiche Abschreibungs- bzw. Tilgungssätze mit entsprechend degressiven Jahreszinsen zur Anwendung gelangen, oder, was den Überblick erleichtert, dass konstante Annuitäten gemäss Rentenrechnung kalkuliert werden. Schliesslich wird bisweilen argumentiert, dass der Zinsfuß für Eigenkapitalien nicht notwendigerweise die gleiche Höhe aufweisen müsse, wie derjenige für fremdes Geld, doch ist dieser Gesichtspunkt im allgemeinen zu vernachlässigen.

Die Festlegung der Abschreibungs- oder Tilgungsdauer ist im Falle der Abfallbeseitigung schwierig. Es sind Fälle bekannt, in denen Verbrennungsanlagen ohne grundsätzliche Erneuerung oder Umbau

während 50 Jahren betrieben wurden. Andererseits weiss man von Kompostwerken, deren Ausrüstung schon nach wenigen Jahren ergänzt oder geändert werden musste und zwar mit einem Aufwand, der nicht über Unterhalt (siehe nächsten Abschnitt) abgebucht werden konnte. Die Schwierigkeit besteht darin, zu entscheiden, was in einem solchen Fall unter Lebensdauer der Anlage zu verstehen sei. Ferner gibt es Werke, die vorzeitig, d. h. vor Erreichen des vorgesehenen Ausbauzieles, erweitert werden mussten. Auch in einem solchen Falle ist es zweifelhaft, ob die Abschreibungsdauer noch wesentlich über den Zeitpunkt der Erweiterung hinausreichen soll, da ja von diesem Moment an wiederum neue, nach dem Gang der Dinge meist höhere Kapitaldienstkosten erwachsen. Müssen im Zuge der Erweiterung wesentliche Teile der alten Anlage stillgelegt werden, so sollte ihre Abschreibung beendet sein.

Beachten wir ferner, dass die technische Entwicklung auf dem hier behandelten Gebiet heute schneller verläuft als früher, so kommt man zum Schluss, dass die Gefahr der Veraltung ein wesentlicher Gesichtspunkt für die Bemessung der Abschreibungsdauer sein muss. Wegen der meist engen Verflechtung von Bauwerk und maschineller Ausrüstung besteht auch für das erstere, obwohl es meist in einer für viel längere Zeit berechneten Bauweise errichtet wird, die Notwendigkeit einer rechtzeitigen Abschreibung. Die im Tiefbau zusammengefassten Werkteile, wie Erschliessungsstrassen und Gleise, Werkleitungen usw. sind indessen meist über längere Zeitläufe nutzbar.

Ein wichtiger Aspekt bei kommunalen Werken der Abfallbeseitigung wie der Abwasserreinigung ist die Frage der Ausbaugrösse bzw. der Anfangsauslastung. Je nach Art der Investitionen wird man auf sehr unterschiedliche Ausbauziele tendieren mit der Konsequenz, dass oft gerade die aufwendigen und schwer zu erweiternden Anlage-teile auf weite Sicht geplant, mit reichlichen Sicherheitszuschlägen angesichts der oft schwierigen Entwicklungsprognosen versehen, und daher mit geringer Anfangsauslastung eingesetzt werden müssen. Auch über die Verteilung der Kosten auf die zunächst Beteiligten und allfällige spätere Zuzüger kann man sich Gedanken machen, insbesondere wenn z. B. verschiedene Gemeinden ein gemeinsames Werk bauen,