

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	82 (1964)
Heft:	16
Artikel:	Zur Statik schief gelagerter Träger: erweiterte Fassung eines Vortrages
Autor:	Basler, Konrad
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-67480

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Statik schief gelagerter Träger

DK 624.074.11

Von Dr. Konrad Basler, Egg bei Zürich

Erweiterte Fassung des Vortrages, gehalten am 8. November 1963 vor der S. I. A.-Fachgruppe für Brückenbau und Hochbau (FGBH) im Auditorium maximum der ETH in Zürich

Vorwort

Bei zunehmendem Verkehr und dichterer Besiedlung wird zur niveaufreien Kreuzung von Verkehrswegen die Brücke mit schiefer Lagerung die Regel darstellen. Der wesentliche Unterschied zwischen rechtwinkliger und schiefen Lagerung liegt darin, dass bei der letztgenannten selbst unter zentrischer Lastanordnung eine Torsionsbeanspruchung erzeugt wird.

Dass dadurch die Berechnung schief gelagerter Durchlaufträger schwieriger wird, ist schon daraus ersichtlich, dass sich der Grad der statischen Unbestimmtheit durch Schiefstellung der Lager auf mehr als das Doppelte erhöht: eine über drei Felder durchlaufende normale Brücke ist zweifach statisch unbestimmt gelagert. Werden ihre acht Lagerkörper aber schief zur Stabaxe angeordnet, so wird sie fünfach statisch unbestimmt, wobei als überzählige Größen z. B. fünf Auflagerreaktionen eingeführt werden können, oder deren drei mit zwei Stützmomenten usw.

Gegenüber allen Veröffentlichungen auf diesem Gebiet¹⁾ unterscheidet sich diese Arbeit dadurch, dass ein Berechnungsverfahren entwickelt wird, das so wenig überzählige Größen in einem dreigliedrigen Gleichungssystem verketten wie der normal gelagerte Stab; ja, dass die Berechnung überhaupt zurückgeführt werden kann auf die dem Bauingenieur geläufigen Dreimomentengleichungen des durchlaufenden Balkens, s. Gl. (12). Die strenge Lösung des Problems gestattet auch die bei Schiefstellung auftretenden Parameter zu erkennen, ihren Einfluss zu diskutieren und Näherungsverfahren zu entwickeln. Da die Berechnung bis zu den Schnittgrößen und ihren Vorzeichen mathematisch formuliert wird, sind damit auch ideale Voraussetzungen zum programmgesteuerten Rechnen geschaffen.

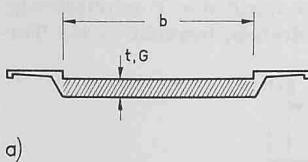
Voraussetzungen und Inhaltsübersicht

Es werden die beiden üblichen Voraussetzungen gemacht, dass erstens die Stabstatik Gültigkeit habe, d. h. die Spannweiten gegenüber den Querschnittsabmessungen gross seien, und zweitens, dass der Wölbkraftanteil zur Aufnahme der Torsion vernachlässigbar klein sei. In Rechnung wird also nur die sog. St. Venantsche Torsionssteifigkeit GK gesetzt,

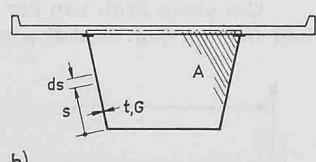
1) Die wichtigsten sind:

F. Wansleben: Beitrag zur Berechnung schiefer, drillsteifer Brücken, «Der Stahlbau», Jg. 24, 1955, S. 224.

H. Homberg und W. R. Marx: Schiefe Stäbe und Platten, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1958.



$$GK = \frac{G}{3} b t^3$$



$$GK = \frac{4 A^2}{\frac{ds}{G t}}$$

Bild 1. Torsionssteifigkeit GK bei Plattenbalken und Hohlquerschnitten

was für Plattenbalken und einzellige Hohlquerschnitte in Bild 1 definiert ist.

Die Berechnung wird für gerade Stäbe mit variablem, aber bezüglich der Vertikalaxe symmetrischem Stabquerschnitt und beliebiger, von Auflager zu Auflager verschiedener Schiefstellung entwickelt. Die zu verwendende Bezeichnungsweise ist dabei wesentlich und wird daher vorangestellt.

Bezeichnungen und Abkürzungen

Am durchlaufenden Balken werden die Felder mit i bezeichnet und in numerischen Berechnungen dafür die geraden Zahlen 2, 4, 6, ... verwendet. Die Auflager seien mit k bezeichnet und werden in numerischen Beispielen mit den ungeraden Zahlen durchnumeriert (Bild 2).

Die Lage des Koordinatensystems geht auch aus dieser Abbildung hervor, ebenso die als positiv definierten Stabdrehwinkel und Torsionsmomente. Eine vom rechten Stabende zurücklaufende Abszisse, z' , wird mit Strich gekennzeichnet. Das selbe gilt für die Abkürzungen $\zeta = z/l$, $\zeta' = z'/l$, welche zur Fixierung der Lage einer Schnittstelle verwendet werden.

Als Bezeichnungen für Auflagerdrehwinkel und Auflagerdrücke am linken Auflager, sowie Entferungen von diesem, sind die Buchstaben a , A bzw. a vorgesehen; die korrespondierenden zum rechten Lager mit β , B bzw. b .

Werden für Einflussgrößen Doppelindizes benötigt, so fixiert der erste seine Lage, der zweite die Ursache. Der Ursachenzeiger o bedeutet immer «infolge äusserer Belastung».

Liste der Abkürzungen

a	Abstand vom linken Auflager
A	Auflagerdruck links am einfachen Balken
b	Abstand vom rechten Auflager
B	Auflagerdruck rechts am einfachen Balken
C	Stabkonstante $\frac{G K}{E I} \frac{\tan^2 \delta}{2}$, mit Indizes: s. Tab. 2
d	Stabbreite
D	Determinante, definiert in Tab. 2
e	Gegenseitige Verschiebung der Lagerkörper

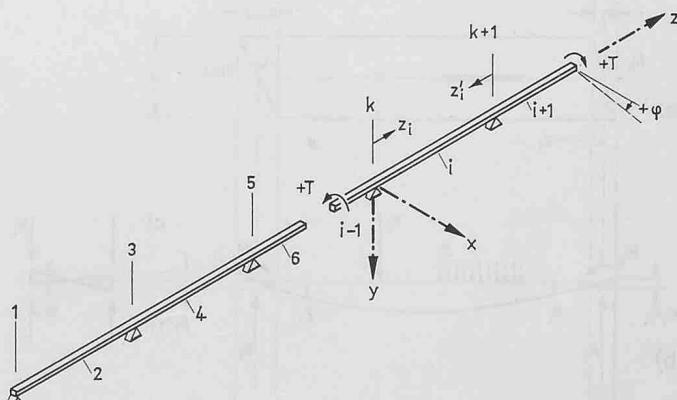


Bild 2. Bezeichnungen der Felder und Lager am Durchlaufträger

<i>E</i>	Elastizitätsmodul
<i>F</i>	Resultierende Auflagerkraft
<i>G</i>	Schubmodul = $E/2(1 + \nu)$
<i>I</i>	Flächenträgheitsmoment (bezügl. der x -Axe)
<i>K</i>	Torsionskonstante (Drillwert), s. Bild 1
<i>l</i>	Spannweite
<i>M</i>	Biegemoment
M_D	Drehmoment bezügl. der Stabaxe
<i>p</i>	Verteilte Belastung
<i>P</i>	Einzellast
<i>Q</i>	Querkraft
<i>T</i>	Torsionsmoment
<i>x</i>	Koordinate (Bild 2), Exzentrizität einer Last
<i>y</i>	Koordinate (Bild 2), lotrechte Durchbiegung
<i>z</i>	Koordinate (Bild 2), Distanz vom linken Auflager
<i>z'</i>	Rückläufige Koordinate, Distanz vom rechten Auflager
α	Auflagerdrehwinkel am linken Auflager, s. Tab. 1
β	Auflagerdrehwinkel am rechten Auflager, s. Tab. 1
γ	Verschiebungsgröße: $\int \frac{dz}{GK}$, s. Tab. 1
δ	Lagerschiefstellung (= Abweichung von rechtwinkliger Lagerung)
ξ	z/l , Normierte Lagekoordinate vom linken Auflager ausgehend
ξ'	z'/l , Normierte Lagekoordinate vom rechten Auflager ausgehend
λ	Verhältnis von Endfeldlänge zu Mittelfeldlänge
ν	Poissonsche Zahl ($1/3$ für Stahl, $1/6$ für Beton)
ξ	x/l , Normierte Lagekoordinate
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung
φ	Stabdrehwinkel

Indizes:

<i>i</i>	Gerade Zahl, den Feldern zugeordnet, s. Bild 2
<i>k</i>	Ungerade Zahl, den Lagern zugeordnet, s. Bild 2
<i>o</i>	«infolge äusserer Belastung»
<i>D</i>	«infolge eines Drehmomentes M_D als äussere Belastung»
(<i>f</i>)	«am Grundsystem des beidseitig fest eingesp. Stabes» (Kopfzeiger)

Torsionsmomente und Nebenwirkungen

Durch Schiefstellung der Lager werden in den Stabfeldern auch unter lotrechter, zentrischer Belastung Torsionsmomente verursacht, die ihrerseits wieder Einfluss auf die Biegemomente haben. Zur Anschrift dieser Verknüpfung

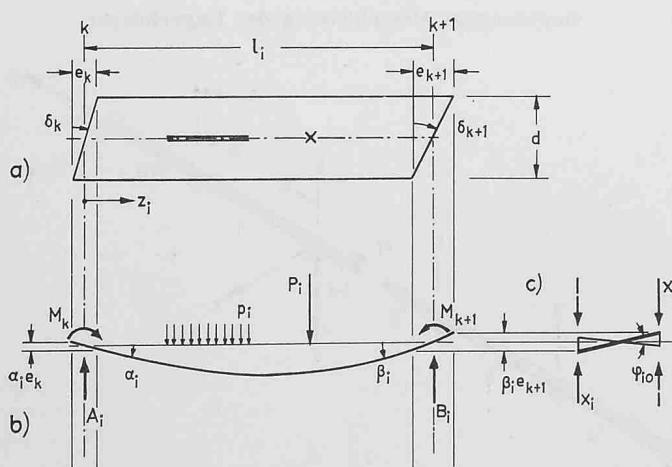


Bild 3. Verkettung von Durchbiegung und Verdrehung

Tabelle 1. Verschiebungsgrößen und Belastungsglieder am einfachen Balken des Feldes *i*

Verschiebungsgröße	bei variablem Querschnitt	prismatischer Stab
$\alpha_{ik} :$	$\frac{1}{l_i^2} \int_0^{l_i} \frac{z' z''}{EI} dz' dz''$	$\frac{l_i}{3EI_i}$
$\alpha_{i,k+1} = \beta_{ik} :$	$\frac{1}{l_i^2} \int_0^{l_i} \frac{z z'}{EI} dz dz'$	$\frac{l_i}{6EI_i}$
$\beta_{i,k+1} :$	$\frac{1}{l_i^2} \int_0^{l_i} \frac{z z}{EI} dz dz'$	$\frac{l_i}{3EI_i}$
$\gamma_i :$	$\int_0^{l_i} \frac{dz}{GK}$	$\frac{l_i}{GK}$
Belastungsglieder für Einzellast <i>P</i>		
$\alpha_{i0} :$	$\frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{M_0 z'}{EI} dz' dz$	$\frac{P l_i^2}{6EI_i} (\xi_i' - \xi_i'^3)$
$\beta_{i0} :$	$\frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{M_0 z}{EI} dz dz'$	$\frac{P l_i^2}{6EI_i} (\xi_i - \xi_i^3)$
Belastungsglieder für verteilte Belastung <i>p</i>		
$\alpha_{i0} :$	$\frac{p}{2l_i} \int_0^{l_i} \frac{z z'^2}{EI} dz' dz$	$\frac{p l_i^3}{24EI_i}$
$\beta_{i0} :$	$\frac{p}{2l_i} \int_0^{l_i} \frac{z' z^2}{EI} dz dz'$	$\frac{p l_i^3}{24EI_i}$

wird das Feld *i*, zwischen den Auflagern *k* und *k* + 1 gelegen, herausgegriffen (Bild 3a).

Der Stab sei sowohl durch äussere Lasten *p* und *P* als auch durch je ein Stützmoment M_k und M_{k+1} belastet, die alle in der Vertikalebene durch die Stabaxe wirken. Vorübergehend denke man sich den Stab auch nur durch zwei Lager unter seiner Axe gestützt. Da keine Ursache zur Verdrehung des Stabes vorliegt, zeigt sich die Ansicht der Neutralenbene wie in Bild 3b skizziert, mit Stabecken, die beim Auflager *k* eine Höhendifferenz von $\alpha_i e_k$, beim Lager *k* + 1 eine solche von $\beta_i e_{k+1}$ aufweisen.

Wie aus der Blickrichtung in Stabaxe ersichtlich ist, Bild 3c, beträgt die erforderliche Stabverdrehung φ_{i0} , um die Ecken auf die Höhe der Lagerkanten zu zwingen:

$$\varphi_{i0} = \left(\frac{\alpha_i e_k}{d} + \frac{\beta_i e_{k+1}}{d} \right)$$

Mit $e_k/d = \tan \delta_k$ und $e_{k+1}/d = \tan \delta_{k+1}$ wird daher die Verträglichkeitsbedingung, die bei schiefen Lagerung horizontale Lagerkanten verlangt:

$$(1) \quad \alpha_i \tan \delta_k + \varphi_i + \beta_i \tan \delta_{k+1} = 0$$

Diese Bedingung muss für jedes Feld des Durchlaufträgers erfüllt sein.

Um einen Stab von der Länge l_i mit der Torsionssteifigkeit GK um den Winkel φ_i zu verdrehen, braucht es ein Tor-

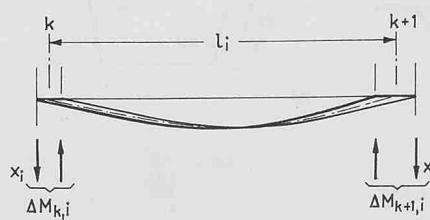


Bild 4. Statisch unbestimmtes Grundsystem

Tabelle 2. Liste der Stabkonstanten C und D

Querschnitt	variabel	EI und GK feldweise konstant	
Schiefstellung der Auflager:	verschieden von Auflager zu Auflager		bei allen Auflagern = δ
$C_{i\alpha k} =$	$\frac{\operatorname{tg} \delta_k (\alpha_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + \alpha_{i k+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1})}{\gamma_i}$	$\frac{G K_i}{EI_i} \frac{\operatorname{tg} \delta_k}{6} (2 \operatorname{tg} \delta_k + \operatorname{tg} \delta_{k+1})$	$= C_i = \frac{G K_i}{EI_i} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{2}$
$C_{i\alpha k+1} =$	$\frac{\operatorname{tg} \delta_{k+1} (\alpha_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + \alpha_{i k+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1})}{\gamma_i}$	$\frac{G K_i}{EI_i} \frac{\operatorname{tg} \delta_{k+1}}{6} (2 \operatorname{tg} \delta_k + \operatorname{tg} \delta_{k+1})$	
$C_{i\beta k} =$	$\frac{\operatorname{tg} \delta_k (\beta_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + \beta_{i k+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1})}{\gamma_i}$	$\frac{G K_i}{EI_i} \frac{\operatorname{tg} \delta_k}{6} (\operatorname{tg} \delta_k + 2 \operatorname{tg} \delta_{k+1})$	
$C_{i\beta k+1} =$	$\frac{\operatorname{tg} \delta_{k+1} (\beta_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + \beta_{i k+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1})}{\gamma_i}$	$\frac{G K_i}{EI_i} \frac{\operatorname{tg} \delta_{k+1}}{6} (\operatorname{tg} \delta_k + 2 \operatorname{tg} \delta_{k+1})$	
$D_i =$	$1 + C_{i\alpha k} + C_{i\beta k+1}$	$1 + \frac{G K_i}{EI_i} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_k + \operatorname{tg} \delta_k \operatorname{tg} \delta_{k+1} + \operatorname{tg}^2 \delta_{k+1}}{3}$	$1 + 2 C_i = 1 + \frac{G K_i}{EI_i} \operatorname{tg}^2 \delta$

sionsmoment von der Grösse $T_i = \varphi_i / \gamma_i$, wobei die Verschiebungsgrösse γ_i in Tabelle 1 definiert ist. Somit folgt aus (1):

$$(2) \quad T_i = -\frac{\alpha_i \operatorname{tg} \delta_k + \beta_i \operatorname{tg} \delta_{k+1}}{\gamma_i}$$

Man kann sich dieses Torsionsmoment durch ein in den Ecken des Lagers k lotrecht wirkendes Kräftepaar X_i aufgebaut denken. Am Stabende $k+1$ wird es wieder durch ein entgegengesetzt drehendes Kräftepaar X_i abgebaut. Dass der Hebelarm der beiden Kräftepaare gleich der Stabbreite d sei, ist eine für die nachfolgende Betrachtung bequeme, aber keinesfalls notwendige Annahme.

Aus der letzten Skizze von Bild 3 ist ersichtlich, dass die Kräfte X_i auch Nebenwirkungen auf die Biegemomente des Stabes haben. Die Änderung im linken Stützmoment beträgt:

$$(3) \quad \Delta M_{ki} = X_i e_k = \frac{T_i}{d} e_k = T_i \operatorname{tg} \delta_k$$

im rechten

$$(4) \quad \Delta M_{k+1 i} = X_i e_{k+1} = \frac{T_i}{d} e_{k+1} = T_i \operatorname{tg} \delta_{k+1}$$

Bei positiven, also nach unten gerichteten, Enddrehwinkeln α_i und β_i , positiven Winkeln δ_k und δ_{k+1} ist T_i stets negativ. Die Änderungen (3) und (4) in den Stützmomenten sind dann auch negativ, was in Bild 4 zum Ausdruck kommt. Wäre die Schiefstellung der Auflager negativ, so würde zwar T_i positiv, aber die Ausdrücke (3) und (4) wiederum negativ, infolge negativer Tangenswerte. Schiefstellung der Auflager wirkt sich daher stets wie eine erhöhte Einspannung des Stabes aus. Die Feldmomente werden auf Kosten der Stützmomente abgebaut.

Auflagerdrehwinkel bei schiefer Lagerung

Beim Anschreiben der Drehwinkel nach dem Superpositionsgegesetz müssen die Zusatzmomente mitberücksichtigt werden:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \alpha_{i0} + M_k \alpha_{ik} + \\ \quad + M_{k+1} \alpha_{i k+1} + \Delta M_{ki} \alpha_{ik} + \Delta M_{k+1 i} \alpha_{i k+1} \\ \beta_i = \beta_{i0} + M_k \beta_{ik} + \\ \quad + M_{k+1} \beta_{i k+1} + \Delta M_{ki} \beta_{ik} + \Delta M_{k+1 i} \beta_{i k+1} \end{array} \right.$$

nach (3) und (4):

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_{i0} + M_k \alpha_{ik} + \\ &\quad + M_{k+1} \alpha_{i k+1} + T_i (\alpha_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + \alpha_{i k+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1}) \\ \beta_i &= \beta_{i0} + M_k \beta_{ik} + \\ &\quad + M_{k+1} \beta_{i k+1} + T_i (\beta_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + \beta_{i k+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1}) \end{aligned}$$

Wird T_i gemäss (2) eingesetzt, so ergibt dies mit den in Tabelle 2 definierten Abkürzungen:

$$\alpha_i = \alpha_{i0} + M_k \alpha_{ik} + M_{k+1} \alpha_{i k+1} - \alpha_i C_{i\alpha k} - \beta_i C_{i\alpha k+1}$$

$$\beta_i = \beta_{i0} + M_k \beta_{ik} + M_{k+1} \beta_{i k+1} - \alpha_i C_{i\beta k} - \beta_i C_{i\beta k+1}$$

oder, geordnet:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i (1 + C_{i\alpha k}) + \beta_i C_{i\alpha k+1} = \\ \quad = \alpha_{i0} + M_k \alpha_{ik} + M_{k+1} \alpha_{i k+1} \\ \alpha_i C_{i\beta k} + \beta_i (1 + C_{i\beta k+1}) = \\ \quad = \beta_{i0} + M_k \beta_{ik} + M_{k+1} \beta_{i k+1} \end{array} \right.$$

Da $C_{i\alpha k} C_{i\beta k+1} = C_{i\beta k} C_{i\alpha k+1}$, lautet die Determinante der Matrixkoeffizienten sehr einfach:

$$D_i = 1 + C_{i\alpha k} + C_{i\beta k+1}$$

Damit sind die Lösungen des Gleichungssystems (6):

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \frac{1}{D_i} \left[M_k (\alpha_{ik} + \alpha_{ik} C_{i\beta k+1} - \beta_{ik} C_{i\alpha k+1}) + \right. \\ \quad \left. + M_{k+1} (\alpha_{i k+1} + \alpha_{i k+1} C_{i\beta k+1} - \beta_{i k+1} C_{i\alpha k+1}) + \right. \\ \quad \left. + \alpha_{i0} + \alpha_{i0} C_{i\beta k+1} - \beta_{i0} C_{i\alpha k+1} \right] \\ \beta_i = \frac{1}{D_i} \left[M_k (\beta_{ik} + \beta_{ik} C_{i\alpha k} - \alpha_{ik} C_{i\beta k}) + \right. \\ \quad \left. + M_{k+1} (\beta_{i k+1} + \beta_{i k+1} C_{i\alpha k} - \alpha_{i k+1} C_{i\beta k}) + \right. \\ \quad \left. + \beta_{i0} + \beta_{i0} C_{i\alpha k} - \alpha_{i0} C_{i\beta k} \right] \end{array} \right.$$

Dreimomentengleichungen

Die bis anhin untersuchten Balkenfelder sind insofern verträglich mit den Auflagerbedingungen, als ihre schiefen Ränder horizontal liegen. Für einen durchlaufenden Träger muss dazu noch Kontinuität in Stablängsrichtung formuliert werden. Diese zweite Verträglichkeitsbedingung verlangt, dass die Summe der Enddrehwinkel bei jedem Auflager verschwindet.

$$(8) \quad \beta_{i-1} + \alpha_i = 0$$

Der Auflagerdrehwinkel α_i ist bereits im ersten Ausdruck von (7) gegeben; β_{i-1} wird aus dem zweiten erhalten durch Reduktion der Indizes i und k um eins. Wie bei den Dreimomentengleichungen des Durchlaufträgers auf frei drehbaren Stützen können die einzelnen Koeffizienten als Faktoren der unbekannten Stützmomente M_{k-1} , M_k und M_{k+1} auftreten, oder aber als «Belastungsglieder» auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens geschlagen werden. In dieser geordneten Anschrift sind nachstehend die Verträglichkeitsbedingungen (8) wiedergegeben; es sind die Dreimomentengleichungen des schief gelagerten durchlaufenden Stabes. Direkt anschliessend sind die vereinfachten Gleichungen auf-

geföhrt für den Fall, dass Biege- und Torsionssteifigkeit feldweise konstant sind (Spezialfall 1), dass dazu noch die Auflagerschiefestellung über den ganzen Durchlaufträger die-

selbe bleibt (Spezialfall 2), und schliesslich, dass für den ganzen Stab sich weder der Querschnitt noch die Lagerschiefestellung ändert (Spezialfall 3).

$$(9) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Allgemeiner Fall} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Stabquerschnitt: variabel, } EI(z), GK(z) \\ \text{Lagerschiefe: verschieden, } \delta_{k-1} \neq \delta_k \neq \delta_{k+1} \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} M_{k-1} (\beta_{i-1 k-1} + \beta_{i-1 k-1} C_{i-1 \alpha k-1} - \alpha_{i-1 k-1} C_{i-1 \beta k-1}) D_i + \\ + M_k [(\beta_{i-1 k} + \beta_{i-1 k} C_{i-1 \alpha k-1} - \alpha_{i-1 k} C_{i-1 \beta k-1}) D_i + \\ + (\alpha_{ik} + \alpha_{ik} C_{i \beta k+1} - \beta_{ik} C_{i \alpha k+1}) D_{i-1}] + \\ + M_{k+1} (\alpha_{ik+1} + \alpha_{ik+1} C_{i \beta k+1} - \beta_{ik+1} C_{i \alpha k+1}) D_{i-1} = \\ = -[(\beta_{i-1 0} + \beta_{i-1 0} C_{i+1 \alpha k-1} - \alpha_{i-1 0} C_{i-1 \beta k-1}) D_i + \\ + (\alpha_{i0} + \alpha_{i0} C_{i \beta k+1} - \beta_{i0} C_{i \alpha k+1}) D_{i-1}] \end{array} \right. \\ \hline \text{Clapeyronische Dreimomentengl.} & \text{Ergänzung infolge Lagerschiefestellung} \end{array} \right.$$

mit: — Verschiebungsgrossen α, β : s. Tab. 1, erste Kolonne
— Stabkonstanten C, D : s. Tab. 2, erste Kolonne

— Indizes k, i : s. Bild 2 $\left(\begin{array}{c} k = 1, 3, 5, \dots \\ i = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right)$

Spezialfall 1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stabquerschnitt: feldweise konstant, } EI_i, GK_i \\ \text{Lagerschiefe: verschieden, } \delta_{k-1} \neq \delta_k \neq \delta_{k+1} \end{array} \right.$

Berechnung wie in (9), jedoch mit den zweiten Kolonnenwerten von Tab. 1 und 2, oder:

$$(10) \quad \left. \begin{array}{l} M_{k-1} \frac{l_{i-1}}{6 EI_{i-1}} \left(1 - \frac{G K_{i-1}}{E I_{i-1}} \frac{\operatorname{tg} \delta_{k-1} \operatorname{tg} \delta_k}{2} \right) D_i + \\ + M_k \left[\frac{l_{i-1}}{6 EI_{i-1}} \left(2 + \frac{G K_{i-1}}{E I_{i-1}} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_{k-1}}{2} \right) D_i + \frac{l_i}{6 EI_i} \left(2 + \frac{G K_i}{E I_i} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_{k+1}}{2} \right) D_{i-1} \right] + \\ + M_{k+1} \frac{l_i}{6 EI_i} \left(1 - \frac{G K_i}{E I_i} \frac{\operatorname{tg} \delta_k \operatorname{tg} \delta_{k+1}}{2} \right) D_{i-1} = \\ = \left[\alpha_{i-1 0} \frac{G K_{i-1}}{EI_{i-1}} \frac{\operatorname{tg} \delta_{k-1} + 2 \operatorname{tg} \delta_k}{6} \operatorname{tg} \delta_{k-1} - \beta_{i-1 0} \left(1 + \frac{G K_{i-1}}{EI_{i-1}} \frac{2 \operatorname{tg} \delta_{k-1} + \operatorname{tg} \delta_k}{6} \operatorname{tg} \delta_{k-1} \right) \right] D_i + \\ + \left[\beta_{i0} \frac{G K_i}{EI_i} \frac{2 \operatorname{tg} \delta_k + \operatorname{tg} \delta_{k+1}}{6} \operatorname{tg} \delta_{k+1} - \alpha_{i0} \left(1 + \frac{G K_i}{EI_i} \frac{\operatorname{tg} \delta_k + 2 \operatorname{tg} \delta_{k+1}}{6} \operatorname{tg} \delta_{k+1} \right) \right] D_{i-1} \end{array} \right.$$

wobei:

$$D_{i-1} = 1 + \frac{G K_{i-1}}{EI_{i-1}} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_{k-1} + \operatorname{tg} \delta_{k-1} \operatorname{tg} \delta_k + \operatorname{tg}^2 \delta_k}{3}$$

$$D_i = 1 + \frac{G K_i}{EI_i} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_k + \operatorname{tg} \delta_k \operatorname{tg} \delta_{k+1} + \operatorname{tg}^2 \delta_{k+1}}{3}$$

mit: $\left(\begin{array}{c} k = 1, 3, 5, \dots \\ i = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right)$

Die Quotienten GK_i/EI_i sind oft unvariant, d. h. unabhängig von der Stabstärke, s. Abschnitt «Die Stabkonstante C». Daher wird

Spezialfall 2 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stabquerschnitt: } EI = \text{feldweise konstant,} \\ \text{GK/EI = invariant} \\ \text{Lagerschiefe: überall gleich, } \delta_k = \delta_{k+1} = \delta \end{array} \right.$

$$(11) \quad \left. \begin{array}{l} M_{k-1} \frac{l_{i-1}}{6 EI_{i-1}} (1 - C) + M_k \cdot \\ \cdot \left(\frac{l_{i-1}}{6 EI_{i-1}} + \frac{l_i}{6 EI_i} \right) (2 + C) + M_{k+1} \frac{l_i}{6 EI_i} (1 - C) = \\ = -[(\beta_{i-1 0} + \alpha_{i0}) (1 + C) - (\alpha_{i-1 0} + \beta_{i0}) C] \end{array} \right.$$

wobei: $C = \frac{G K}{E I} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{2}$, $\left(\begin{array}{c} k = 1, 3, 5, \dots \\ i = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right)$

Spezialfall 3 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stabquerschnitt: konstant über alle Felder} \\ \text{Lagerschiefe: gleich über allen Stützen} \end{array} \right.$

$$(12) \quad \left. \begin{array}{l} M_{k-1} l_{i-1} (1 - C) + \\ + M_k (l_{i-1} + l_i) (2 + C) + M_{k+1} l_i (1 - C) = \\ = -6 E I [-\alpha_{i-1 0} C + (\beta_{i-1 0} + \alpha_{i0}) (1 + C) - \beta_{i0} C] \end{array} \right.$$

wobei: $C = \frac{G K}{E I} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{2}$, $\left(\begin{array}{c} k = 1, 3, 5, \dots \\ i = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right)$

$$(14) \quad \left. \begin{array}{l} T_i = - \frac{\frac{6 E I_i}{l_i} (\alpha_{i0} \operatorname{tg} \delta_k + \beta_{i0} \operatorname{tg} \delta_{k+1}) + M_k (2 \operatorname{tg} \delta_k + \operatorname{tg} \delta_{k+1}) + M_{k+1} (\operatorname{tg} \delta_k + 2 \operatorname{tg} \delta_{k+1})}{6 \frac{E I_i}{G K_i} + 2 (\operatorname{tg}^2 \delta_k + \operatorname{tg} \delta_k \operatorname{tg} \delta_{k+1} + \operatorname{tg}^2 \delta_{k+1})} \end{array} \right.$$

Schnittgrößen und Deformationen

Das durch Auflagerschiefstellung induzierte Torsionsmoment ist mit Gl. (2) gegeben, wobei die Auflagerdrehwinkel gemäß (7) einzusetzen sind. Unter Beachtung, dass

$$C_{i\beta k+1} \operatorname{tg} \delta_k = C_{i\beta k} \operatorname{tg} \delta_{k+1}$$

und $C_{i\alpha k} \operatorname{tg} \delta_{k+1} = C_{i\alpha k+1} \operatorname{tg} \delta_k$

wird das Torsionsmoment im Feld i im *allgemeinsten Fall* (Querschnitt variabel, Schiefe von Lager zu Lager verschieden)

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_i = \frac{-1}{\gamma_i D_i} [\alpha_{i0} \operatorname{tg} \delta_k + \beta_{i0} \operatorname{tg} \delta_{k+1} + \\ + M_k (\alpha_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + \beta_{ik} \operatorname{tg} \delta_{k+1}) + \\ + M_{k+1} (\alpha_{i k+1} \operatorname{tg} \delta_k + \beta_{i k+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1})] \end{array} \right.$$

wobei D_i der ersten Kolonne von Tabelle 2 zu entnehmen ist. Im *Spezialfall 1* (EI_i, GK_i feldweise konstant, $\delta_k \neq \delta_{k+1}$) gilt Formel (14).

Sind neben feldweise konstanter Biege- und Torsionssteifigkeit auch die Lagerschiefstellungen über den ganzen Stab gleich ($\delta_k = \delta_{k+1} = \delta$), so wird für die *Spezialfälle 2 und 3*:

$$(15a) \quad T_i = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\frac{EI_i}{GK_i} + \operatorname{tg}^2 \delta} \left[\frac{EI_i (\alpha_{i0} + \beta_{i0})}{l_i} + \frac{M_k + M_{k+1}}{2} \right]$$

oder mit der Abkürzung $C_i = \frac{GK_i}{EI_i} \operatorname{tg}^2 \delta$

$$(15b) \quad T_i = -\frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \frac{2C_i}{1+2C_i} \left[\frac{EI_i (\alpha_{i0} + \beta_{i0})}{l_i} + \frac{M_k + M_{k+1}}{2} \right]$$

Hier lässt sich der Klammerausdruck folgendermassen deuten: $EI_i \alpha_{i0}$ ist nach der Mohrschen Analogie der linke Auflagerdruck infolge der als Belastung eingeführten Momentenfläche M_{i0} ; $EI_i \beta_{i0}$ der entsprechende rechte des Feldes i . Die Summe dieser beiden Ausdrücke stellt somit den Inhalt der Momentenfläche dar, und es ist

$$(16) \quad \frac{EI_i (\alpha_{i0} + \beta_{i0})}{l_i} = \frac{\int_0^{l_i} M_{i0} dz}{l_i}$$

Für den ersten Summanden im Klammerausdruck kann daher das *durchschnittliche* Moment aus äusserer Belastung am Balkenfeld i gesetzt werden, was für eine konzentrierte Einzellast P

$$(16a) \quad \frac{EI_i (\alpha_{i0} + \beta_{i0})}{l_i} = \frac{1}{2} M_{max} = \frac{a_i b_i}{2 l_i} P$$

oder für gleichmässig verteilte Belastung p

$$(16b) \quad \frac{EI_i (\alpha_{i0} + \beta_{i0})}{l_i} = \frac{2}{3} M_{max} = \frac{p l_i^2}{12}$$

ergibt.

Zum Anschreiben der Biegemomente sind die Stützmomente am linken und rechten Ende des Feldes i von besonderem Interesse. Diese seien mit M_{ki} und $M_{k+1 i}$ bezeichnet und werden durch Einsetzen von (3) und (4)

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{ki} = M_k + \Delta M_{ki} = M_k + T_i \operatorname{tg} \delta_k \\ M_{k+1 i} = M_{k+1} + \Delta M_{k+1 i} = M_{k+1} + T_i \operatorname{tg} \delta_{k+1} \end{array} \right.$$

Superposition der Einflüsse ergibt den vertrauten Ausdruck für das Biegemoment an der Stelle $\xi_i = z_i/l_i$ bzw. $\xi'_i = z'_i/l_i$

$$(18) \quad M_i = M_{i0} + M_{ki} \xi'_i + M_{k+1 i} \xi_i$$

Zum Aufzeichnen der Momentenflächen wird man die beiden Stützmomentenwerte für jedes Feld bestimmen, und dann

die Momentenfläche M_{i0} (ermittelt am Grundsystem des einfachen Balkens i infolge äusserer Belastung) überlagern.

Mit diesen Stützmomenten (17) können auch die Querkräfte Q und die Auflagerdrücke F wie üblich ausgedrückt werden:

$$(19) \quad Q_i = Q_{i0} + \frac{M_{k+1 i} - M_{ki}}{l_i}$$

$$(20) \quad F_k = B_{i-1 0} + A_{i0} + \frac{M_{k+1 i} - M_{ki}}{l_i} - \frac{M_{ki-1} - M_{k-1 i-1}}{l_{i-1}}$$

Die Wirkungslinie dieses Auflagerdrückes geht nicht mehr durch die Stabaxe, auch wenn die äussere Belastung nur durch diese angreifen darf. Ihre Verschiebung aus der Stabaxe kann ausgedrückt werden durch die x -Koordinate zu

$$(21) \quad x_{Fk} = \frac{T_i - T_{i-1}}{F_k}$$

Als zweiter geometrischer Ort für die (vertikale) Wirkungslinie des Auflagerdrückes bleibt natürlich die Gerade längs der schiefen Lagerkante k .

Die lotrechte Durchbiegung der Stabaxe, y , kann wiederum durch Ueberlagerung der Einflüsse am Grundsystem des einfachen Balkens folgendermassen angeschrieben werden:

$$(22) \quad y_i = y_{i0} + M_{ik} y_{ik} + M_{k+1 i} y_{ik+1}$$

wobei

y_{i0} = Biegelinie infolge äusserer Belastung

y_{ik} = Biegelinie infolge $M_{ki} = 1$

y_{ik+1} = Biegelinie infolge $M_{k+1 i} = 1$

Die letzteren beiden Werte lassen sich direkt der Tabelle 1 (Fall Einzellast mit $P = 1$) entnehmen, denn nach dem Maxwell-Mohrschen Gesetz über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen ist $y_{ik} = \alpha_{i0}$ und $y_{ik+1} = \beta_{i0}$.

Zur Beschreibung der Durchbiegung all jener Stabfasern, die nicht in der Stabaxe liegen, wird auch die Stabverdrehung φ benötigt. Der Drehwinkel φ wird von der Horizontalen aus gemessen. Der positive Drehsinn ist in Bild 2 definiert. Allgemein gilt:

$$(23) \quad \varphi(z_i) = \varphi(z_i = 0) + \int_0^{z_i} \varphi' dz$$

Da bei schiefen Brücken $\varphi(z_i = 0) = \alpha_i \operatorname{tg} \delta_k$ ist (s. Bild 3), und bei St. Venantscher Torsion $\varphi' = T/GK$, so folgt mit α_i aus Gl. (7):

$$(24) \quad \varphi(z_i) = \alpha_i \operatorname{tg} \delta_k + \int_0^{z_i} \frac{T}{GK} dz$$

Beispiel: Durchlaufträger über drei Felder

Der in Bild 5 skizzierte durchlaufende Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EI , konstanter Torsionssteifigkeit GK und gleicher Lagerschiefstellung δ wird durch eine gleichmässig verteilte Belastung p im Mittelfeld belastet.

Infolge der Symmetrie in Tragwerk und Belastung ist das Uebertragungsmoment M_3 gleich demjenigen bei 5, $M_3 = M_5$, und die einzige erforderliche Gleichung lautet nach (12):

$$M_3 l (\lambda + 1) (2 + C) + M_3 l (1 - C) =$$

$$= -6EI \left[+ \frac{p l^3}{24EI} (1 + C) - \frac{p l^3}{24EI} C \right]$$

$$\text{mit } C = \frac{GK \operatorname{tg}^2 \delta}{EI} \frac{2}{2},$$

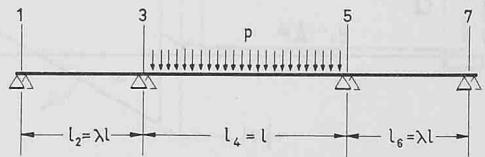


Bild 5. Dreifeldriger Durchlaufträger

woraus folgt:

$$M_3 = - \frac{3}{3 + 2\lambda + \lambda C} \frac{pl^2}{12}$$

Die Schnittgrößen entsprechend den Formeln (15) bis (21) lauten:

$$(25a) \quad T_2 = T_6 = - \frac{2}{\operatorname{tg} \delta} \frac{C}{1+2C} \frac{M_3}{2} = + \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \frac{3C}{(1+2C)(3+2\lambda+\lambda C)} \frac{pl^2}{12}$$

$$(25b) \quad T_4 = - \frac{2}{\operatorname{tg} \delta} \frac{C}{1+2C} \left(\frac{pl^2}{12} + M_3 \right) = - \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \frac{2\lambda C (2+C)}{(1+2C)(3+2\lambda+\lambda C)} \frac{pl^2}{12}$$

$$(25c) \quad M_{12} = M_{76} = T_2 \operatorname{tg} \delta = + \frac{3C}{(1+2C)(3+2\lambda+\lambda C)} \frac{pl^2}{12}$$

$$(25d) \quad M_{32} = M_{56} = M_3 + T_2 \operatorname{tg} \delta = - \frac{3(1+C)}{(1+2C)(3+2\lambda+\lambda C)} \frac{pl^2}{12}$$

$$(25e) \quad M_{34} = M_{54} = M_3 + T_4 \operatorname{tg} \delta = - \frac{3+6C+4\lambda C+2\lambda C^2}{(1+2C)(3+2\lambda+\lambda C)} \frac{pl^2}{12}$$

$$(25f) \quad Q_2 = -Q_6 = 0 + \frac{M_{32} - M_{12}}{\lambda l} = - \frac{1}{4\lambda(3+2\lambda+\lambda C)} pl$$

$$(25g) \quad Q_4 = (1/2 - \zeta_4) pl$$

$$(25h) \quad F_1 = F_7 = Q_2 = - \frac{1}{4\lambda(3+2\lambda+\lambda C)} pl$$

$$(25i) \quad F_3 = F_5 = \frac{pl}{2} - Q_2 = + \frac{2\lambda(3+2\lambda+\lambda C)+1}{4\lambda(3+2\lambda+\lambda C)} pl$$

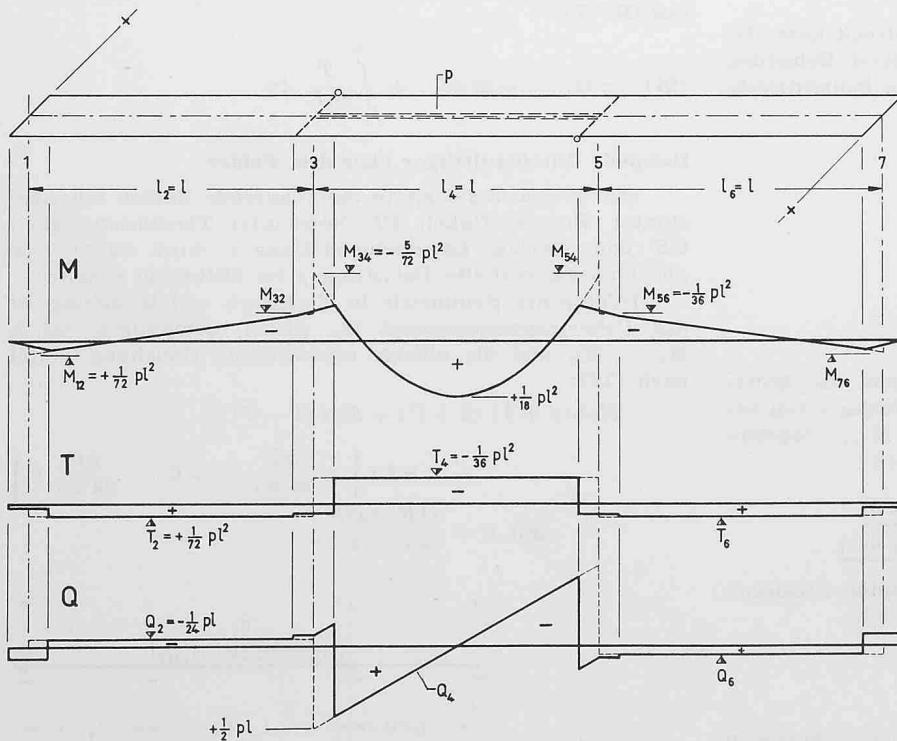


Bild 6. Biegemomente-, Torsionsmomente- und Querkraft-Flächen für Mittelfeldbelastung

$$(25k) \quad x_{F1} = -x_{F7} = \frac{T_2}{Q_2} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \frac{\lambda C}{1+2C} l$$

$$(25l) \quad x_{F3} = -x_{F5} = \frac{T_4 - T_2}{F_3} = -\frac{\lambda C}{3 \operatorname{tg} \delta} \cdot \frac{3+4\lambda+2\lambda C}{(1+2C)(1+6\lambda+4\lambda^2+2\lambda^2C)} l$$

Die angeschriebenen Formeln für die Momente und zum Teil auch für die Querkräfte, Auflagerdrücke und ihre Wirkungslinie lassen sich für folgende Grenzfälle überprüfen:

— *Keine Schieflistung der Auflager.* Durch Nullsetzen von C und $\operatorname{tg} \delta$, aber auch $C/\operatorname{tg} \delta$, ergibt sich $M_3 = M_{32} = M_{34} = -pl^2/(12+8\lambda)$, was tatsächlich gleich dem Stützmoment des entsprechenden gewöhnlichen durchlaufenden Balkens unter Mittelfeldbelastung ist. Die Torsionsmomente T_2 und T_4 verschwinden, ebenso die Exzentrizität der Auflagerkraft.

— *Totale Einspannung des Mittelfeldes.* Diese wird erreicht durch vollständiges Zusammenrücken der Auflager in den Endfeldern. Für $\lambda = 0$ ist, den Erwartungen entsprechend, $T_4 = 0$ und $M_3 = M_{34} = -pl^2/12$.

— *Mittelfeld als einfacher Balken.* Für den Grenzwert $\lambda \rightarrow \infty$ wird

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_4 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \frac{2C}{1+2C} \frac{pl^2}{12} = T \\ M_{34} = -\frac{2C}{1+2C} \frac{pl^2}{12} = M_s \\ x_{F3} = -x_{F5} = -\frac{l}{3 \operatorname{tg} \delta} \frac{C}{1+2C} = x_F \end{array} \right.$$

Ein für das numerische Rechnen bequemer, und wie sich später zeigen wird, nicht unrealistischer Näherungswert für einen schmalen, rechteckigen Voll- oder Hohlquerschnitt ist $GK/EI = 2$. Dann wird $C = \operatorname{tg}^2 \delta$ oder $\operatorname{tg} \delta = \sqrt{C}$.

Mit diesen Annahmen sind für gleiche Feldweite und eine Lagerschiefe von 45° , die Werte aus den Formeln (25) in Bild 6 aufgezeichnet. Es zeigt zuerst den Grundriss, wobei die angenommene Stabbreite willkürlich ist. Die Lagen der resultierenden Auflagerkräfte sind darin eingezzeichnet. Sowohl bei positiver (Lager 3 und 5) als auch bei negativer Auflagerkraft (Lager 1 und 7) befindet sich die Resultierende stets auf der dem belasteten Mittelfeld näher gelegenen Auflagerseite.

Die Resultierende kann nun, nachträglich, zerlegt werden in Auflagerkräfte mit den effektiv benutzten Wirkungslinien (s. Abschnitt «Verhältnisse bei den Auflagern»), was zu entsprechenden Ergänzungen der Schnittkraftdiagramme über den Stützen führt. Die Diagramme, Bild 6, sind unter der Annahme gezeichnet worden, dass zwei Lagerkörper pro Stütze unter den Stab längsrändern vorhanden seien. Es ist deutlich ersichtlich, dass mit zunehmendem C -Wert eine erhöhte Einspannung des belasteten Feldes erzeugt wird.

Die Zunahme der Veränderung gegenüber dem gewöhnlichen durchlaufenden

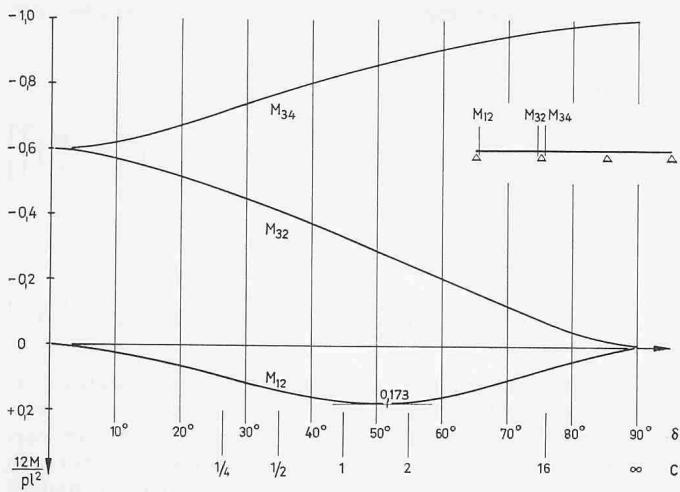


Bild 7. Biegemomente als Funktion der Lagerschiefe δ

Balken ist für die Biegemomente ganz verschieden von den Torsionsmomenten. Um dies zu illustrieren, sind die Abbildungen 7 und 8 angefertigt. Während sich die Biegemomente bis zu einer Lagerschiefe von 10° noch unwesentlich verändern, sind die Torsionsmomente schon beinahe auf der Hälfte ihres Höchstwertes.

Die Biegemomente variieren im Mittelfeld nahezu gleichförmig vom Ausgangsfall des gewöhnlichen Durchlaufträgers bis zum Grenzfall des voll eingespannten. Dagegen nimmt das Torsionsmoment bei grösserer Lagerschiefe wieder ab. Dieses interessante Verhalten erklärt sich aus Gl. (2). Daraus ist ersichtlich, dass das Torsionsmoment nicht nur mit der Lagerschiefe, sondern auch mit der Summe der Auflagerdrehwinkel wächst. Da sich das System bei hohen δ -Werten dem Fall totaler Einspannung nähert, nehmen die Auflagerdrehwinkel ab. Im Grenzfall verschwinden sie, und mit ihnen das induzierte Torsionsmoment.

Allgemeine exzentrische Belastung

In diesem Abschnitt werden die bis anhin gewonnenen Erkenntnisse auf den Fall von lotrechter, aber nicht mehr in der Symmetrie-Ebene liegender Belastung erweitert.

Als die wesentliche neue Aufgabe stellt sich daher, die Wirkung eines angreifenden Drehmomentes M_D auf den schief gelagerten, durchlaufenden Balken mit St. Venantscher Torsionssteifigkeit zu studieren. Es wird sich zeigen, dass auch dieser Lastfall mit den hergeleiteten Dreimomentengleichungen berechnet werden kann.

Am beiderseits gegen Verdrehung *fest* eingespannten Stab (Kopfzeiger f) werde die aus äusserer Drehbelastung hervorgerufene Torsionsmomentenfläche mit $T_{i0}^{(f)}$ und seine Stabendmomente mit $T_{ki}^{(f)}$ und $T_{k+1,i}^{(f)}$ bezeichnet. In Bild 9 sind solche Flächen und ihre bei den Einspannstellen auftretenden Werte eingetragen für den Fall eines gleichmässig über die Stablänge verteilt angreifenden und eines nur streckenweise wirkenden, verteilten Drehmomentes m_D 2).

Die Torsionsmomente bei den Lagern k und $k+1$ sind gleich ihren Werten bei fester Einspannung plus die durch Auflagerdrehwinkel verursachten Änderungen. An Stelle von Gl. (2) treten nun zwei Ausdrücke:

$$(27) \quad \begin{cases} T_{ki} = T_{ki}^{(f)} - \frac{\alpha_i \operatorname{tg} \delta_k + \beta_i \operatorname{tg} \delta_{k+1}}{\gamma_i} \\ T_{k+1,i} = T_{k+1,i}^{(f)} - \frac{\alpha_i \operatorname{tg} \delta_k + \beta_i \operatorname{tg} \delta_{k+1}}{\gamma_i} \end{cases}$$

Führt man noch einmal dieselben Gedankengänge durch, die von Gl. (3) auf Gl. (6) führen, so folgt, dass die in den Dreimomentengleichungen (9) einzusetzenden Belastungsglieder infolge Drehmomente in allgemeinsten Form lauten:

2) C. F. Kollbrunner und K. Basler: Torsionsmomente und Stabverdrehung bei St. Venantscher Torsion, «Mitt. d. TK», Heft 27, Verlag Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Zürich, 1963.

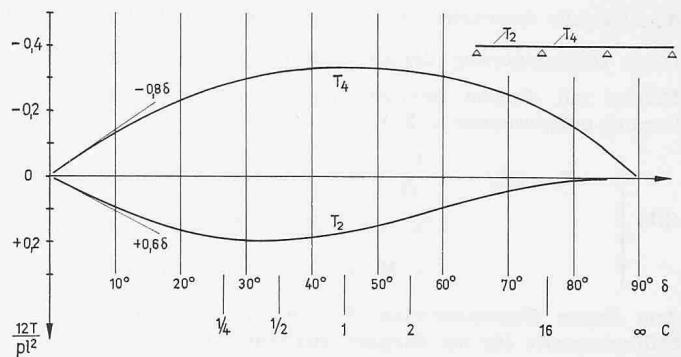


Bild 8. Torsionsmomente als Funktion der Lagerschiefe δ

$$(28) \quad \begin{cases} \alpha_{iD} = T_{ki}^{(f)} \alpha_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + T_{k+1,i}^{(f)} \alpha_{ik+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1} \\ \beta_{iD} = T_{ki}^{(f)} \beta_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + T_{k+1,i}^{(f)} \beta_{ik+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1} \end{cases}$$

Wird z. B. angenommen, das Stabfeld i werde durch ein auf ganze Länge gleichmässig verteiltes Drehmoment m_D (Kraft mal Länge/Länge) belastet und habe konstante Biege- und Torsionssteifigkeit, aber verschiedene Lagerschiefe, so werden die Belastungsglieder nach Einsetzen der in Bild 9a gegebenen Werte in (28):

$$(29) \quad \begin{cases} \alpha_{iD} = \frac{m_D l_i^2}{12 E I_i} (2 \operatorname{tg} \delta_k - \operatorname{tg} \delta_{k+1}) \\ \beta_{iD} = \frac{m_D l_i^2}{12 E I_i} (\operatorname{tg} \delta_k - 2 \operatorname{tg} \delta_{k+1}) \end{cases}$$

Sind auch die Lager noch parallel ($\delta_k = \delta_{k+1} = \delta$), so vereinfachen sich diese Werte auf

$$(30) \quad \alpha_{iD} = -\beta_{iD} = \frac{m_D l_i^2}{12 E I_i} \operatorname{tg} \delta$$

Hat man *beliebige exzentrische Belastung*, so wird diese zunächst in den zentrischen und den verdrehenden Anteil zerlegt, um die Belastungsglieder $\alpha_{io} + \alpha_{iD}$ und $\beta_{io} + \beta_{iD}$ zu bestimmen. Diese werden in die Dreimomentengleichungen (9) bis (12) eingeführt und die überzähligen Grössen M_k durch Auflösen des Systems erhalten. Damit kann nach (13), (14) oder (15) die Verschiebung der Schlusslinie der Torsionsmomentenflächen angegeben werden, d. h. es entsteht

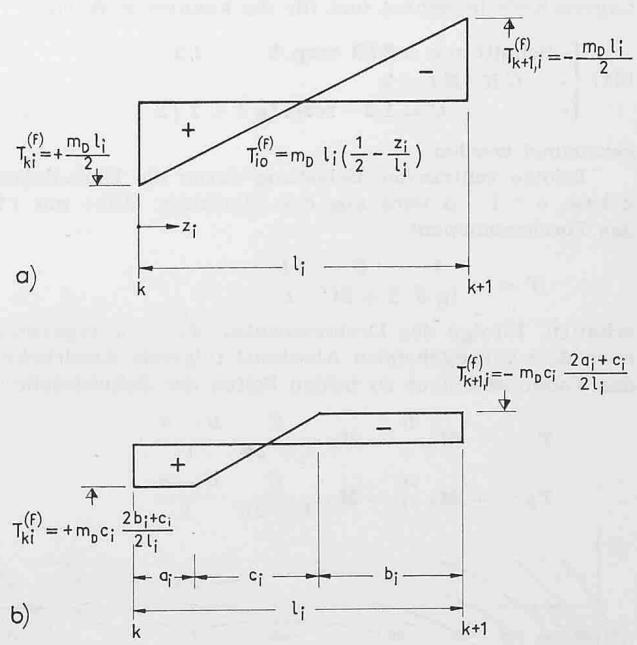


Bild 9. Torsionsmomentenfläche $T_{10}^{(f)}$ am Grundsystem des fest eingespannten präzatischen Stabes unter gleichmässig verteilt Drehmoment m_D über a) die ganze Stablänge, b) die Teilstrecke c_i

die folgende Anschrift für die Torsionsmomente im Stabfeld i aus Ueberlagerung der am Grundsystem bestimmten $T_{i0}^{(f)}$ - Fläche mit diesem Schlusslinienzug (allgemeinste Formulierung entsprechend (13)):

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_i = T_{i0}^{(f)} - \frac{1}{\gamma_i D_i} \left[(\alpha_{i0} + \alpha_{iD}) \operatorname{tg} \delta_k + (\beta_{i0} + \beta_{iD}) \cdot \right. \\ \cdot \operatorname{tg} \delta_{k+1} + M_k (\alpha_{ik} \operatorname{tg} \delta_k + \beta_{ik} \operatorname{tg} \delta_{k+1}) + \\ \left. + M_{k+1} (\alpha_{ik+1} \operatorname{tg} \delta_k + \beta_{ik+1} \operatorname{tg} \delta_{k+1}) \right] \end{array} \right.$$

Aus diesen Stabendwerten T_{ki} und $T_{k+1,i}$ lassen sich die Stützmomente für die Biegemomentenflächen berechnen, so dass auch diese Schlusslinien gezogen werden können:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{ki} = M_k + T_{ki} \operatorname{tg} \delta_k \\ M_{k+1,i} = M_{k+1} + T_{k+1,i} \operatorname{tg} \delta_{k+1} \end{array} \right.$$

Die Ausdrücke (18), (19) und (20) für die Biegemomente, Querkräfte und Auflagerdrücke bleiben damit erhalten. Die Lage der Wirkungslinie des Auflagerdruckes wird aber präziser formuliert

$$(33) \quad x_{Fk} = \frac{T_{ki} - T_{k+1,i}}{F_k}$$

Wie bei den Gl. (13) bis (21) werden auch aus diesen Formeln die Schnittgrößen am schief gelagerten Einfeldträger erhalten durch Nullsetzen der Uebertragungsmomente M_k und M_{k+1} .

Beispiel: Einflussflächen

Die Einflusslinie für eine Schnittgröße an einer bestimmten Stabstelle wird erhalten durch Auftragen der Einflussgröße unter der Laststellung. Da die Lage der konzentrierten, lotrechten Einzellast $P = 1$ bei exzentrischer Lastanordnung durch zwei Koordinaten beschrieben werden muss (z_i und x , s. Bild 2), entsteht notwendigerweise eine Einflussfläche für die Schnittkraft, auch wenn zur Berechnung die Stabstatik zugezogen wird.

Die Lasteinheit $P = 1$ wird zunächst auf die Stabaxe reduziert. Dann werden die Schnittgrößen für die beiden Lastfälle «zentrische Belastung unter $P = 1$ » und «Drehmoment als Belastung infolge $M_D = x$ » berechnet und superponiert. Da die Berechnung der beiden Lastfälle bereits besprochen worden ist, bietet das Bestimmen solcher Einflussflächen keine neuen Probleme mehr.

Zur Illustration sollen die Einflussflächen für das Torsions- und Biegemoment des Einfeldbalkens mit gleicher Lagerschiefe berechnet und für die konkreten Werte

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{- Schnitt in } a = 2l/3 \text{ resp. } b = l/3 \\ \text{- } G K / E I = 2 \\ \text{- } C = 1/2 \text{ resp. } \operatorname{tg} \delta = 1/\sqrt{2} \end{array} \right.$$

gezeichnet werden.

Infolge zentrischer Belastung durch die Einheitslast in a bzw. $b = l - a$ wird aus der Gleichung (15b) mit (16a) das Torsionsmoment

$$T = -\frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \frac{C}{1+2C} \frac{ab}{l}$$

erhalten. Infolge des Drehmomentes $M_D = x$ ergeben sich nach dem vorangehenden Abschnitt folgende Ausdrücke für das Torsionsmoment zu beiden Seiten der Schnittstelle:

$$\begin{aligned} T_A &= M_D \frac{b}{l} - M_D \frac{C}{1+2C} \frac{b-a}{l} \\ T_B &= -M_D \frac{a}{l} - M_D \frac{C}{1+2C} \frac{b-a}{l} \end{aligned}$$

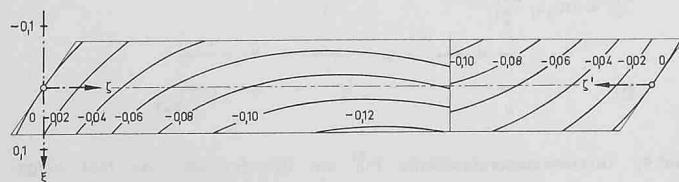


Bild 10. Einflussfläche für das Torsionsmoment im Schnitt $\xi = 2/3$, $\xi' = 1/3$ (Werte mit 1 multiplizieren)

Die Ueberlagerung der beiden Lastfälle ergibt mit $M_D = x$

$$T_A = \frac{l}{1+2C} \cdot$$

$$\left\{ -\frac{C}{\operatorname{tg} \delta} \frac{ab}{l^2} + \frac{x}{l} \left[(1+2C) \frac{b}{l} - C \left(\frac{b}{l} - \frac{a}{l} \right) \right] \right\}$$

$$T_B = \frac{l}{1+2C} \cdot$$

$$\left\{ -\frac{C}{\operatorname{tg} \delta} \frac{ab}{l^2} + \frac{x}{l} \left[-(1+2C) \frac{a}{l} - C \left(\frac{b}{l} - \frac{a}{l} \right) \right] \right\}$$

Für die Beschreibung der Lage des Lastangriffspunktes werden noch die Abkürzungen $a/l = \xi$, $b/l = \xi'$ und $x/l = \xi$ eingeführt und die Summanden in den eckigen Klammern verrechnet. Damit werden für die Torsionsmomente bei den Auflagern A und B folgende Einflussfunktionen erhalten:

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_A = \frac{l}{1+2C} \left[-\frac{C}{\operatorname{tg} \delta} \xi \xi' + \xi (C + \xi') \right] \\ T_B = \frac{l}{1+2C} \left[-\frac{C}{\operatorname{tg} \delta} \xi \xi' - \xi (C + \xi) \right] \end{array} \right.$$

Da der Wert T_A auch das Torsionsmoment an jeder Stabstelle zwischen Lager A und dem Angriffspunkt des Drehmomentes $M_D = x$ darstellt, ist die Lösung T_A auch der Einflussflächenteil, der sich von der Schnittstelle bis zum Lager B erstreckt. Andererseits stellt T_B in (35) auch den zwischen Lager A und betrachteter Schnittstelle gelegenen Einflussflächenteil für das Torsionsmoment dar.

Für die Annahmen (34) sind die beiden Flächenteile in Bild 10 in Relief- und in Bild 11 in isodiametrischer Darstellung gezeichnet. Die numerischen Werte für diesen konkreten Fall lauten

$$\begin{aligned} \frac{T}{Pl} &= -0,354 \xi \xi' + \xi (0,25 + 0,5 \xi') & \begin{cases} \xi > 2/3 \\ \xi' < 1/3 \end{cases} \\ \frac{T}{Pl} &= -0,354 \xi \xi' - \xi (0,25 + 0,5 \xi) & \begin{cases} \xi < 2/3 \\ \xi' > 1/3 \end{cases} \end{aligned}$$

Als letztes Beispiel soll noch die Greensche Funktion, d. h. die Einflussfunktion, für das Biegemoment des einfeldigen Stabes hergeleitet werden. Da bei diesem keine überzähligen Größen M_k und M_{k+1} errechnet werden müssen, ergeben sich die Biegemomente an der Schnittstelle a bzw. $b = l - a$ aus Gl. (18) unter Einsetzen von (32) zu

$$M = M_0 + T_A \frac{b}{l} \operatorname{tg} \delta_A + T_B \frac{a}{l} \operatorname{tg} \delta_B$$

Wird die Einflussordinate mit η bezeichnet, so ist entsprechend

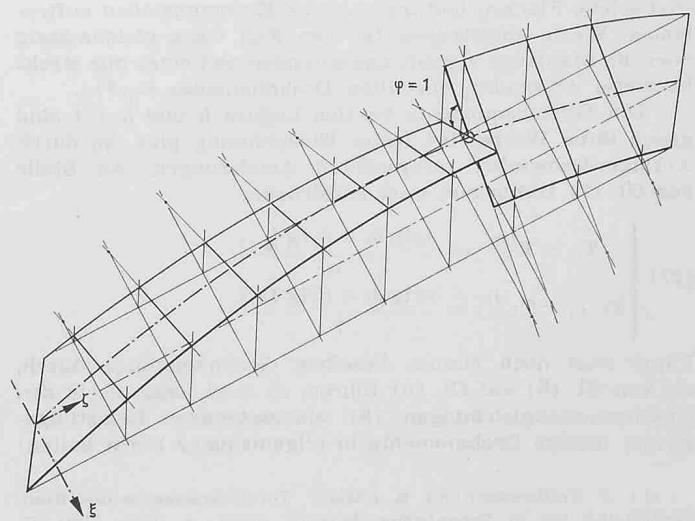


Bild 11. Räumliche Darstellung der Torsionsmomenten-Einflussfläche

$$(36) \quad \eta_M = \eta_{M0} + \eta_{TA} \frac{b}{l} \operatorname{tg} \delta_A + \eta_{TB} \frac{a}{l} \operatorname{tg} \delta_B$$

In diesem Ausdruck bedeutet η_{M0} die Einflussfläche am Grundsystem des einfachen Balkens, die sich im Aufriss als das vertraute Dreieck mit der Ordinate ab/l projiziert.

$$(37) \quad \eta_{M0} = \begin{cases} l \frac{b}{l} \xi, & \text{wenn } \xi < \frac{a}{l} \\ l \frac{a}{l} \xi', & \text{wenn } \xi' < \frac{b}{l} \end{cases}$$

Die Faktoren η_{TA} und η_{TB} sind die Einflussflächen für die Torsionsmomente in den Lagern A und B . Für gleiche Lagerschiefe, $\delta_A = \delta_B = \delta$, sind die Ausdrücke bereits in (35) gegeben. Werden sie in (36) eingesetzt, so ergibt dies folgende Greensche Funktion für das Biegemoment im Schnitt a , bzw. $b = l - a$ eines einfeldigen, links und rechts gleich schief gelagerten Stabes:

$$(38) \quad \eta_M = l \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{l} \xi - \frac{C}{1+2C} \xi \xi' + \frac{\xi \operatorname{tg} \delta}{1+2C} \\ \frac{a}{l} \xi' - \left[\frac{b}{l} (C + \xi') - \frac{a}{l} (C + \xi) \right] \end{array} \right\}, \quad \text{für } \begin{cases} \xi < \frac{a}{l} \\ \xi' > \frac{b}{l} \end{cases}$$

Für die speziellen Werte (34) wird

$$\eta_M = l \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \xi - \frac{1}{4} \xi \xi' + \frac{\sqrt{2}}{4} \xi \left(\frac{1}{6} - \xi \right) \\ \frac{2}{3} \xi' \end{array} \right\} \quad \text{für } \begin{cases} \xi < \frac{2}{3} \\ \xi' > \frac{2}{3} \end{cases}$$

was in den Bildern 12 und 13 als Einflussfläche veranschaulicht ist. Zum Vergleich ist im Aufriss von Bild 12 auch die Einflusslinie η_{M0} , Gl. (37), eingetragen.

Die Stabkonstante C

In der gesamten Berechnung spielt der Koeffizient C (Tab. 2) eine entscheidende Rolle. In ihm sind alle zu erwartenden Faktoren bei schiefer Lagerung enthalten.

Im einfachsten Fall von gleicher Lagerschiefe δ , konstanter Torsionssteifigkeit GK und Biegesteifigkeit EI ist zu erwarten, dass die Schnittgrößen nicht nur von Spannweite und Belastung abhängig sind, sondern auch noch vom Verhältnis von Torsions- zu Biegesteifigkeit, GK/EI , und irgendwie vom Winkel δ . Es ist ferner zu vermuten, dass sich eine Vergrößerung der Torsionssteifigkeit gegenüber der Biegesteifigkeit in ähnlicher Richtung auswirken wird wie die Vergrößerung der Lagerschiefe.

Aus dieser Arbeit resultiert, dass der alle neuen Einflüsse umfassende Koeffizient C folgendermassen aus den Parametern GK/EI und δ aufgebaut ist:

$$(39) \quad C = \frac{GK}{EI} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{2}$$

Es ist zu erwarten, dass der erstgenannte Parameter, GK/EI , stark von den Abmessungen des Stabquerschnittes abhängt. Um eine Vorstellung darüber zu erhalten, seien nachstehend zwei typische Fälle untersucht.

Für einen schlanken, rechteckigen *Vollquerschnitt*, dargestellt in Bild 1a, ist

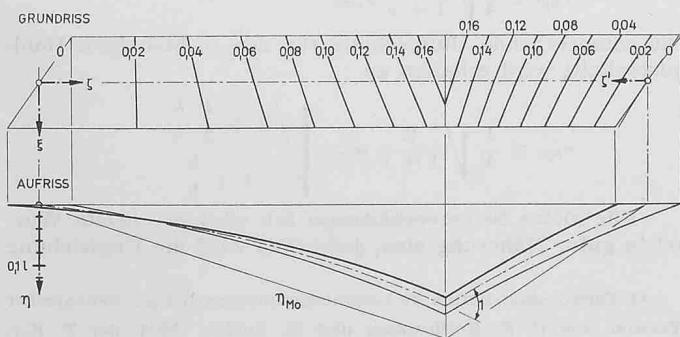


Bild 12. Einflussfläche für das Biegemoment im Schnitt $\xi = 2/3$, $\xi' = 1/3$ ($M = \eta_{M0}$)

$$(40) \quad \frac{GK}{EI} = \frac{\frac{E}{2(1+\nu)}}{\frac{E}{12b^3t^3}} = \frac{2}{1+\nu}$$

Das Verhältnis von Torsions- zu Biegesteifigkeit ist somit unabhängig von den Querschnittsabmessungen! Wenn daher die Vouten bei einer Vorberechnung für den Einfluss der Lagerschiefe nicht berücksichtigt werden, so wird eine genauere Berechnung keine grossen Veränderungen mehr bringen. Die Stabkonstanten sind jedoch nicht vollständig unabhängig von der Materialverteilung, wie aus der ersten Kolonne der Tabelle 2 ersichtlich ist.

Im Falle eines rechteckigen *Hohlquerschnitts*, $b \cdot h$, mit konstanter Wandstärke t wird K aus der Bredtschen Formel berechnet (Bild 1b), und das Verhältnis von Torsions- zu Biegesteifigkeit ist nun

$$(41) \quad \frac{GK}{EI} = \frac{\frac{E}{2(1+\nu)}}{\frac{2(b+h)}{2bth^2 + \frac{2}{12}th^3}} = \frac{\frac{2}{1+\nu}}{\frac{1}{\left(1 + \frac{h}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\frac{h}{b}\right)}}$$

Wenn somit die Querschnittshöhe h klein ist gegenüber der Breite b , so entsteht derselbe Wert wie beim entsprechenden *Vollquerschnitt*!

Verhältnisse bei Auflagern

Zur Darstellung des durch Lagerschiefestellung verursachten Torsionsmomentes sind in Bild 6 zwei an den Stabrändern liegende Lagerkörper pro Stütze angenommen worden. Dies geschah, um die Vorstellung zu erleichtern. Die effektive Stabbreite oder der Abstand der Lagerkörper ist unwesentlich für die Berechnung. Als Resultat wird lediglich der Auflagerdruck, Gl. (20), und seine Wirkungslinie, Gl. (21) bzw. (33) festgesetzt.

Dies sei veranschaulicht am gleichmässig verteilt belasteten Einzelfeld. Der resultierende Auflagerdruck ist $F_A = F_B = pl/2$. Seine rechtwinklig zur Stabaxe gemessene Lage ist durch den letzten Ausdruck in (26) festgelegt. Die Resultierende liegt immer auf der Verlängerungsgeraden durch die schiefen Lagerkante. In dieser Richtung gemessen beträgt die Exzentrizität

$$r = \frac{|X|}{\cos \delta} = \frac{l}{3 \sin \delta} \frac{C}{1+2C}$$

mit C nach (39) eingesetzt

$$(42) \quad r = \frac{l}{6} \frac{\frac{GK}{EI} \sin \delta}{\cos^2 \delta + \frac{GK}{EI} \sin^2 \delta}$$

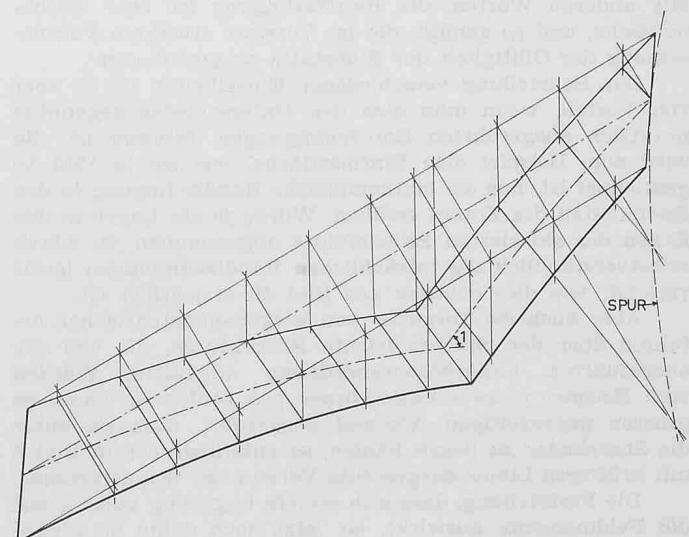


Bild 13. Räumliche Darstellung der Biegemomenten-Einflussfläche

Diese Lage der resultierenden Auflagerkraft ist im Grundriss des Stabes (Bild 14) eingezeichnet für alle Winkel δ und den grösstmöglichen Wert von $GK/EI = 2$. Für $GK/EI = 1$ entsteht als Spur der Resultierenden bei variabler Lagerschiefe δ je ein Halbkreis mit Durchmesser $l/6$. Was diese Figur auch illustriert, ist die Feststellung, dass die geringste Lagerschiefestellung die Resultierende stark aus der Axe verschiebt und demzufolge ungleiche Lagerpressung verursachen wird.

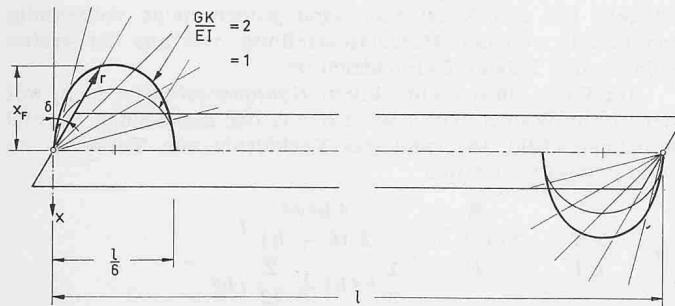


Bild 14. Lage der Wirkungslinie des Auflagerdruckes als Funktion der Lagerschiefe δ beim Einzelfeld unter gleichmäig verteilter Belastung

Falls bei der baulichen Ausführung nur zwei Lagerkörper vorgesehen sind, so kann aus Kenntnis der Wirkungslinie und Resultierenden die Belastung der beiden Lagerkörper mit Gleichgewichtsbedingungen allein berechnet werden. Befinden sich diese in den Abständen $+d/2$ und $-d/2$ von der Stabaxe (positive Abstände in x-Richtung gemessen), so sind die beiden Lagerkörperauflasten $F_k(+d/2)$ und $F_k(-d/2)$.

$$(43) \quad F_k \left(\pm \frac{d}{2} \right) = \frac{F_k}{2} \pm \frac{T_{ki} - T_{k,i-1}}{d}$$

Sind mehr als zwei Lagerkörper vorhanden, oder wird ein eigentliches Linienslager ausgebildet, so ist die Lastverteilung auf die einzelnen Lagerpunkte noch unbestimmt, nicht aber — und dies sei nochmals betont — Lage und Grösse der resultierenden Auflagerkraft. Wird als Hypothese die Annahme der linearen Lastverteilung getroffen, so ist die Linienpressung pro Längeneinheit der schiefen Lagerkante

$$(44) \quad \bar{\sigma}_k = \left[\frac{F_k}{ld} + \frac{12(T_{ki} - T_{k,i-1})}{d^3} x \right] \cos \delta_k$$

Beim Betrachten von Bild 3b scheint es, als ob zu den Voraussetzungen der durchgeföhrten Berechnung auch die Annahme gehöre, dass die Biegelinie in Auflagernähe durch ihre Tangenten in den theoretischen Lagerpunkten ersetzt werden müsse. Da aber nichts über die Distanz zweier angenommener Lagerkörper ausgesagt zu werden braucht, kann man sich diese auch beliebig nahe, aber dennoch schief, zusammengerückt denken, um die Voraussetzungen zu erfüllen. Mit anderen Worten, die Randbedingung ist eine mathematische, und es genügt, die im Vorwort erwähnte Voraussetzung der Gültigkeit der Stabstatik zu postulieren.

Zur Beurteilung verschiedener Einzelheiten ist es aber von Vorteil, wenn man sich des Unterschiedes gegenüber praktisch ausgeführten Randbedingungen bewusst ist. So wird zum Beispiel eine Einflussfläche, wie sie in Bild 10 gezeichnet ist, nur die mathematische Randbedingung in den Endpunkten des Stabes erfüllen. Würde je ein Lager in den Ecken des skizzierten Balkenfeldes angenommen, so wären selbstverständlich die tatsächlichen Randbedingungen leicht verletzt, wie dies deutlich aus Bild 10 ersichtlich ist.

Aber auch die Torsions- und Biegemomentenflächen erfahren über den Stützen leichte Korrekturen, die von der ausgeführten Lagerkörperanordnung abhängen. Würden zum Beispiel je zwei Lagerkörper pro Stütze in einem so grossen gegenseitigen Abstand ausgeführt, dass sie unter die Staibränder zu liegen kämen, so entstünde der in Bild 6 mit kräftigen Linien dargestellte Verlauf der Schnittgrössen.

Die Feststellung, dass sich schiefe Lagerung günstig auf die Feldmomente auswirkt, ist jetzt noch dahin zu ergänzen, dass sich auch über den Stützen die Momentenspitzen

brechen lassen durch Lagerschiefestellung. Dabei können allerdings erhöhte Schubkräfte zwischen den beiden Lagerkörpern auftreten.

Grösste Schubspannung infolge Lagerschiefe

Schiefestellung der Auflager hat den Nachteil, dass Schubspannungen aus Torsion verursacht werden, auch wenn nur zentrische Belastung vorkommen soll. Wie gross können diese, ausschliesslich auf Lagerschiefestellung zurückzuführenden Schubspannungen werden? In diesem Abschnitt soll versucht werden, dafür eine obere Schranke zu erstellen.

Aus Gl. (15a) ist ersichtlich, dass das Torsionsmoment dann am grössten ist, wenn der Quotient vor der Klammer, wie auch deren Inhalt, den grösstmöglichen Wert erreicht. Der erwähnte Quotient

$$Q = \frac{\tan \delta}{\frac{EI}{GK} + \tan^2 \delta}$$

verschwindet für eine Lagerschiefe $\delta = 0^\circ$ als auch $\delta = 90^\circ$. Er muss zwischen diesen beiden Grenzen einen optimalen Wert erreichen, dessen Lagerschiefe sich aus der Bedingung

$$(45) \quad \frac{dQ}{d(\tan \delta)} = \frac{\frac{EI}{GK} + \tan^2 \delta - 2 \tan^2 \delta}{\left(\frac{EI}{GK} + \tan^2 \delta \right)^2} = 0$$

$$\text{bestimmen lässt zu} \quad \tan \delta_{opt} = \sqrt{\frac{EI}{GK}}$$

Somit ist

$$(46) \quad T_i \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GK}{EI_i}} \left[\frac{EI_i (\alpha_{i0} + \beta_{i0})}{l_i} + \frac{M_k + M_{k+1}}{2} \right]$$

Der Klammerausdruck stellt ein durchschnittliches Biegemoment über die Stablänge l_i dar. Wie immer auch die Belastungsanordnung und die Stabeinspannung gewählt wird, das durchschnittliche Biegemoment kann das extremale nie übersteigen, d. h.

$$T_{opt} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GK}{EI}} M_{extr}$$

Diese Ungleichheit ist nun noch in Spannungen auszudrücken. Für die beiden im vorletzten Abschnitt besprochenen Querschnitte lauten sowohl die Schubspannungen infolge St. Venantscher Torsion³⁾ als auch die Normalspannungen infolge Biegung

Schmaler Rechteckquerschnitt

$$\tau = 3 \frac{T}{bt^2}$$

$$\sigma = 6 \frac{M}{bt^2}$$

Rechteckiger Hohlquerschnitt

$$\tau = \frac{T}{2bht}$$

$$\sigma = \frac{M}{bht \left(1 + \frac{1}{3} \frac{h}{b} \right)}$$

Für den schmalen Rechteckquerschnitt ist daher $T_{opt} = \tau_{opt} bt^2/3$ und $M_{extr} = \sigma_{extr} bt^2/6$. Eingeführt in die letzte Ungleichung, in der auch GK/EI entsprechend (40) ersetzt wird, liefert:

$$\tau_{opt} \leq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{1 + \nu}} \sigma_{extr}$$

Die entsprechende Ungleichung für den rechteckigen Hohlquerschnitt wird erhalten zu

$$\tau_{opt} \leq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{1 + \nu}} \sigma_{extr} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{3} \frac{h}{b}}{1 + \frac{h}{b}}}$$

Für kleine Seitenverhältnisse h/b wird die zweite Wurzel in guter Näherung eins; jedenfalls wird die Ungleichung

³⁾ Torsionskonstanten und Schubspannungen bei St. Venantscher Torsion, von C. F. Kollbrunner und K. Basler, «Mitt. der T. K.», Heft 23, Verlag Schweizer Stahlbauverband, Zürich 1962.

durch kein Seitenverhältnis h/b verletzt, wenn der Wurzelwert durch eins ersetzt wird. Schliesslich liegt für alle Materialien ν zwischen null und 0,5, so dass im ungünstigsten Falle der erste Wurzelwert $= \sqrt{2}$ sein kann. Wären dicke, rechteckige Vollquerschnitte zugelassen, so würde sich das Verhältnis GK/EI leicht verkleinern.

Somit lässt sich aussagen, dass sowohl für den rechteckigen Voll- als auch Hohlquerschnitt die durch Lager-schiefstellung verursachte Schubspannung unter keiner Laststellung, bei beliebigen Spannweitenverhältnissen und freier Wahl des Baumaterials, den $\sqrt{2}/4$ -fachen Wert der Biegespannung überschreitet

$$(47) \quad \tau_{opt} \leq 0,354 \sigma_{extr}$$

Zusammenfassung

Bei schiefen Brücken sind zwei Sätze von Verträglichkeitsbedingungen notwendig: eine Bedingung für jedes Feld, die verlangt, dass die Gesamtverdrehung des Stabfeldes verschwinden muss, damit es verträglich mit den horizontalen Lagerkanten sein kann, und eine Bedingung für jede Zwischenstütze, die bewirkt, dass die Stabaxe kontinuierlich ist. Diese beiden Bedingungen sind in den Gl. (1) und (8) formuliert. Sie entkoppeln sich nur für normale Lagerung des Durchlaufträgers, d. h. wenn $\tan \delta_k = \tan \delta_{k+1} = 0$ ist.

Als überzählige Größen werden beim durchlaufenden Träger üblicherweise die Stützmomente eingeführt. Bei schiefen Lagerung sind aber zwei Stützmomente pro Lager k vorhanden, M_{k-1} und M_{ki} , und je ein Torsionsmoment T_i pro Feld. Die Zahl der Unbekannten ist daher gleich der dreifachen Felderzahl. Würden diese Unbekannten benutzt, so müssten die erwähnten beiden Sätze von Elastizitätsgleichungen noch durch je eine Momentengleichgewichtsbedingung pro Stütze ergänzt werden.

$$(48) \quad M_{ki} - M_{k-1} - (T_i - T_{i-1}) \tan \delta = 0$$

Trotzdem ist es gelungen, ein Berechnungsverfahren herzuleiten, bei dem die Zahl der überzähligen Größen auf diejenige des Normalfalles beschränkt ist, ohne dabei eine grössere Verkettung der Elastizitäts-Gleichungen zu erhalten als bei den Clapeyronischen Dreimomentengleichungen. Die zwei wesentlichsten Punkte, Wahl des Grundsystems und der überzähligen Größen, seien nochmals kurz beleuchtet.

Zur Herleitung des Berechnungsverfahrens wurde eine Serie einfeldiger, aber bereits mit der schiefen Lagerung verträglicher Balken als statisch unbestimmtes Grundsystem benutzt. Durch Auflösen der simultanen Gleichungen (6) ist ein für alle Mal ein zweigliedriges Gleichungssystem gelöst worden, das für jedes Feld des Trägers Gültigkeit hat und daher die Zahl der überzähligen Größen um gleichviel zu reduzieren vermag, wie Stabfelder vorhanden sind. Als verbleibende überzählige Größen wurden auch nicht die effektiv vorkommenden Stützmomente gewählt — man müsste sich dabei für die linken oder die rechten entscheiden — sondern ideelle Uebertragungsmomente M_k . Diese sind zwar keine am Bauwerk feststellbaren Größen mehr, vermögen aber die Berechnung noch weiter zu vereinfachen und formal denjenigen des normalgelagerten Durchlaufträgers anzugeleichen.

Diese Ueberlegungen braucht der Konstrukteur nicht für jeden schief gelagerten Träger neu herzuleiten, denn das verbleibende Gleichungssystem wie auch die zu ermittelnden Schnittmomente sind in vertrauten Verschiebungsgrossen ausgedrückt, die sich am *normal gelagerten, einfachen Balken* bestimmen lassen. Die Anleitung für eine solche Berechnung lautet einfach:

Alternierend sind Auflager und Feld durchzunumerieren, so dass den Lagern die ungeraden Zahlen k und den Feldern die geraden Zahlen i zugeordnet sind. Für jedes Feld sind — wie beim normal gelagerten Durchlaufträger — die Belastungsglieder zu ermitteln. Ferner sind für jedes Feld die Stabkonstanten C und D entsprechend Tabelle 2 bereitzustellen. Anschliessend können die Dreimomentengleichungen angeschrieben werden, wobei je nach Kompliziertheit des Falles die Formen (12), (11), (10) oder (9) angewendet werden dürfen. Nach deren Auflösung muss als erste Schnitt-

grösse das Torsionsmoment in jedem Feld angeschrieben werden. Dies geschieht mit den Formeln (15b), bzw. (14) oder (13) je nach der Schwierigkeit des Falles. Unter Mitbenutzung dieser ersten Schnittmomente lassen sich die Stützmomente berechnen aus den Gleichungen (17) und damit, wie üblich, die Biegemomente an jeder anderen Stabstelle, (18), die Querkräfte, (19), und die resultierenden Auflagerdrücke, (20). Zu den letzteren gesellt sich noch je eine Angabe über die Lage ihrer Wirkungslinien (21).

Im Falle einer exzentrischen Belastung wird diese zerlegt in eine zentrische und in ein angreifendes Drehmoment. Mit dem ersten Belastungsanteil wird wie oben verfahren, aber auch mit dem zweiten können dieselben Dreimomentengleichungen verwendet werden, falls die Belastungsglieder nach Gl. (28) eingesetzt werden.

Adresse des Verfassers: Dr. sc. techn. Konrad Basler, Südstrasse 1090, Egg bei Zürich

Neue Wege zur Behandlung schiefer Türme

DK 624.159.2

Von Prof. Dr. R. Haefeli, Zürich

Die Schiefstellung von Türmen ist ein schleichender, sich oft über Jahrhunderte erstreckender Vorgang, wobei die Exzentrizität der Resultierenden immer grösser wird. Bodenmechanisch betrachtet handelt es sich dabei um eine stetig fortschreitende Verformung des Untergrundes unter der Wirkung äusserer Kräfte (Auflagerkräfte des Turmes), d. h. um einen *Kriechprozess*, welcher die Nachsetzung mit umfasst. Es liegt daher nahe, die gleiche Eigenschaft des Bodens, nämlich seine Kriechfähigkeit, zu verwenden, um die Schiefstellung des zu behandelnden Objektes zu korrigieren bzw. zu beeinflussen.

Um einen schiefen Turm wieder aufzurichten oder in einer bestimmten Lage zu stabilisieren, können künstlich regulierbare Kriechprozesse eingeleitet werden, die der Schiefstellung in der gewünschten Weise entgegen wirken. Nach diesem Verfahren wurde in den Jahren 1955—1956 ein 30 m hoher, im kriechenden Bergschutt fundierter Pfeiler des Castieler Viadukts¹) der Rhätischen Bahn durch einen regulierbaren Seilzug mit Erfolg behandelt. Dabei zeigte es sich, dass bei einer geeigneten Disposition die äusserlich aufgebrachten Zusatzkräfte so reguliert werden können, dass nach gegebener Zeit eine vorgeschriebene Neigung des schiefen Objektes erzielt wird. In ähnlicher Weise wurde schon in den 20er Jahren der äusserste Pfeiler des linkss seitigen Anschlussviaduktes der Eisenbahnbrücke bei Eglisau²), der sich durch den einseitigen Gewölbeschub gegen den Fluss geneigt hatte, dadurch korrigiert, dass man auf den Pfeilerkopf einen konstanten, vom eisernen Ueberbau aufgenommenen Horizontaldruck — als Ersatz für den fehlenden Gewölbeschub — wirken liess.

In gewissen Fällen, insbesondere bei berühmten Baudenk mälern, wie z. B. beim schiefen Turm von Pisa, besteht die Aufgabe bekanntlich darin, den Turm — wenn überhaupt — nur soweit aufzurichten, als dies vom Standpunkt der Sicherheit aus notwendig ist. Er muss also in einer gerade noch stabilen Lage erhalten bzw. fixiert werden, d. h. mit einer «zulässigen Schiefstellung», die seinem Weltruf als der «schiefe Turm» angemessen ist.

In diesem wie in allen andern ähnlich gelagerten Fällen wird die Aufgabe dadurch wesentlich erschwert, dass die korrigierenden Kräfte, die den stabilisierenden Kriechprozess bewirken, äusserlich nicht in Erscheinung treten sollen. Die letzte Bedingung kann dadurch erfüllt werden, dass man die Korrekturkräfte unter der Bodenoberfläche auf das betreffende Objekt bzw. dessen Fundamente angreifen lässt, was allerdings in der Regel mit einer gewissen Verteuerung der Sanierung verbunden ist. Trotzdem dürfte die genannte Methode, die nicht zuletzt auf den Fortschritten der Bodenmechanik und insbesondere auf den neuen Erkenntnissen

¹⁾ Vergleiche auch SBZ Bd. 124, S. 255 ff. (1944)

²⁾ Siehe SBZ Bd. 79, S. 133 ff. (1922); ähnlich Sitter-Brücke der BT, SBZ Bd. 83, S. 287 ff. (1924).