

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 82 (1964)  
**Heft:** 19

**Artikel:** Knicken von Trapezrahmen mit Seitenöffnungen  
**Autor:** Schibler, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-67488>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Knicken von Trapezrahmen mit Seitenöffnungen

DK 624.072.33

Von Dr. W. Schibler, Pully-Lausanne

### A. Einleitung

Ein im Brückenbau ziemlich oft angewendetes statisches System ist der Zweigelenk-Trapezrahmen mit biegesteif verbundenen Seitenöffnungen, den man auch als Sprengwerk mit steif angeschlossenen Stielen betrachten kann. Es soll hier das reine Knicken eines solchen symmetrischen Tragwerkes in seiner Ebene untersucht werden. Die Kenntnis der Knicklast dient nicht nur der Beurteilung der Knicksicherheit, sondern auch der Abschätzung der Zunahme der Beanspruchungen infolge der Formänderungen [1].

### B. Knickbedingung

Wir betrachten das in der Ausgangslage momentenfrei durch zwei Einzellasten  $P$  beanspruchte Tragwerk (Bild 1) mit dem Horizontalschub

$$(1) \quad H = P \frac{a}{h}.$$

Die Normalkräfte betragen  $H$  im mittleren Riegel, Null in den Seitenfeldern, und

$$(2) \quad S = P \frac{s}{h} = H \frac{s}{a}$$

in den beiden Stielen. Die Biegesteifigkeiten  $EJ_1$ ,  $EJ_2$ ,  $EJ_3$  der einzelnen Stäbe werden als konstant angenommen. Beim Ausknicken verformt sich der Rahmen antimetrisch, wobei der Horizontalschub  $H$  unverändert bleibt. Der Eckpunkt verschiebe sich um  $\xi$  und  $\eta = \xi a/h$  und drehe sich um den

Winkel  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$ . Es entstehen die Eckmomente  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , wobei  $M_2 = M_1 + M_3$ .

Die vertikalen Auflagerkräfte  $P$  ändern sich um  $\pm \Delta P$ . Das Gleichgewicht des ganzen Systems erfordert

$$\Delta P = \frac{2 P \xi}{l} + \frac{M_1 d}{c l}.$$

Es wird

$$M_3 = (P - \Delta P)(a + \xi) - H(h - \eta)$$

oder, bei Vernachlässigung kleiner Glieder zweiter Ordnung,

$$(3) \quad M_3 = P \xi \left(1 - 2 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{h^2}\right) - M_1 \frac{a d}{c l} = P \xi \gamma - M_1 \frac{a d}{c l}$$

mit

$$(4) \quad \gamma = 1 - 2 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{h^2}.$$

Somit ist

$$(5) \quad M_2 = P \xi \gamma + M_1 \left(1 - \frac{a d}{c l}\right) = P \xi \gamma + M_1 \omega$$

mit

$$(6) \quad \omega = 1 - \frac{a d}{c l}.$$

Wir schreiben nun die Werte der Drehwinkel  $\rho$  an. Mit der Abkürzung

$$(7) \quad U = \frac{3 E J_1}{c^2}$$

wird

$$\rho_1 = \frac{M_1 c}{3 E J_1} - \frac{\eta}{c}$$

oder

$$(8) \quad M_1 = U c \rho + U \frac{a}{h} \xi.$$

Da allgemein der Neigungswinkel  $\tau$  eines Stabes der Biegesteifigkeit  $EJ$  und der Länge  $u$ , der durch eine Druckkraft  $K$  und ein Moment  $M$  an einem Ende beansprucht ist (Bild 2), gegeben ist durch

$$\tau = \frac{M}{K u} \left(1 - \frac{\lambda}{\tan \lambda}\right) \quad \lambda = \sqrt{\frac{K u^2}{E J}}$$

erhält man, da der Punkt  $m$  (Bild 1) infolge Antimetrie ein Momentennullpunkt ist,

$$(9) \quad \rho_2 = \frac{\eta}{b} - \frac{M_2 \varphi_2}{H b} = \xi \frac{a}{b h} - \frac{M_2 h}{P a b} \varphi_2$$

mit

$$(10/11) \quad \varphi_2 = 1 - \frac{\lambda_2}{\tan \lambda_2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{H b^2}{E J_2}}$$

sowie

$$(12) \quad \rho_3 = \frac{M_3}{S s} \varphi_3 - \frac{\xi}{h} = \frac{M_3 h}{P s^2} \varphi_3 - \frac{\xi}{h}$$

mit

$$(13/14) \quad \varphi_3 = 1 - \frac{\lambda_3}{\tan \lambda_3} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{S s^2}{E J_3}}.$$

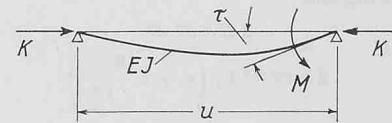
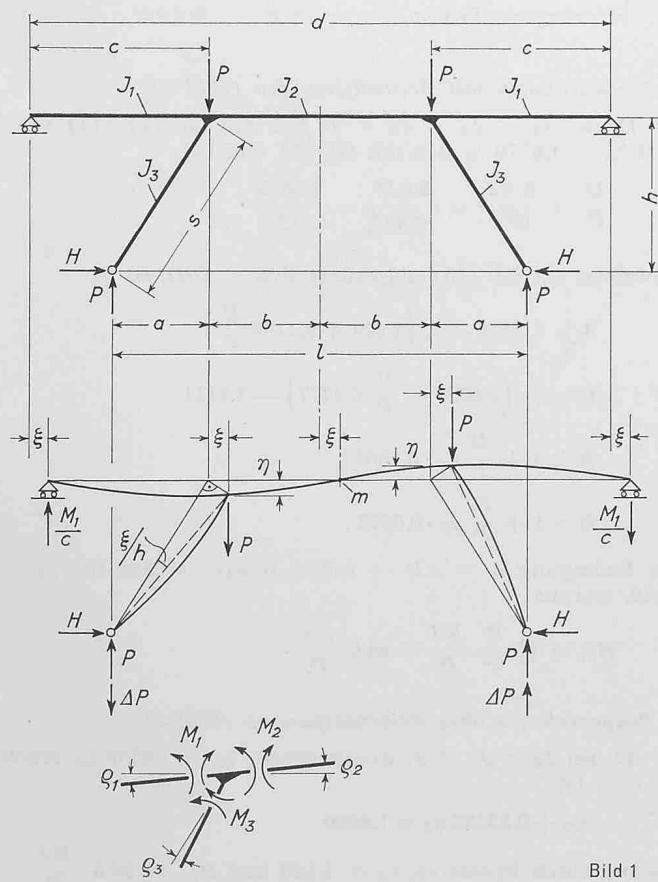


Bild 2

Bild 1



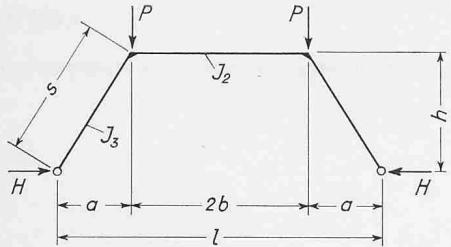


Bild 3

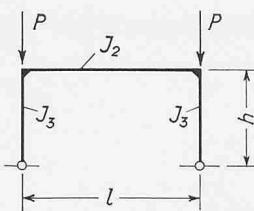


Bild 4

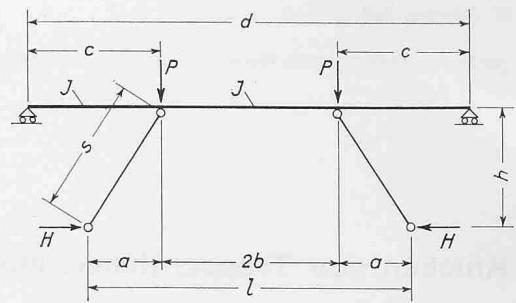


Bild 5

Die Ausdrücke (9) und (12) lassen sich durch Einsetzen von  $M_1 M_2 M_3$  gemäss (8) (5) (3), nach  $\varphi_2$  bzw.  $\varphi_3$  auflösen. Man erhält auf diese Weise mit  $\varphi_2 = \varphi_3$  die Gleichung

$$(15) \quad \frac{\frac{a}{h} - \varphi_2 \left( \gamma \frac{h}{a} + \frac{U}{P} \omega \right)}{1 + \frac{U}{P} \omega \frac{c h}{a b} \varphi_2} = \frac{\varphi_3 \left( \gamma \frac{b h}{s^2} - \frac{U}{P} \frac{a^2 b d}{c l s^2} \right) - \frac{b}{h}}{1 + \frac{U}{P} \frac{a d h}{l s^2} \varphi_3}$$

Gl. (15) muss für das Gleichgewicht des leicht ausgebogenen Tragwerkes erfüllt sein und ist somit die gesuchte Knickbedingung. Durch Probieren ergibt sich der Wert  $H = H_{kr}$  oder  $P = P_{kr}$ . Ueberschreiten im Rahmen die Druckspannungen infolge der Normalkräfte die Proportionalitätsgrenze, so ist  $E$  in den Gl. (11) und (14) — jedoch nicht in Gl. (7) — durch den Knickmodul  $T$  zu ersetzen.

#### C. Sonderfälle

##### 1. Trapezrahmen

Mit  $J_1 = 0$  erhält man den Fall des Trapezrahmens mit sehr weichen Seitenöffnungen oder, was hier das Gleiche ist, den alleinstehenden Trapezrahmen (Bild 3). Mit  $U = 0$  wird Gl. (15)

$$\frac{a}{h} - \varphi_2 \gamma \frac{h}{a} = \varphi_3 \gamma \frac{b h}{s^2} - \frac{b}{h}$$

oder

$$(16) \quad \varphi_2 + \varphi_3 \frac{a b}{s^2} = \frac{a l}{2 \gamma h^2}.$$

Diese Gleichung stimmt mit dem Ergebnis der Stabilitäts-theorie freier Rahmen überein [2].

Für den Unterfall des Rechteckrahmens (Bild 4) ist

$$a = 0, \quad b = l/2, \quad s = h, \quad \gamma = 1, \\ s = P, \quad H = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \frac{\varphi_2}{\lambda_2^2} = 1/3.$$

Nach Umformung ergibt sich die bekannte Knickbedingung

$$(17) \quad \lambda_3 \operatorname{tg} \lambda_3 = \frac{6 E J_2 h}{E J_3 l}$$

wobei nun  $\lambda_3 = \sqrt{\frac{P h^2}{E J_3}}$ .

##### 2. Sprengwerk

Diesen Fall (Bild 5) erhält man, wenn  $s = \frac{\pi^2 E J_3}{s^2}$

oder  $\lambda_3 = \pi$ . Mit  $\varphi_3 = \infty$ ,  $J_1 = J_2 = J$  wird Gl. (15)

$$\frac{\frac{a}{h} - \varphi_2 \left( \gamma \frac{h}{a} + \frac{U}{P} \omega \right)}{1 + \frac{U}{P} \omega \frac{c h}{a b} \varphi_2} = \frac{\gamma b h - \frac{U}{P} \frac{a^2 b d}{c l}}{\frac{U}{P} \frac{a d h}{l}}.$$

Mit  $U/P = 3 E J a / H h c^2$  erhält man nach Umformung die Knickbedingung

$$(18) \quad H = \frac{3 E J a^3 d^2}{2 b c^2 h^2 l \gamma \left( c + b \frac{3 \varphi_2}{\lambda_2^2} \right)}.$$

Mit der geometrischen Beziehung

$$h^2 l \gamma = 2 b s^2 + 2 a^3$$

wird auch

$$H = \frac{3 E J d^2}{4 c^2 b \left( \frac{b s^2}{a^3} + 1 \right) \left( c + b \frac{3 \varphi_2}{\lambda_2^2} \right)}.$$

Dieses Ergebnis wurde bereits angegeben [3].

#### D. Zahlenbeispiel

Die Berechnung der Knicklast soll für das Tragwerk mit den Abmessungen nach Bild 6 gezeigt werden. Es ist  $a = 12 \text{ m}$ ,  $b = 10 \text{ m}$ ,  $c = 16 \text{ m}$ ,  $d = 52 \text{ m}$ ,  $h = 9 \text{ m}$ ,  $s = 15 \text{ m}$ ,  $l = 44 \text{ m}$ . Nach Gl. (4) und (6) wird  $\gamma = 2,2323$  und  $\omega = 0,11364$ .

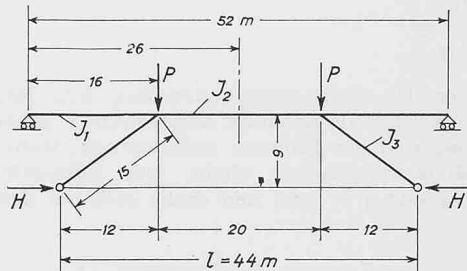


Bild 6

##### 1. Trapezrahmen mit Seitenöffnungen (Bild 1)

Es sei  $J_1 = J_2 = J_3 = J$ . Mit den Gl. (2) (11) (14) wird  $\lambda_3 = 1,6770 \lambda_2$  und mit Gl. (1) und (7)

$$\frac{U}{P} = \frac{3 E J}{c^2 P} = \frac{3 a b^2}{c^2 h \lambda_2^2} = \frac{1,5625}{\lambda_2^2}.$$

Schreiben wir Gl. (15) abgekürzt  $A/B = C/D$ , so ist

$$A = 1,3333 - \varphi_2 \left( 1,674 + 0,1136 \frac{U}{P} \right)$$

$$C = \varphi_3 \left( 0,8929 - \frac{U}{P} 0,4727 \right) - 1,1111$$

$$B = 1 + \frac{U}{P} \varphi_2 \cdot 0,1364$$

$$D = 1 + \frac{U}{P} \varphi_3 \cdot 0,5673.$$

Die Bedingung  $\Delta = AD - BC = 0$  wird erfüllt für  $\lambda_2 = 1,342$ , woraus

$$H_{kr} = \lambda_2^2 \frac{l^2}{b^2} \frac{E J}{l^2} = 34,9 \frac{E J}{l^2}.$$

##### 2. Trapezrahmen ohne Seitenöffnungen (Bild 3)

Es sei  $J_2 = J_3 = J$ , womit wieder  $\lambda_3 = 1,6770 \lambda_2$ . Nach Gl. (16) ist

$$\varphi_2 + 0,53333 \varphi_3 = 1,4600$$

woraus durch Probieren  $\lambda_2 = 1,166$  und  $H_{kr} = 26,3 \frac{E J}{l^2}$ .

### 3. Sprengwerk (Bild 5)

Nach Gl. (18) ist

$$H_{kr} = EJ \frac{3 \cdot 1728 \cdot 2704}{2 \cdot 10 \cdot 256 \cdot 81 \cdot 44 \cdot 2,2323 \left( 16 + 10 \frac{3 \varphi_2}{\lambda^2} \right)}$$

woraus durch Probieren  $\lambda_2 = 1,1296$  oder  $H_{kr} = 24,7 \frac{EJ}{l^2}$ .

Adresse des Verfassers: Dr. W. Schibler, Ing., Pully/Lausanne, 1a chemin des Combes.

### Literatur

- [1] F. Stüssi: Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis, SBZ Bd. 106 (1935), Nr. 11 und 12, S. 119 u. 132.
- [2] R. v. Mises und Ratzersdorfer, vgl. z. B. Stahlbau-Kalender 1940, S. 109.
- [3] W. Schibler: Provisorische Stahlbrücke über die Lienne, SBZ 1955, Nr. 45, S. 707.

## Was ist die Temperatur eines Gases?

Von Dr. Heinrich Brandenberger, Zürich

Die im Titel gestellte Frage lässt sich mit den bisherigen Anschauungen nicht beantworten. Man kann wohl die Temperatur eines Gases mit Hilfe eines Thermometers messen; aber wo sie enthalten ist, weiß man nicht. Man kennt weiter den atomaren Aufbau eines Körpers und weiß, dass die kleinsten Teilchen zu Molekülen zusammengeschlossen sind und aus elektrisch positiv geladenen Protonen, elektrisch neutralen Neutronen und negativen geladenen Elektronen bestehen, aber diese weisen an und für sich keine Temperaturen auf. Man kennt die elektrische Ladung der Elektronen und Protonen ( $e = 4,81 \cdot 10^{-10}$  elektrostatische Einheiten), ferner die Masse des Protons und des Neutrons ( $m_p = m_n = 1,6723 \cdot 10^{-24}$  g), wie auch die Masse des Elektrons ( $m_e = 9,1083 \cdot 10^{-28}$  g, diese ist also 1840 mal kleiner als die Masse eines Protons). Aber auch diese Kenntnisse beantworten nicht die Frage nach dem Wesen der Temperatur.

Bei der Temperaturskala nach Celsius hat man festgelegt, dass  $0^\circ$  die Temperatur des schmelzenden Eises ( $H_2O$ ) und  $100^\circ$  die Verdampfungstemperatur des Wassers bei 760 mm Quecksilbersäule ( $= 10332 \text{ kg/m}^2$ ) sein sollen, womit sich der absolute Nullpunkt der Temperatur zu  $-273,15^\circ C$  ergibt. Bei festen und flüssigen Körpern macht man sich die Vorstellung, dass die Moleküle um Gleichgewichtslagen schwingen, und man sieht in der Brownschen Bewegung eine experimentelle Bestätigung. Man weiß ferner, dass alle Gase bei  $0^\circ C$  und 760 mm QS Mengen mit dem jeweiligen Molekulargewicht  $M$  in kg das gleiche Volumen (das Molvolumen  $22,4 \text{ m}^3$ ) aufweisen, und weiter die Anzahl der Moleküle dabei für alle Gase gleich der Loschmidtschen Zahl  $N = 6,0236 \cdot 10^{26}$  ist. Ein gleicher Druck bei gleicher Temperatur kann bei allen Gasen nur dadurch entstehen, dass alle Gasmoleküle gleiche Bewegungsenergie  $m \cdot c^2/2$  besitzen, woraus sich für ein Gas die jeweilige mittlere Geschwindigkeit der Moleküle berechnen lässt.

Man weiß ferner, dass der Gasdruck  $p$ , die absolute Temperatur  $T$  und das Volumen  $v$  einer Gasmenge in der Beziehung zueinanderstehen  $p \cdot v = R \cdot T$ , mit  $R$  als Konstante. Bei gleichbleibenden Volumen  $v$  steigt also mit der Temperatur  $T$  der Druck  $p$  im linearen Verhältnis. Um ein gewisses Gasvolumen  $v$  zu erwärmen, das heißt die Temperatur  $T$  des Gases zu erhöhen, braucht es eine gewisse Wärmemenge  $Q$ , und man spricht bei Beibehaltung des Volumens für das Molgewicht von einer spezifischen Wärme  $C_v$ . Man weiß auch, dass Wärme aus Arbeit erzeugbar ist und umgekehrt Wärme in Arbeit umgewandelt werden kann, und man kennt das Wärmeäquivalent mit  $1 \text{ kcal} = 427 \text{ mkg}$ .

Wenn man nun ein Molgewicht eines Gases mit der spezifischen Wärme  $C_v$  bei gleichbleibendem Volumen erwärmt, so nimmt die Temperatur um  $1^\circ$  zu. Der Gasdruck steigt entsprechend der Gleichung  $p \cdot v = R \cdot T$ ; daraus lässt sich die Zunahme der kinetischen Energie der Gasteilchen aus der Erhöhung des Druckes berechnen. Diese Berechnung zeigt nun, dass die hierbei zugeführte Wärmemenge  $C_v$  bedeutend größer ist, als die Zunahme der kinetischen Energie der Gasteilchen gemäß  $m \cdot c^2/2$ . Wo steckt dieser zusätzliche Energiewert?

Die Beantwortung dieser Frage ergibt sich daraus, dass ein Molekül nicht nur aus Atomkernen (Alphateilchen) und Elektronen (Betaeilchen) aufgebaut ist, sondern, wie die Uranspaltung zeigt, auch «Gammateilchen» hinzukommen,

DK 533.7

das sind unmagnetische und unelektrische Strahlungsteilchen. Sie umgeben die Moleküle als Wolken. Ihre Bewegungsenergie stellt den fehlenden Teil des Wärmeinhaltes des Körpers und die Größe ihrer Bewegung die Temperatur dar. Diese Teilchen werden von den um die Atomkerne rotierenden Elektronen als Wärme- und Lichtstrahlen emittiert. Je höher die Temperatur eines Körpers ist, um so größer ist auch der Bewegungszustand der Strahlungsteilchen um die Moleküle, in um so stärkerem Maße kommen sie in die Bahnen der Elektronen, und um so größer wird die Wärmestrahlung. Wie die Berechnung zeigt, werden sie erst bei einem Abstand von  $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  bei einer Menge von  $10^3$  von einer Sehlochöffnung von  $0,1 \text{ cm}^2$  als Licht gesehen. Sie sind auch die Ursache des elektrischen Widerstandes. Wenn nämlich Elektronen durch einen Leiter hindurchgehen, stellen sie sich diesen in den Weg. Dabei werden sie von den Elektronen in größere Bewegung versetzt, wodurch Joulesche Wärme entsteht. Damit ist auch erklärt, warum der elektrische Widerstand mit steigender Temperatur steigt, und warum nahe dem absoluten Nullpunkt eine Supraleitfähigkeit auftritt. Bei dieser Temperatur führen nämlich die Strahlungsteilchen keine Bewegung mehr aus, sondern legen sich infolge der Anziehungskraft der Massen eng an die Atomkerne an, weshalb sie nicht mehr in den Weg der Elektronen kommen.

Die Strahlungsteilchen, welche die Moleküle als Wolke umgeben, sind auch die Ursache der Aggregatzustände fest, flüssig und gasförmig. Unterhalb der Schmelztemperatur eines Körpers ist die Bewegung der Strahlungsteilchen, welche die Moleküle als Wolke umgeben, so klein, dass sie den festen Zusammenhang der Körpermoleküle nicht zu trennen vermögen. Beim Erreichen der Schmelztemperatur steigt die Bewegung der Strahlungsteilchen so stark, dass sie den Zusammenhang der Moleküle zerreißen und die Moleküle sich gegenseitig frei bewegen. Sie stoßen sich schwimmend gleichwohl gegenseitig ab, wodurch die beobachtete Brownsche Bewegung erklärt ist. Bei der Verdampfungstemperatur erreicht die Bewegung der Strahlungsteilchen eine derartige Größe, dass die Moleküle aus der Flüssigkeit austreten und sich in den Raum hinausbewegen, wobei natürlich die Verdampfungstemperatur und der auf der Flüssigkeit lastende Druck voneinander abhängen.

Dass bei steigender Temperatur eines Gases die Moleküle schnellere Bewegungen ausführen und dadurch ein höherer Gasdruck entsteht, kann somit dadurch erklärt werden, dass zunächst die Strahlungsteilchen bei höherer Temperatur eine größere Bewegung ausführen, und da sie die Moleküle als Wolke umgeben, sie auch die Moleküle stärker voneinander abstoßen.

Aus der Differenz der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen und der Wärmemenge, welche notwendig ist, um den Molekülen die für den höheren Druck notwendige Bewegungsenergie zu geben, ergibt sich der Wärmeanteil, der bei der Erhöhung der Temperatur eines Gases für die größere Bewegung der Strahlungsteilchen aufgebracht werden muss. Gehen wir vom Molvolumen von  $22,4 \text{ m}^3$  aus, das jedes Gas bei  $0^\circ C$  und 760 mm QS einnimmt, so erhalten wir bei der Form eines Würfels eine Seitenlänge von

$a = \sqrt[3]{22,4} \text{ m}$ . Die Anzahl der Moleküle ist dabei für alle Gase dieselbe, nämlich  $N = 6,0236 \cdot 10^{26}$ . Bezeichnet  $m$  die Masse