

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 82 (1964)
Heft: 26

Artikel: Abschätzung der Spannungsverteilung in Brückentafeln infolge zentrischer, konzentrierter Quervorspannung
Autor: Sutter, Peter / Gaszner, Rolf
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-67531>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Abschätzung der Spannungsverteilung in Brückentafeln infolge zentrischer, konzentrierter Quervorspannung

DK 624.21:539.4.014.12

Von Peter Sutter, dipl. Ing. ETH, und Rolf Gaszner, Ing., Zürich

1. Einleitung und Problemstellung

Eine genaue rechnerische Ermittlung des Spannungszustandes in breiten Brückentafeln infolge konzentrierter Quervorspannung ist wegen der Diskontinuität der Querschnitte auch bei Verwendung einer grossen, elektronischen Rechenanlage (z.B. IBM 7090) schwierig und sehr zeitaufwendig. Eine wesentliche Vereinfachung wird dadurch erreicht, dass die Brückentafel zwischen den Hauptquerträgern durch orthotrope Platten approximiert wird. Aber auch dann bereiten die Querträger, sofern schief zur Brückenachse verlaufend, infolge der Übergangsbedingungen zwischen orthotroper Platte und Querträger noch immer umständliche und zeitaufwendige Programmierungen. Aus diesen Gründen ist bei komplizierten Brückenobjekten der experimentelle Lösungsweg zurzeit immer noch einfacher und wirtschaftlicher.

Beim Modellversuch wird der Belastungsfall «Quervorspannung» zweckmässig in die drei Teilbelastungen a) Umlenkungskräfte, b) konzentrierte Rand- und Innenmomente, c) Normalkräfte zerlegt. Teilbelastungen a) und b) lassen sich einfach durch Vertikalkräfte realisieren, für c) hingegen sind Horizontalkräfte erforderlich, sofern das Modell nicht entsprechend umgebaut wird, was bei grösseren Modellen meist nicht möglich ist.

Da eine einwandfreie Durchführung des Belastungsfalles c) im Vergleich zu a) und b) bedeutend schwieriger ist (Stabilisierung des Modells, Modellverkrümmungen, Elimination von störenden Nebeneinflüssen usw.) wird er oft gar nicht ausgeführt. Der Normalkraftverlauf wird dann einfach «geschätzt». Um nun eine solche Schätzung möglichst schnell und zutreffend auszuführen, sollen in der vorliegenden Arbeit einige «Richtwerte» angegeben werden, die die Variation der mitwirkenden Breite in Abhängigkeit von «Kabelschiefe» und Geometrie der Brückentafel (Längsrippen von Hohlkasten, Querträger) veranschaulichen.

Der parallelrandige, orthotrope Plattenstreifen (bezüglich Mittelebene symmetrisch) unter schiefen, konzentrierten, periodischen Randlasten soll als stark idealisiertes Ersatzsystem dienen. Im Falle massiver Querträger wird nur der Spezialfall «Querträger senkrecht zur Brückenachse» diskutiert. Mit der Wahl dieses Ersatzsystems sind die folgenden Einschränkungen verbunden: Brückentafel bezüglich Mittelebene symmetrisch, Vernachlässigung der Reibungsverluste, keine inneren Abspannungen, nur generelle Erfassung der effektiven Querschnittsgestaltung.

Eine direkte Anwendung ist somit nur für symmetrische oder quasisymmetrische Querschnitte gemäss Bild 1a möglich, stark asymmetrische Querschnitte (Bild 1b) sind nicht mehr zulässig. Durch eine Querschnittsorthotropie kann die

Längsträgerwirkung (Längsträgerquerschnitt wird gleichmässig über Trägerabstand «verschmiert») naturgemäss nur summarisch erfasst werden, für eine gute Abschätzung ist sie jedoch ausreichend.

2. Der durch Längsrippen ausgesteifte Plattenstreifen unter schiefen periodischen Randkräften [1]

2.1 Theoretische Grundlagen

Mit den ideellen Plattendicken

$$h_x = \alpha_x h = \left(1 + \frac{F_{Rx}}{e_y}\right) h \quad \text{und} \quad h_y = \alpha_y h = \left(1 + \frac{F_{Ry}}{e_x}\right) h$$

lautet das Elastizitätsgesetz im Falle der Querschnittsorthotropie (Rippen in x - und y -Richtung gemäss Bild 4)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E h \alpha_x} (N_x - \mu_y N_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E h \alpha_y} (N_y - \mu_x N_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \mu)}{E h} N_{xy} \end{aligned} \quad (1)$$

(Rippeneinfluss für Schubverformung vernachlässigt)
Nach dem Reziprozitätsgesetz gilt:

$$(2) \quad \frac{\mu_x}{\alpha_y} = \frac{\mu_y}{\alpha_x}$$

Mit (1) ergibt sich dann die Differentialgleichung der Schnittkraftfunktion $\Theta(x, y)$ unter Berücksichtigung veränderlicher Plattendicke $h(x, y) = \frac{1}{\eta(x, y)}$

$$\begin{aligned} \eta &\left[\frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4} + 2 \left(1 + \mu - \frac{\mu_y}{\alpha_x}\right) \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{\alpha_x} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial y^4} \right] + \\ &+ 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[\frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} + \left(1 + \mu - \frac{\mu_y}{\alpha_x}\right) \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x \partial y^2} \right] + \\ &+ 2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \left[\frac{1}{\alpha_x} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial y^3} + \left(1 + \mu - \frac{\mu_y}{\alpha_x}\right) \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^2 \partial y} \right] + \\ (3) \quad &+ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left[\frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{\mu_y}{\alpha_x} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \left[-\frac{\mu_y}{\alpha_x} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right] + \\ &+ 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

2.2 Schnittkräfte für gleichbleibende Plattendicke h [2]

Gleichung (3) reduziert sich auf den ersten Term. Mit

$$e_1 = \frac{1}{\alpha_y} \quad e_2 = 2 \left(1 + \mu - \frac{\mu_y}{\alpha_x}\right) \quad e_3 = \frac{1}{\alpha_x}$$

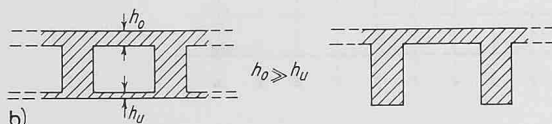
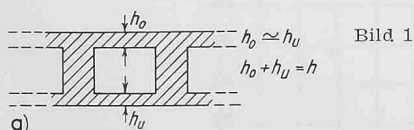
lautet dann die Differentialgleichung

$$(4) \quad e_1 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4} + e_2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^2 \partial y^2} + e_3 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial y^4} = 0$$

und die dazugehörige charakteristische Gleichung

$$(5) \quad e_3 \varphi^4 - e_2 \varphi^2 + e_1 = 0$$

Bei Isotropie ($\alpha_x = \alpha_y = 1$) reduziert sich (4) auf die bekannte Bipotentialequation: $\Delta \Delta \Theta(x, y) = 0$.



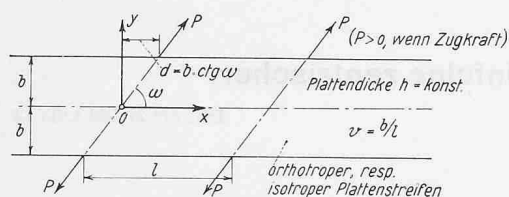


Bild 2

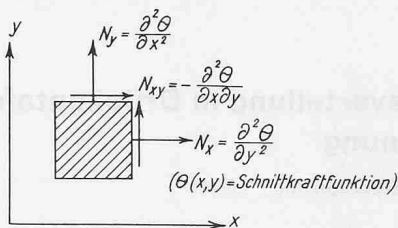


Bild 3. Positive Scheibenschnittkräfte

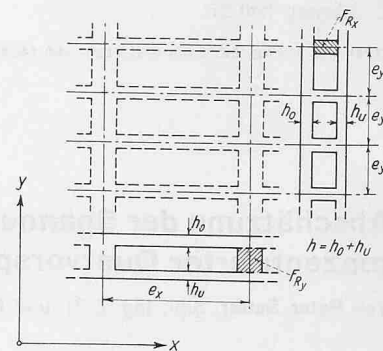


Bild 4

Für die Schnittkraftfunktion $\Theta(x, y)$ gelten dann — wenn die Symmetrieverhältnisse bezüglich Belastung gemäss Bild 2 direkt berücksichtigt werden — die Ansätze:

Fall 1 (Orthotropie)

$$\Theta_1(x, y) = g(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \sum_{i=1}^2 [C_i \sinh(\varphi_i \gamma y) \sin(\gamma x) + D_i \cosh(\varphi_i \gamma y) \cos(\gamma x)] \right\}$$

(φ_i sind die pos. Lösungen von (5))

(6)

Fall 2 (Isotropie)

$$\Theta_2(x, y) = g(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2} \left\{ [C_1 \sinh(\gamma y) + C_2 \gamma y \cosh(\gamma y)] \sin(\gamma x) + [D_1 \cosh(\gamma y) + D_2 \gamma y \sinh(\gamma y)] \cos(\gamma x) \right\}$$

Die vier Festwerte C_1, C_2, D_1, D_2 bestimmen sich aus den beiden statischen Randbedingungen:

$$(7) \quad y = +b \quad \begin{aligned} N_y &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = p(x) \sin \omega \\ N_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = p(x) \cos \omega \end{aligned}$$

mit der Randbelastung gemäss Bild 2

$$p(x) = \frac{2P}{l} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\gamma x) \cos(\gamma d) + \sin(\gamma x) \sin(\gamma d) \right\}$$

$$\text{und} \quad \gamma = \frac{2n\pi}{l} \quad (\text{Periode ist } l)$$

Sie lauten in Determinantenform:

Fall 1 (1. Gleichung (6))

$$(8) \quad \begin{aligned} C_{1,2} &= \mp \frac{2P}{l\Delta_1} \begin{vmatrix} \sin \omega \sin \psi \\ \cos \omega \cos \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sinh(\varepsilon_{2,1}) \\ \varphi_{2,1} \cosh(\varepsilon_{2,1}) \end{vmatrix} \\ D_{1,2} &= \pm \frac{2P}{l\Delta_2} \begin{vmatrix} -\sin \omega \cos \psi \\ \cos \omega \sin \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cosh(\varepsilon_{2,1}) \\ \varphi_{2,1} \sinh(\varepsilon_{2,1}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Fall 2 (2. Gleichung (6))

$$(9) \quad \begin{aligned} C_1 &= -\frac{2P}{lp_1} \begin{vmatrix} \sin \omega \sin \psi \\ \cos \omega \cos \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon \cosh \varepsilon \\ \cosh \varepsilon + \varepsilon \sinh \varepsilon \end{vmatrix} \\ C_2 &= +\frac{2P}{lp_1} \begin{vmatrix} \sin \omega \sin \psi \\ \cos \omega \cos \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sinh \varepsilon \\ \cosh \varepsilon \end{vmatrix} \\ D_1 &= \frac{2P}{lp_2} \begin{vmatrix} -\sin \omega \cos \psi \\ \cos \omega \sin \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon \sinh \varepsilon \\ \sinh \varepsilon + \varepsilon \cosh \varepsilon \end{vmatrix} \\ D_2 &= -\frac{2P}{lp_2} \begin{vmatrix} -\sin \omega \cos \psi \\ \cos \omega \sin \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cosh \varepsilon \\ \sinh \varepsilon \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Die in (8) und (9) verwendeten Abkürzungen bedeuten:

$$\varepsilon_{1,2} = \varphi_{1,2} \gamma b \quad \varepsilon = \gamma b \quad \psi = \gamma d = \gamma b \operatorname{ctg} \omega$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= \varphi_2 \sinh \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_2 - \varphi_1 \sinh \varepsilon_2 \cosh \varepsilon_1 \\ \Delta_2 &= \varphi_2 \sinh \varepsilon_2 \cosh \varepsilon_1 - \varphi_1 \sinh \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$p_{1,2} = \sinh \varepsilon \cosh \varepsilon \mp \varepsilon$$

Für $g(x, y)$ (siehe Gleichungen (6)) ergibt sich aus den beiden Randbedingungen (7)

$$(11) \quad g(x, y) = \frac{P}{2l} x(x \sin \omega - y \cos \omega) + m y^2$$

Wird freie Längsverschieblichkeit parallel zur x -Axe (Bild 2) vorausgesetzt, so wird in (11) $m = 0$.

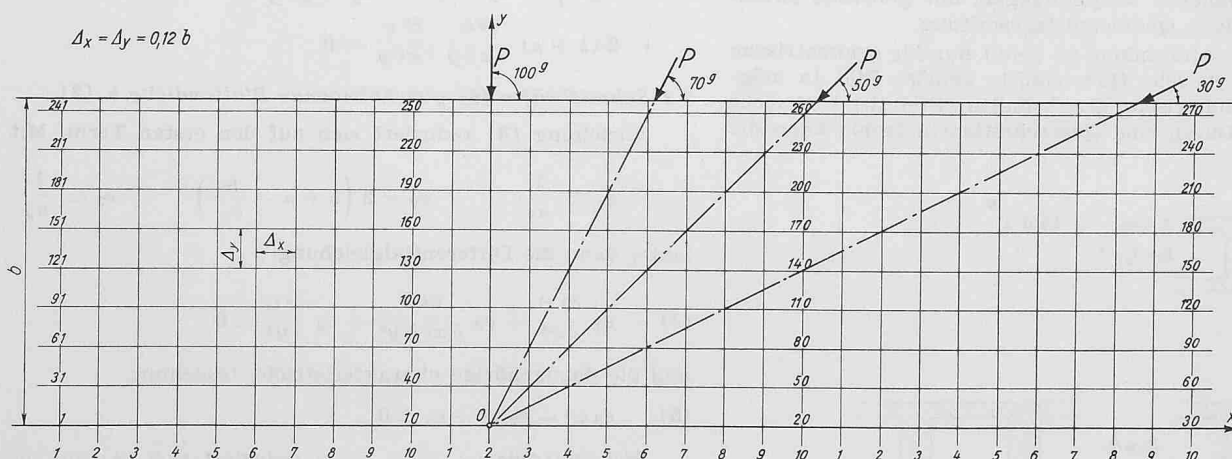
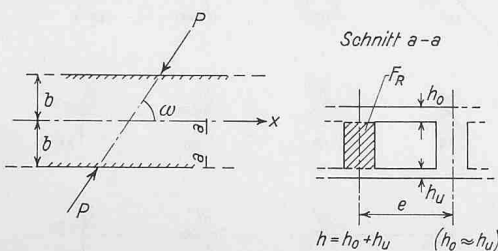


Bild 5. Situation mit Messpunktanordnung und Randkraftschiefen

Tabelle 1. Schnittkräfte und Haupttrajektorienrichtungen in Abhängigkeit von α_x und ω (Lage der Punkte Pkt. siehe Bild 5)

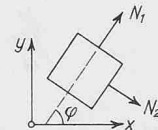
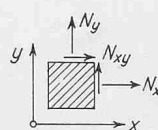
		$\alpha_x = 1$ (isotrop)						$\alpha_x = 1,5$ (orthotrop)					
	Pkt.	N_x	N_y	N_{xy}	N_1	N_2	φ°	N_x	N_y	N_{xy}	N_1	N_2	φ°
$\omega \cong 100^\circ$	12	-0,2487	+0,9195	0	+0,9195	-0,2487	100	-0,2616	+0,8828	0	+0,8828	-0,2616	100
	72	-0,2585	+0,9975	0	+0,9975	-0,2585	100	-0,2730	+0,9567	0	+0,9567	-0,2730	100
	132	-0,2905	+1,3020	0	+1,3020	-0,2905	100	-0,3106	+1,2450	0	+1,2450	-0,3106	100
	192	-0,3471	+2,2910	0	+2,2910	-0,3471	100	-0,3807	+2,1830	0	+2,1830	-0,3807	100
	252	+2,4540	+7,5960	0	+7,5960	+2,4540	100	+2,5600	+7,1850	0	+7,1850	+2,5600	100
$\omega \cong 70^\circ$	12	-0,0253	+0,5951	+0,4860	+0,8615	-0,2916	68,1	-0,0555	+0,5559	+0,4613	+0,8036	-0,3032	68,6
	72	-0,0146	+0,5778	+0,5105	+0,8793	-0,2867	66,0	-0,0187	+0,5433	+0,4865	+0,8241	-0,2996	66,6
	74	-0,0557	+0,7260	+0,4564	+0,9361	-0,2657	72,5	-0,0857	+0,6784	+0,4351	+0,8754	-0,2826	72,9
	134	+0,0265	+0,8910	+0,5998	+1,1980	-0,2805	69,9	-0,0158	+0,8300	+0,5679	+1,1150	-0,3010	70,3
	194	+0,4937	+0,8602	+0,8942	+1,5890	-0,2358	56,4	+0,4337	+0,8318	+0,8692	+1,5240	-0,2589	57,2
	196	-0,1634	+2,0730	+0,2488	+2,1000	-0,1907	93,0	-0,2008	+1,9610	+0,2424	+1,9880	-0,2277	93,0
	256	+3,0260	+6,5750	+1,9030	+7,4030	+2,1970	73,9	+3,1180	+6,4400	+1,7920	+7,2220	+2,3350	73,8
$\omega \cong 50^\circ$	12	+0,1769	+0,2097	+0,5136	+0,7032	-0,3205	51,0	+0,1345	+0,2067	+0,4917	+0,6637	-0,3224	52,3
	74	+0,2137	+0,2517	+0,5274	+0,7605	-0,2950	51,1	+0,1671	+0,2447	+0,5057	+0,7131	-0,3012	52,4
	136	+0,3553	+0,3962	+0,5952	+0,9713	-0,2197	51,1	+0,2955	+0,3778	+0,5713	+0,9094	-0,2361	52,3
	198	+0,7818	+0,7868	+0,8834	+1,6670	-0,0991	50,1	+0,6950	+0,7445	+0,8421	+1,5620	-0,1227	50,9
	260	+4,0240	+5,2510	+2,8290	+7,5330	+1,7420	56,8	+4,0790	+5,0970	+2,6830	+7,3190	+1,8570	55,9
$\omega \cong 30^\circ$	12	+0,1021	+0,0048	+0,3362	+0,3932	-0,2862	45,4	+0,0949	+0,0122	+0,3344	+0,3905	-0,2833	46,1
	76	+0,1746	+0,0198	+0,3231	+0,4295	-0,2350	42,5	+0,7629	+0,0267	+0,3237	+0,4256	-0,2360	43,4
	140	+0,4021	+0,0688	+0,3099	+0,5874	-0,1164	34,3	+0,3801	+0,0752	+0,3163	+0,5788	-0,1234	35,7
	204	+0,9037	+0,1871	+0,4140	+1,0930	-0,0021	27,3	+0,8796	+0,1955	+0,4304	+1,0870	-0,0122	28,6
	268	+5,3110	+3,1790	+2,8350	+7,2740	+1,2160	38,6	+5,3380	+3,0150	+2,7770	+7,1870	+1,1660	37,4
		$\times P/b$						$\times P/b$					



F_R = Querschnitt der Längsträger (zwischen den Platten gemessen)

$$\alpha_x = 1 + \frac{F_R}{e \cdot h}$$

$$N_{1,2} = \frac{N_x + N_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4N_{xy}^2}$$



+ Druckkraft
- Zugkraft

Bemerkung: Aus Raumgründen konnten in Tabelle 1 nur die Punkte längs der Kraftwirkungslinie aufgenommen werden. Eine erweiterte Tabelle mit allen Punkten gemäss Bild 7 kann beim Verlag der Schweizerischen Bauzeitung nachbezogen werden.

Mit den Ausdrücken (5), (6), (8), (9), (10) und (11) sind die Schnittkraftfunktion $\Theta(x, y)$ und damit die Schnittkräfte als 2. partielle Ableitungen von $\Theta(x, y)$ bestimmt (Bild 3). Aus den drei Schnittkräften lassen sich dann mittelst der Transformationsformeln die Haupttrajektorien und Hauptkräfte sofort angeben.

2.3 Numerische Auswertungen und Schlussfolgerungen

Die numerischen Auswertungen der unter 2.2 zusammengestellten algebraischen Ausdrücke für die Schnittkräfte erfolgten mit einer elektronischen Rechenanlage IBM 1620, die Programmierung mit Fortran 1. Die Rechnung wurde für vier Schiefen ω und die jeweils massgebenden Plattenpunkte gemäss Bild 5 durchgeführt. Als Parameter dienten: Längsrippenfaktor α_x (α_y wurde = 1 gesetzt, d. h. keine Querrippen), Verhältniswert $v = b/l$, Querkontraktionszahl μ .

Wie zu erwarten war, schwankte die Güte der Reihenkonvergenz sehr stark mit dem Verhältnis b/l . So konnten z. B. mit $v = 0,35$ bereits keine brauchbaren Resultate mehr im kritischen Gebiet $x \cong l/2$ erzielt werden. Da nun aber erst bei $v = 0,2$ die Einflussbereiche benachbarter Randkräfte sich nicht mehr überschneiden — dieser Fall ist von praktischem Interesse, da daraus durch Superposition jeder beliebige Fall sofort angebar ist — muss für den kritischen Bereich mit einem modifizierten mathematischen Ansatz gerechnet werden. Mit der Annahme antisymmetrischer Randkräfte gemäss Bild 6 ist eine bedeutend bessere Erfassung der Schnittkräfte im erwähnten kritischen Gebiet zwischen benachbarten Randkräften erreichbar. Die Randkraftfunktion (Periode 2l) lautet dann

$$p(x) = \frac{2P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \left[\sin(\bar{\gamma}x) \cos \bar{\psi} + \cos(\bar{\gamma}x) \sin \bar{\psi} \right]$$

$$\text{mit } \bar{\gamma} = \frac{n\pi}{l} \quad \bar{\psi} = \bar{\gamma} \left(\frac{l}{2} - b \cotg \omega \right)$$

Es verschwindet damit im Ansatz für die Schnittkraftfunktion (6) der erste Term $g(x, y)$, und die Schnittkräfte bauen sich allein aus den Reihensummanden auf. Aus Raumgründen muss auf die Wiedergabe der entsprechenden Ansätze und Formeln der Festwerte verzichtet werden.

Es darf vielleicht in diesem Zusammenhang wiederholt auf die bekannte Tatsache hingewiesen werden, dass eine eingehende Abklärung der Konvergenzgüte vor der Programmierung und Maschinenrechnung viel Kosten und Aerger sparen hilft. Natürlich ist eine rein theoretische Konvergenzuntersuchung in vielen Fällen gar nicht möglich, besonders bei Doppelreihen. Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass einige in der Literatur zu findende mathematische Lösungen von speziellen Problemen der Elastizitätstheorie einer numerischen Auswertung gar nicht zugänglich sind, da die verwendeten Reihenansätze nicht konvergieren.

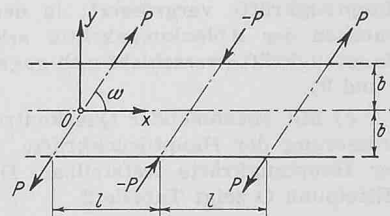
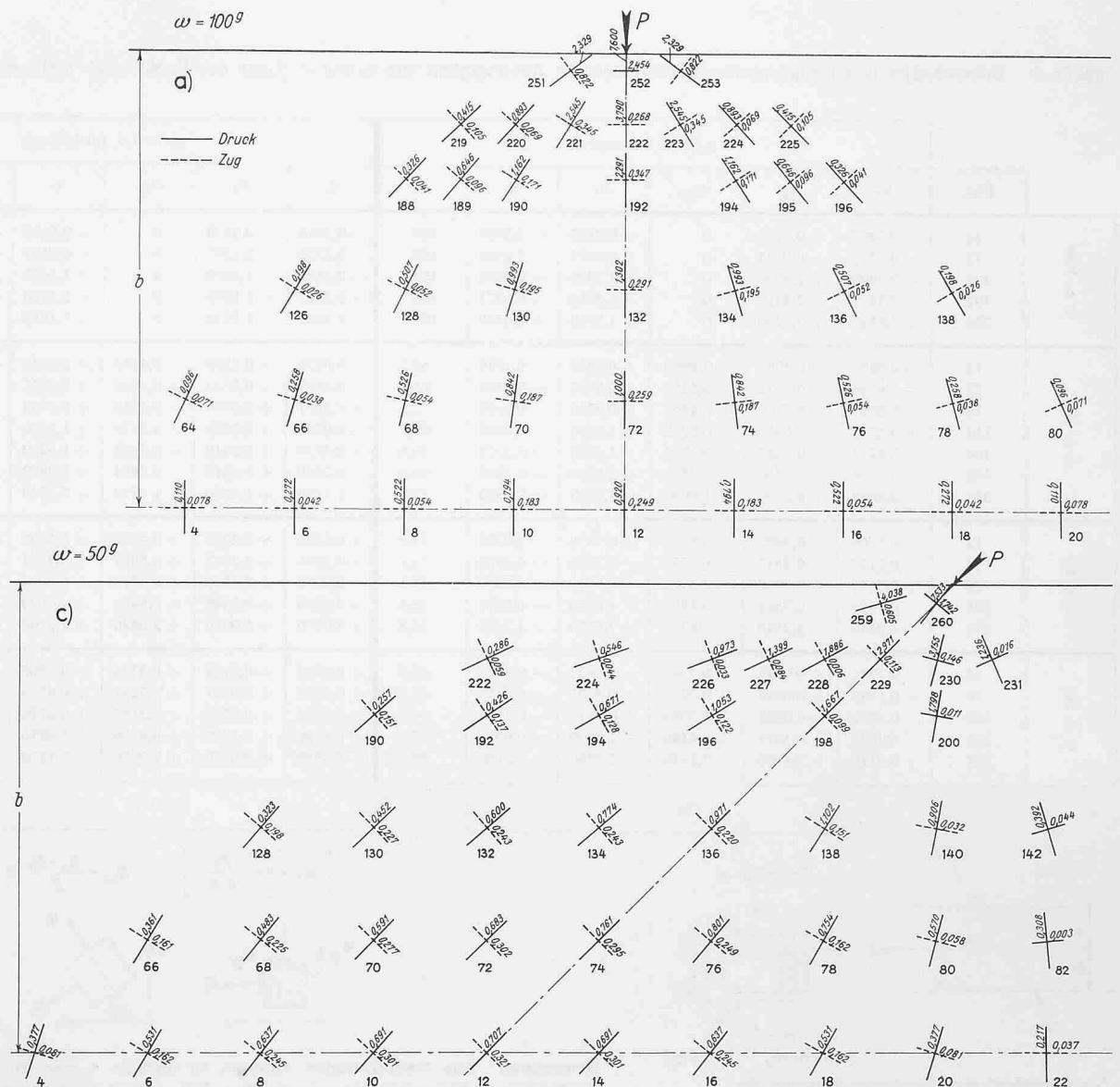


Bild 6



Bezüglich Genauigkeit wurde programmiert: entweder 1 % Genauigkeit, d. h. der nächste Reihensummand wird nicht mehr gerechnet, wenn gleich oder kleiner 1 % der bereits vorhandenen Reihensumme, oder maximal 25 Reihenglieder. Damit konnte in dem vornehmlich interessierenden Mittelbereich die Genauigkeit von 1 % eingehalten werden.

Die folgenden Tabellen und Diagramme sind mit $v = b/l = 0,2$ gerechnet, sie entsprechen somit mit guter Genauigkeit dem Spezialfall einer einzigen Randkraft.

Es können etwa folgende Gesetzmässigkeiten abgelesen werden:

a) Der Einfluss der Längsrippen auf den Verlauf der Haupttrajektorien ist für die praktisch vorkommenden Rippenfaktoren ($\alpha_x \leq 2$) vernachlässigbar klein (siehe Tabelle 1). In Bild 7 sind die Haupttrajektorienrichtungen in den massgebenden Punkten des jeweiligen Krafteinflussbereiches für den Fall Isotropie aufgetragen.

b) Der Kraftabfall der Hauptschnittkräfte längs der Kraftwirkungslinie ist für alle Schiefen ω im Mittelbereich des Plattenstreifens relativ gering. Es kann deshalb mit guter Näherung mit einer konstanten mitwirkenden Breite in der Mittelzone gerechnet werden (mitwirkende Breite des Mittelpunktes O). Mit ansteigendem Rippenfaktor α_x werden die Hauptdruckkräfte im Mittelbereich verkleinert, die Hauptzugkräfte vergrössert; in der Randzone ist ein Anwachsen der Ablenkungskräfte erkennbar (Nullpunkt der Hauptzugkräfte verschiebt sich gegen den Rand, siehe Bilder 8 und 9).

c) Mit zunehmender Querkontraktionszahl ist eine Vergrösserung der Hauptdruckkräfte und eine Verkleinerung der Hauptzugkräfte feststellbar. Die Verhältnisse für den Mittelpunkt O zeigt Tabelle 2.

d) Die Veränderlichkeit der Hauptschnittkräfte im Mittelpunkt O infolge Längsrippen und Schiefe ist aus den Bildern 10 und 11 ersichtlich.

e) Während sich die Maxima der Hauptschnittkräfte bei allen Schiefen in der Nähe der Kraftwirkungslinie vorfinden, ist bei den übrigen Schnittkräften mit zunehmender Schiefe (d. h. mit abnehmendem ω) eine Verschiebung von der Wirkungslinie weg feststellbar. In Bild 12 sind die Verhältnisse für N_y aufgetragen.

Es soll noch einmal gesagt sein, dass sich die obigen Feststellungen auf die Schnittkräfte und nicht auf die Spannungen beziehen. Diese sind abhängig von der jeweiligen Querschnittsausgestaltung.

3. Der durch Längsrippen ausgesteifte Plattenstreifen mit massiven Querträgern senkrecht zur Längsaxe

3.1 Scheibenschnittkräfte und Normalkraft im Querträger [2]

Da vornehmlich der Normalkraftverlauf im Mittelteil des Querträgers interessiert, darf mit dem vereinfachten Ansatz für die Schnittkraftfunktion, der die Randbedingungen nicht streng erfüllt, gerechnet werden (in Abschnitt 3.2 soll der

Tabelle 2 (Bezeichnungen siehe Tabelle 1)

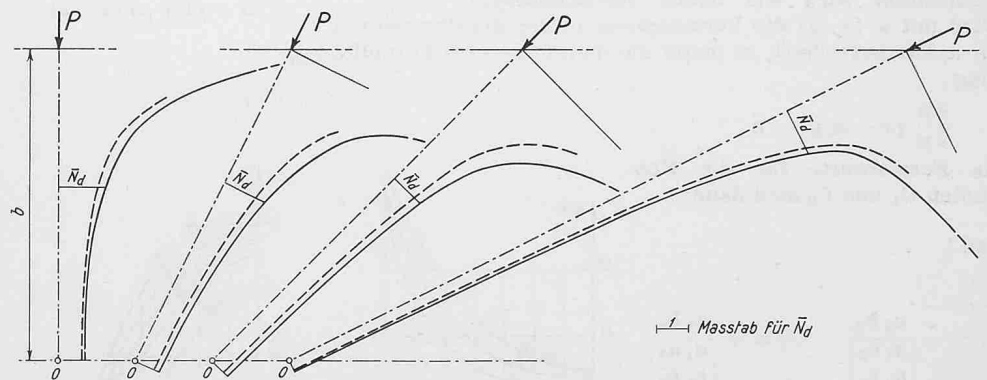
ω°	$\alpha_x = 1, \mu = 0$			$\alpha_x = 3, \mu = 0,45$			$\alpha_x = 3, \mu = 0$		
	N_1	N_2	$\text{tg } \varphi$	N_1	N_2	$\text{tg } \varphi$	N_1	N_2	$\text{tg } \varphi$
100	0,9195	0,2487	∞	0,9085	0,2545	∞	0,8043	0,2872	∞
~ 70	0,8615	0,2915	1,825	0,6924	0,3226	1,817	0,6834	0,3280	1,940
50	0,7072	0,3205	1,032	0,5070	0,3407	1,148	0,5363	0,3342	1,179
~ 30	0,3932	0,2862	0,866	0,3264	0,2707	0,959	0,3470	0,2722	0,941

Figure 1 is a diagram illustrating the stress field in the upper part of a rock mass. The diagram shows a grid of points numbered 6 to 100, with stress values (Druck and Zug) indicated at each point. A dashed line represents the boundary of the rock mass, and a solid line represents the boundary of the rock mass. A vector P is shown at the top right, indicating the direction of the applied stress. The angle ω is approximately 70° .

Bilder 7a bis 7d. Verlauf und Grösse der Hauptschnittkräfte $N_{1,2}$ für den Fall Isotropie. Die Zahlen sind mit P/b zu multiplizieren.

Randstöreinfluss etwas genauer untersucht werden). Unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse gemäss Bild 13 lauten die Ansätze für die Funktion $\Theta(x, y)$

a) Hauptdruckkräfte $N_d = \overline{N}_d \cdot P/b$



b) Hauptzugkräfte $N_z = \overline{N}_z \cdot P/b$

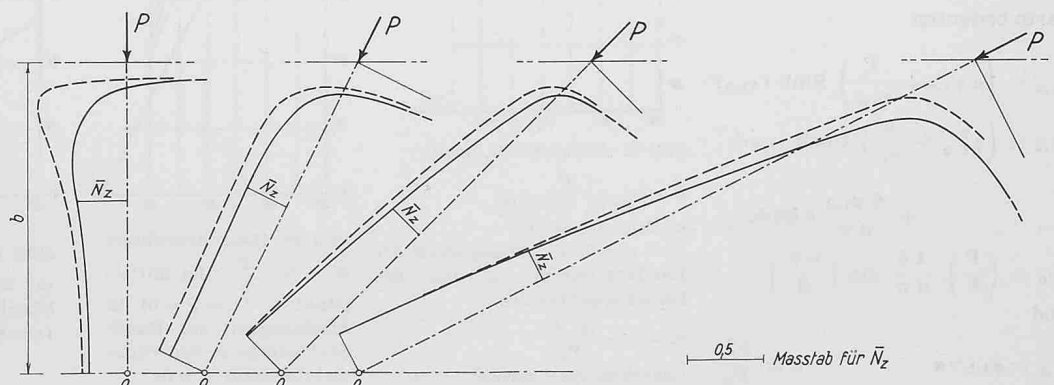


Bild 8 (rechts). Verlauf der Hauptschnittkräfte längs Randkraft-Wirkungslinie für Isotropie und Orthotropie.

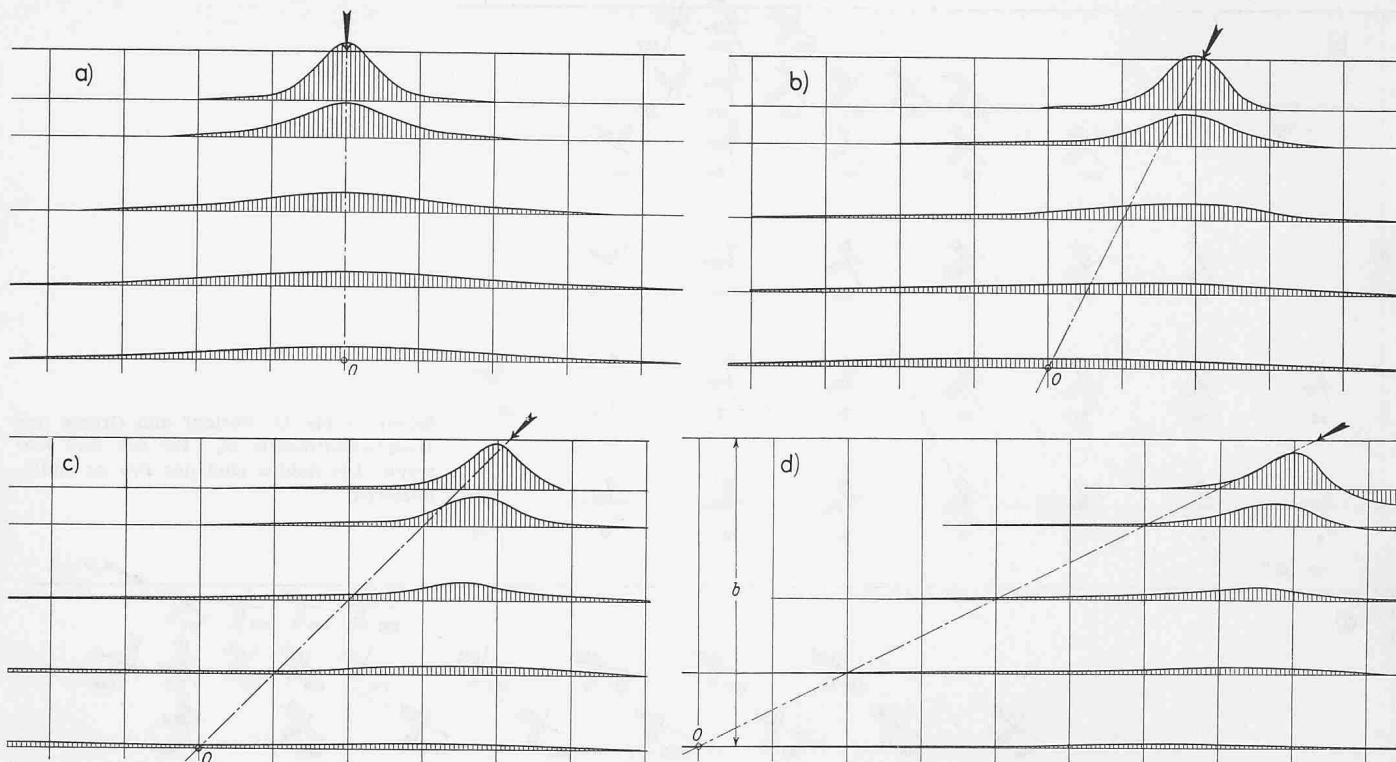


Bild 12. Verlauf der Scheibenschnittkraft N_y in Abhängigkeit der Randkraftschiefe ω ($\alpha_x = 1$, $\mu = 0$).

Fall 1 (Orthotropie)

$$\Theta_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^2 C_i \cosh(\varphi_i \gamma x) \cos(\gamma y) \quad (12)$$

Fall 2 (Isotropie)

$$\Theta_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2} [C_1 \cosh(\gamma x) + C_2 \gamma x \sinh(\gamma x)] \cos(\gamma y) \quad (15)$$

Die Festwerte C_1 und C_2 von (12) bestimmen sich aus den beiden Uebergangsbedingungen Scheibe — Querträger:
a) Längs Querträgerrand stimmt die Scheibendeckung mit der mittleren Querträgerdehnung näherungsweise überein.
b) Infolge Symmetrie bleibt der Querträger gerade (Querkontraktion wird wie üblich vernachlässigt).

Wird mit $u(x, y)$ die Verschiebung in der Scheibe parallel zur x -Achse bezeichnet, so lautet die mathematische Formulierung (16)

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x = a, y) = 0$$

Die Formelwerte für die Konstanten C_1 und C_2 sind dann:

Fall 1

(13)

$$C_1 = - \frac{a_2 b_0}{a_1 a_2} \quad C_2 = + \frac{a_1 b_0}{b_1 b_2}$$

darin bedeuten

$$a_{1,2} = \left(\mu \varphi_{1,2} + \frac{1}{\varphi_{1,2}} \right) \sinh(\varepsilon_{1,2})$$

$$b_{1,2} = \left(\varphi_{1,2}^2 + \frac{\mu}{\alpha_x} \right) \cosh \varepsilon_{1,2} +$$

$$+ \frac{4 \varphi_{1,2}}{n \pi} \delta \sinh \varepsilon_{1,2} \quad (14)$$

$$b_0 = \left(\frac{P}{b} \right) \frac{4 \delta}{n \pi} \sin \left(\frac{n \pi}{2} \right)$$

und

$$\varepsilon_{1,2} = \varphi_{1,2} \gamma a$$

$$\delta = \frac{b h}{F_Q}$$

Fall 2

$$C_1 = \frac{4}{n \pi} \left(\frac{P}{b} \right) \delta \frac{\sin \left(\frac{n \pi}{2} \right)}{\Delta} [(1 - \mu) \sinh \varepsilon - (1 + \mu) \varepsilon \cosh \varepsilon]$$

$$C_2 = \frac{4}{n \pi} \left(\frac{P}{b} \right) \delta \frac{\sin \left(\frac{n \pi}{2} \right)}{\Delta} (1 + \mu) \sinh \varepsilon$$

mit

$$\Delta = (1 + \mu)(3 - \mu) \frac{\sinh(2 \varepsilon)}{2} + 8 \frac{\delta}{n \pi} \sinh^2 \varepsilon - (1 + \mu)^2 \varepsilon$$

$$\varepsilon = \gamma a$$

$$\delta = \frac{b h}{F_Q}$$

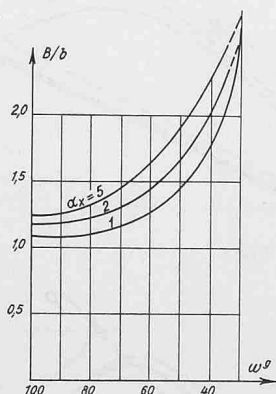


Bild 9. Mitwirkende Breite

$$B = \frac{P}{N_d(x = y = 0)}$$

im Mittelpunkt O ($x = y = 0$) in Abhängigkeit der Randkraftschiefe ω und des Längsrippenfaktors

$$\alpha_x = 1 + \frac{e h}{F_R} \quad (\text{Querkontraktionszahl } \mu = 0).$$

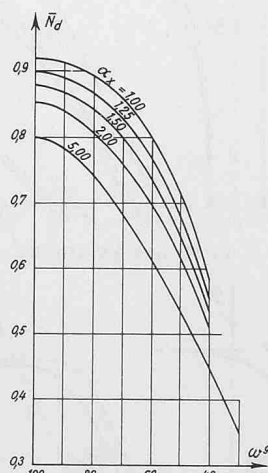


Bild 10. Hauptdruckkraft $N_d = \bar{N}_d \frac{P}{b}$ im Mittelpunkt O ($x = y = 0$) in Abhängigkeit der Randkraftschiefe ω (Querkontraktionszahl $\mu = 0$).

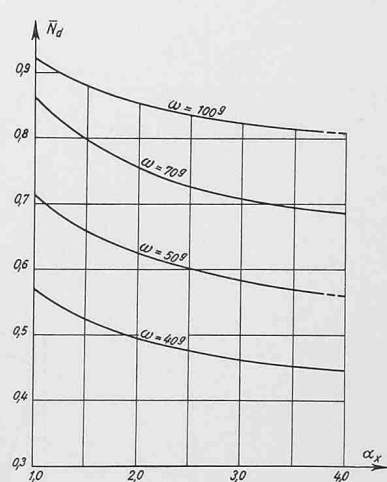


Bild 11. Hauptdruckkraft $N_d = \bar{N}_d \frac{P}{b}$ im Mittelpunkt O ($x = y = 0$) in Abhängigkeit des Längsrippenfaktors α_x ($\mu = 0$).

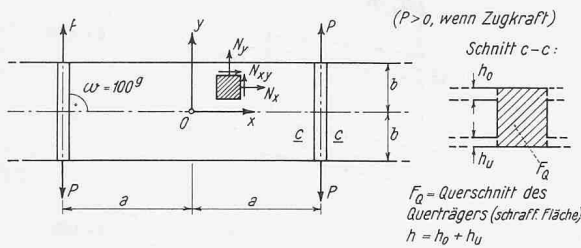


Bild 13

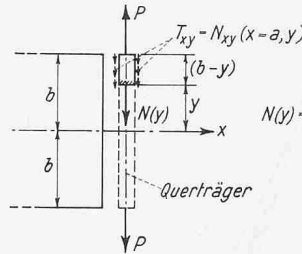


Bild 14

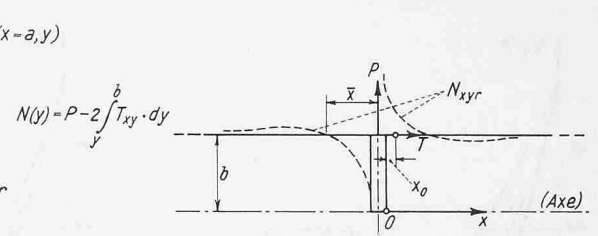


Bild 15

Aus (5), (12), (13), (14), (15) und (16) lassen sich nun die Funktionen $\Theta_1(x, y)$ und $\Theta_2(x, y)$ eindeutig berechnen. Damit sind auch die Scheibenschnittkräfte als zweite Ableitungen von $\Theta(x, y)$ bestimmt.

Für die Normalkraft im Querträger gilt (Bild 14):

$$(17) \quad \begin{aligned} \text{Fall 1} \quad N_1(y) &= P - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \left[\sum_{i=1}^2 C_i \varphi_i \sinh \varepsilon_i \cos(\gamma y) \right] \\ \text{Fall 2} \quad N_2(y) &= P - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} [C_1 \sinh(\gamma a) + C_2 \gamma a \cosh(\gamma a)] \cos(\gamma y) \end{aligned}$$

3.2 Einfluss der nicht verschwindenden Randschubkräfte auf die Querträgernormalkraft $N(y)$

Die durch den vereinfachten Ansatz (12) am Scheibrand verbleibenden Randschubkräfte bilden an jedem Rand eine Gleichgewichtsgruppe. Es kann deshalb der Störeinfluss nur in der Randzone von Bedeutung sein. Es sollen im folgenden die Verhältnisse für den ungünstigsten Fall eines einzigen Querträgers untersucht werden. Da die Orthotropie auf die Randstörung praktisch keinen Einfluss hat, beschränken wir uns auf den Fall 2 (Isotropie). Die Randschubkraft lautet dann (Bild 15):

$$(18) \quad N_{xyr} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ [C_n - D_n] + \gamma_n x D_n \right\} e^{-\gamma_n x}$$

darin bedeuten

$$(19) \quad \begin{aligned} C_n &= -\frac{(1-\mu)4\delta}{(1+\mu)n\pi\Delta} \left(\frac{P}{l} \right) & \gamma_n &= \frac{n\pi}{2b} \\ D_n &= \frac{4\delta}{n\pi\Delta} \left(\frac{P}{b} \right) \\ \Delta_{(n)} &= -\left\{ 3 + \frac{8\delta}{n\pi} - \mu \left(1 + \frac{4\delta}{n\pi} \right) \right\} & \delta &= \frac{bh}{F_0} \end{aligned}$$

Mit (18) und (19) ergibt sich für die Resultierende der Randschubkräfte rechts vom Querträger

$$(20) \quad T = \int_0^{\infty} N_{xyr} dx = \frac{8(1-\mu)\delta P}{\pi^2(1+\mu)} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \left\{ 3 + \frac{8\delta}{n\pi} - \mu \left(1 + \frac{4\delta}{n\pi} \right) \right\}}$$

daraus folgt als oberer Schrankenwert für die Resultierende T

$$(21) \quad T \leq \frac{8(1-\mu)\delta P}{3\pi^2(1+\mu)} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{(1-\mu)\delta}{(1+\mu)3} P$$

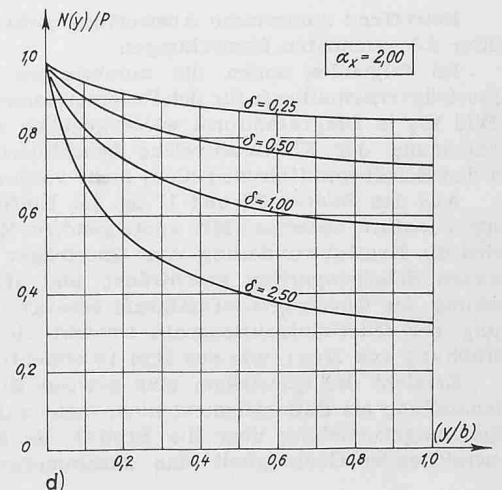
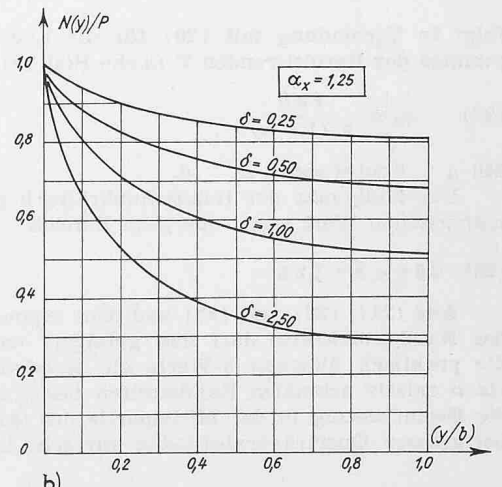
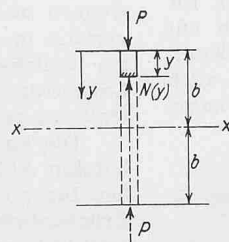
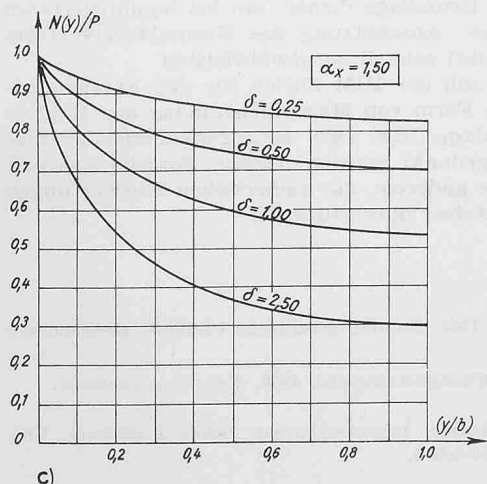
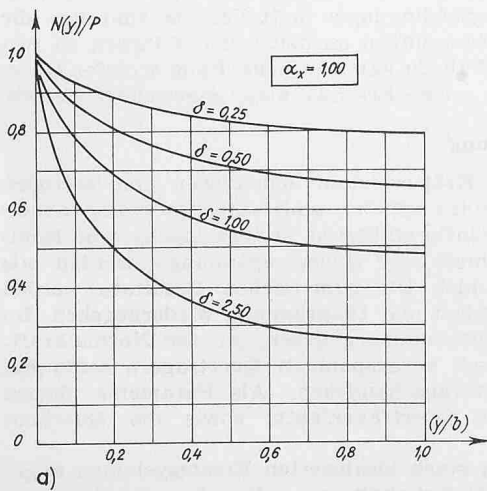


Bild 16. Verlauf der Querträgernormalkraft $N(y)$ längs Querträgerachse in Abhängigkeit von Querträgerfaktor δ und Längsrippenfaktor α_x .

$$\delta = \frac{bh}{F_0} \quad \alpha = 1 + \frac{F_R}{e h}$$

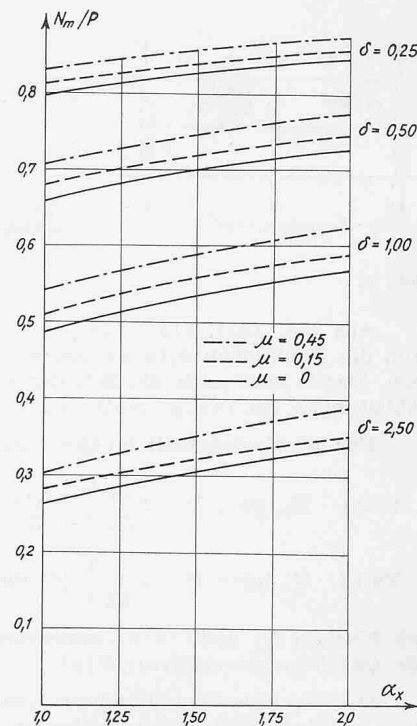
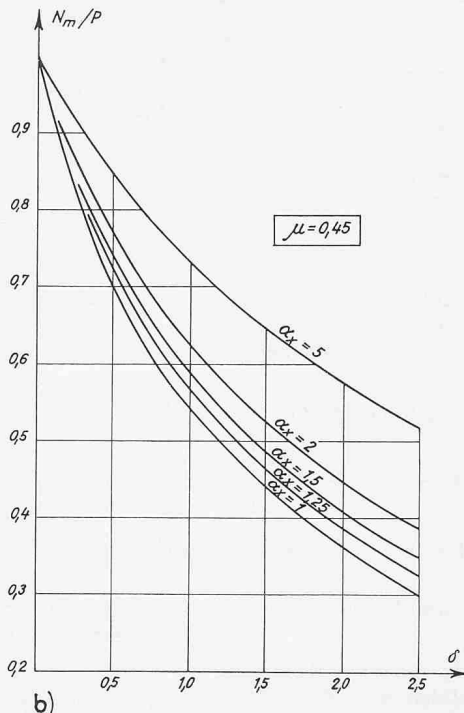
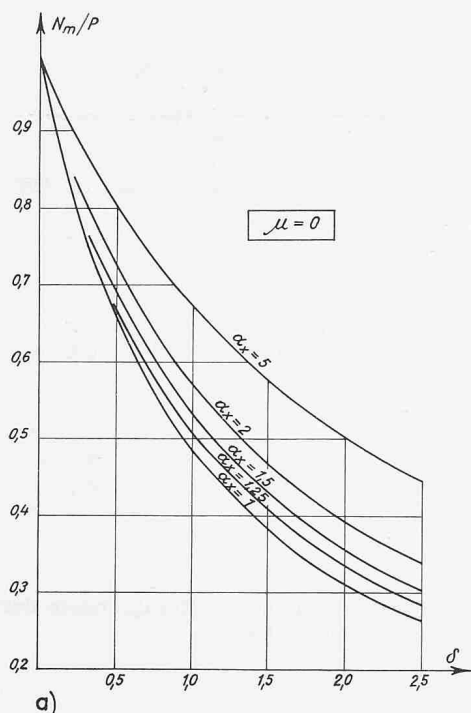


Bild 17. Einfluss der Querkontraktionszahl μ auf die Querträgernormalkraft N_m in Streifenmitte ($y = b$).

Bild 18. Einfluss des Längsrippenfaktors α_x auf die Querträgernormalkraft N_m in Streifenmitte ($y = b$).

Ausdruck (21) stimmt für kleine μ und δ mit dem genauen Wert (20) praktisch überein.

Mit
$$\int_0^\infty x N_{xy} dx = \frac{32 \delta b \mu P}{\pi^3 (1 + \mu)} \sum_{n=1,3,\dots}^\infty \frac{1}{\Delta(n)}$$

folgt in Verbindung mit (20) für die Lage des Angriffspunktes der Resultierenden T (siehe Bild 15)

(22)
$$x_0 = \frac{4 \mu b}{\pi (1 - \mu)}$$

Mit $\mu = 0$ wird somit $x_0 = 0$.

Der Nullpunkt der Randschubkräfte liegt je nach dem numerischen Wert von δ und μ im Bereich

(23)
$$0,6 b < \bar{x} < 1,2 b$$

Aus (21), (22) und (23) und dem exponentiellen Abfall der Randschubkräfte darf nun gefolgert werden, dass für die praktisch üblichen δ -Werte die Randstörung sich auf einen relativ schmalen Randstreifen beschränkt und somit die Beeinflussung in der Mittelpartie des Querträgers auch bei grossen Querträgerabständen nur sehr klein sein kann.

3.3 Numerische Auswertung und Schlussfolgerungen

Betreffend numerische Auswertung gelten auch hier die unter 2.3 gemachten Bemerkungen.

Im folgenden sollen die numerischen Resultate der Querträgernormalkraft für den Parameterwert $v = b/a = 0,4$ (Bild 13) in Diagrammform wiedergegeben werden (Überschneidung der Einflussbereiche benachbarter Randkräfte in den Scheibenmitten nicht mehr vorhanden).

Aus den Bildern 16 und 17 ist der Einfluss der Längsrippen sofort ablesbar. Mit ansteigendem Rippenfaktor α_x wird die Kraftabwanderung vom Querträger in die angrenzenden Scheibenpartien geschwächt und damit eine Erhöhung der Querträgernormalkraft erzeugt. Die Vergrößerung der Querkontraktionszahl bewirkt eine geringfügige Erhöhung von $N(y)$, wie aus Bild 18 ersichtlich ist.

Erreicht der Querträger eine gewisse Breite, so ist die Behandlung als Balkenelement nicht mehr zulässig (variable Spannungsverteilung über die Breite). Es kann dann mit ausreichender Genauigkeit das zusammengesetzte System

Scheibe-Querträger als Scheibe veränderlicher Stärke betrachtet werden (entsprechende Ausrundung im Übergangsbereich). Damit gilt die Gleichung (3) im ganzen Gebiet. Die Programmierung gestaltet sich dann insofern einfach, als im ganzen Bereich (exklusive Rand) nur ein Operator zu bestimmen ist. Die die Programmierung sehr erschwernenden Übergangsbedingungen entfallen, es sind nur die statischen Randbedingungen an den freien Rändern zu formulieren. Diese Methode kann auch im Falle schiefer Querträger ohne allzu grosse Erschwernisse angewendet werden.

4. Zusammenfassung

Es wird das Kräftespiel in orthotropen und isotropen Plattenstreifen infolge schiefer, zentrischer Quervorspannung untersucht. Die Einflussfaktoren «Längsrippen» von Hohlkasten» und «Schiefe der Quervorspannung» werden als Parameter verwendet. Die numerischen Resultate werden in Form von Tabellen und Diagrammen wiedergegeben. Im weiteren werden Diagramme gegeben, die den Normalkraftverlauf in zentrisch vorgespannten Querträgern senkrecht zur Brückenaxe veranschaulichen. Als Parameter dienen Längsträgerfaktor, Querträgerfaktor sowie die Querkontraktionszahl.

Die an diesen stark idealisierten Ersatzsystemen abgeleiteten Abhängigkeitsverhältnisse sollen dem konstruierenden Ingenieur als Grundlage dienen, um bei komplizierteren Brückentafeln eine Abschätzung des Normalkraftverlaufs (mitwirkende Breite) schnell zu gewährleisten.

Zum Schluss soll der IBM Zürich für den Forschungskredit, der uns in Form von Maschinenstunden der elektronischen Rechenanlage IBM 1620 entgegenkommenderweise gewährt wurde, gedankt werden. Dieser Forschungskredit erlaubte uns unter anderem, die numerischen Auswertungen der vorliegenden Arbeit durchzuführen.

Literaturangaben

- [1] Beton-Kalender 1964, Kapitel «Elastische Platten», insbesondere Abschnitt III.
- [2] K. Girkmann: Flächentragwerke, 1956, Kapitel «Scheiben».

Adresse der Verfasser: Ingenieurbureau Sutter & Gaszner, Universitätsstrasse 45, Zürich 6.