Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 82 (1964)
Heft: 12

Artikel: Zur Berechnung gekrümmter Brücken: Vortrag
Autor: Menn, Christian
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-67462

ORGAN DES SCHWEIZERISCHEN INGENIEUR- UND ARCHITEKTEN-VEREINS S.I.A. UND DER GESELLSCHAFT EHEMALIGER STUDIERENDER DER EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE G.E.P

Zur Berechnung gekrümmter Brücken

DK 624.072.6

Von **Christian Menn**, Dr. sc. techn. ETH, Chur

Vortrag gehalten am 8. November 1963 in Zürich vor der S. I. A.-Fachgruppe für Brückenbau und Hochbau (FGBH)

In den letzten Jahren haben sich die Projektierungsgrundlagen im Strassen- und Brückenbau wesentlich geändert. Während früher zugunsten möglichst kurzer und einfacher Kunstbauten die Linienführung der Strasse oft stark vernachlässigt wurde, stellen wir heute fest, dass die Brükken im allgemeinen zu einem mehr oder weniger untergeordneten Bestandteil der Strassen geworden sind. Die flüssige Linienführung des Strassenzuges dominiert eindeutig; auf die technischen Schwierigkeiten beim Brückenbau nimmt der Strassenprojektant sehr wenig Rücksicht.

Die Folge hievon ist, dass einfache, gerade Brücken eine seltene Ausnahme bilden, während in der Regel grosse Schwierigkeiten bezüglich Abstützung, Bauhöhe, Verwindung, Schiefe und Krümmung zu bewältigen sind. Zweifellos stellt damit die Projektierung von Brücken heute viel grössere Anforderungen an den Ingenieur. Da aber anderseits in den nächsten Jahren zahlreiche Brücken gebaut werden müssen, ist es unbedingt notwendig, dass sich die projektierenden Ingenieure vermehrt mit den etwas komplizierteren statischen Problemen befassen.

Der Modellversuch eignet sich sicher vorzüglich zur Lösung besonders unübersichtlicher und schwieriger Aufgaben; es ist aber meines Erachtens falsch und unwirtschaftlich, wenn Probleme, die der Berechnung ohne weiteres zugänglich sind, mit teuren und zeitraubenden Versuchen gelöst werden.

Die statische Berechnung gekrümmter Brücken ist durchaus nicht neu. Es finden sich diesbezügliche Angaben in den meisten Lehrbüchern [1]) und in verschiedenen wissenschaftlichen Arbeiten [2]). Eine umfassende Darstellung der Berechnungsmethoden ist natürlich im Rahmen dieses Aufsatzes nicht möglich. Ich beschränke mich deshalb darauf, einen bestimmten Sektor des Problemkreises herauszugreifen: die Berechnung des kreisförmig gekrümmten, torsionssteifen Balkens; ein Tragelement, das im Massivbrückenbau sehr häufig anzutreffen ist, denn es entspricht einem — im Vergleich zur Breite — weitgespannten, torsionssteifen Brükkenträger. Ich mache ausdrücklich darauf aufmerksam, dass die Tragwerksbreite in der Berechnung nicht erscheint. Die nachfolgenden Berechnungen verlieren somit ihre Gültigkeit, wenn das Tragwerk flächenhaften Charakter annimmt.

Das Ziel meiner Ausführungen besteht darin, zu zeigen, wie ein Träger, der den oben gemachten Voraussetzungen genügt, mit den allereinfachsten Mitteln berechnet werden kann und anhand von Vergleichen darzustellen, bei welchen Oeffnungswinkeln die Krümmung überhaupt berücksichtigt werden muss, und wie sich die Krümmung auf die Schnittkräfte auswirkt.

Die Schwierigkeit der Kreisringträgerberechnung liegt im Auftreten einer neuen Schnittgrösse — des Torsionsmomentes — die überdies noch eng mit dem Biegemoment verknüpft ist.

Die vorgeschlagene Berechnungsmethode ist auf mathematischer Grundlage aufgebaut und stellt die numerische Lösung eines mathematischen Problems dar. Sie erfordert die Kenntnis von nur drei sehr einfachen Rechenvorgängen:

1. Bestimmung der Knotenlasten, am besten mit der Parabelformel.
2. Analytische Berechnung des Seilpolygons zu lotrechten Lasten.
3. Simpson'sche Regel für die numerische Integration.

Zum besseren Verständnis soll die Methode vorerst am geraden Balken erläutert werden. Im allgemeinen Fall eines beliebig gelagerten und belasteten Trägers führen wir die Berechnung der Schnittkräfte folgendermassen durch:

1. Wahl eines Grundsystems und Berechnung der Schnittkräfte S_0.
2. Einführen von überzähligen Grössen X_i und Berechnung der zugehörigen Schnittkräfte S_i für $X_i = 1$ am Grundsystem.
3. Unter Berücksichtigung der Superpositionsgleichungen werden die Elastizitätsbedingungen aufgestellt, woraus sich die überzähligen Grössen berechnen lassen.
4. Die endgültigen Schnittgrössen S ergeben sich durch Ueberlagerung von $S_o + \sum_i X_i S_i$.

Dabei denken wir meistens gar nicht an die grundlegende Differentialgleichung des geraden Balkens, in deren Lösung ja alle Balkenprobleme eingeschlossen sind. Sie lautet

$$M'' = -p \tag{1}$$

und hat die Lösung

$$M = C_1 x + C_2 + f(x)\,, \tag{2}$$

wobei $f(x)$ irgend ein partikuläres Integral der Differentialgleichung $f''(x) = -p$ darstellt.

In Bild 1 ist die partikuläre Lösung $f(x)$ — deren Anfangs- oder Randbedingungen natürlich durchaus frei sind — und die Gerade $C_1 x + C_2$ dargestellt. In die Sprache der Baustatik übertragen, bedeutet $f(x)$ irgend ein Seilpolygon zu den vorgegebenen lotrechten Lasten und die Gerade $C_1x + C_2$ stellt die Schlusslinie des Seilpolygons dar, die den Rand- bzw. Auflagerbedingungen Rechnung trägt.

Die Berechnung eines Balkens soll nun noch kurz an einem Beispiel gezeigt werden. Wir wählen einen Balken von der Länge l, der in der Mitte durch eine Last P belastet wird; die Lagerung soll vorläufig noch frei sein (Bild 2).

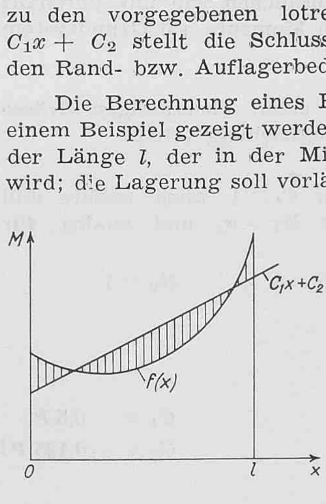


Bild 1

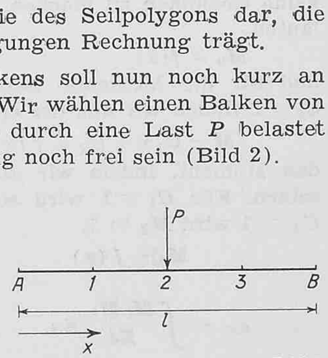


Bild 2

[1]) *K. Beyer:* Die Statik im Stahlbetonbau; Springer-Verlag, Berlin 1956.

K. Hirschfeld: Baustatik; Springer-Verlag, Berlin 1959.

[2]) *F. Stüssi:* Zur Berechnung von Stahlbrücken mit gekrümmten Haupt-Trägern. Denkschrift der ETH zum hundertjährigen Bestehen des S. I. A., Zürich 1937.

J. Courbon: Théorie des ponts courbes, «Annales des ponts et chaussées», Paris 1961.

Zunächst ermitteln wir nun eine partikuläre Lösung der Gleichung $f''(x) = -p$. Am einfachsten erfolgt diese Integration mit der ganz gewöhnlichen Seilpolygonrechnung für den einfachen Balken (s. *F. Stüssi*: Baustatik I, Verlag Birkhäuser, Basel 1946). In Tabelle 1 sind die Berechnungspunkte, die Knotenlasten, die Zwischendistanzen, die Querkräfte bzw. die Funktion $f'(x)$ und die Momente bzw. die Funktion $f(x)$ eingetragen. Da wir für die partikuläre Lösung keine Randbedingungen zu erfüllen haben, beginnen wir die Integration vom Balkenende A aus und setzen vollständig willkürlich — dies sei nochmals betont —

$$f'_{x=0} \text{ und } f_{x=0} = 0\,.$$

Nun untersuchen wir einige Randbedingungen (Bild 3). Zuerst den links freien und rechts eingespannten Balken.

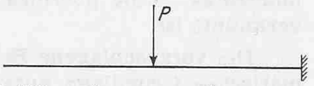


Bild 3

$$x = 0 \qquad M = 0 \longrightarrow C_2 + f(0) = 0 \qquad C_2 = 0$$
$$x = 0 \quad Q = M' = 0 \longrightarrow C_1 + f'(0) = 0 \qquad C_1 = 0$$

Aus den Randbedingungen am linken Balkenende (M und Q sind hier null) erhalten wir durch Einsetzen der Werte $f(0) = 0$ bzw. $f'(0) = 0$ in die Lösung der Differentialgleichung (Gl. 2) direkt die Grösse von C_1 und C_2. Im vorliegenden Fall werden beide Konstanten null. Unsere Partikularlösung erfüllt somit an sich schon die vorgegebenen Randbedingungen. Das Moment ist identisch mit $f(x)$; $M = f(x)$.

Im nächsten Beispiel (Bild 4) ist der Balken an beiden Enden frei drehbar gelagert. Nun formulieren wir die Randbedingungen für beide Auflagerpunkte $x = 0$ und $x = l$, da hier das Moment null sein muss. Auch diesmal lassen

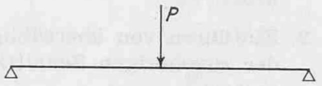


Bild 4

$$x = 0 \qquad M = 0 \longrightarrow C_2 + f(0) \qquad = 0 \qquad C_2 = 0$$
$$x = l \qquad M = 0 \longrightarrow C_1\, l + C_2 + f(l) = 0 \qquad C_1 = 0{,}5\,P$$

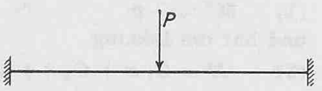
sich C_1 und C_2 direkt berechnen. Die Gleichung der Momentenfläche lautet:

$$M = 0{,}5\,Px + f(x).$$

Das dritte Beispiel (Bild 5) behandelt einen beidseits fest eingespannten Balken. Aus den Randbedingungen für $x = 0$ bzw. $x = l$ lässt sich aber keine Gleichung für die Konstanten ableiten. Wir gehen daher auf den baustatischen

Bild 5

$$x = 0 \qquad \alpha_1 = 0$$
$$x = l \qquad \alpha_2 = 0$$



Lösungsweg über, indem wir von der Tatsache Gebrauch machen, dass $f(x)$ die Lösung an irgendeinem Grundsystem darstellt und C_1 und C_2 als überzählige Grössen aufgefasst werden können.

Ueber die Art des Grundsystems oder die baustatische Bedeutung der Konstanten C brauchen wir uns durchaus keine Gedanken zu machen. Die Momente am Grundsystem lauten

$$M_0 = f(x)$$

und für die Momente infolge einer überzähligen Grösse $C_i = 1$ finden wir aus der Grundgleichung (Gl. 2)

$$M = C_1 x + C_2 + f(x)$$

das Moment, indem wir ausser $C_i = 1$ alles andere null setzen. Für $C_1 = 1$ wird somit $M_1 = x$, und analog für $C_2 = 1$ wird $M_2 = 1$.

$$M_0 = f(x) \qquad M_1 = x \qquad M_2 = 1$$

$$\alpha_{ik} = \int_l \frac{M_i\, M_k}{EJ}\, ds$$

$$C_1\,\alpha_{11} + C_2\,\alpha_{12} = -\alpha_{10} \qquad C_1 = 0{,}5\,P$$
$$C_1\,\alpha_{21} + C_2\,\alpha_{22} = -\alpha_{20} \qquad C_2 = -0{,}125\,Pl$$

Tabelle 1

Schnitt	K t	λ m	f'(x) t	f(x) mt
A	0			0
		$l/4$	0	
1	0			0
		$l/4$	0	
2	P			0
		$l/4$	$-P$	
3	0			$-Pl/4$
		$l/4$	$-P$	
B	0			$-Pl/2$

Mit diesen Momenten M_0, M_1 und M_2 berechnen wir nun mittels der Arbeitsgleichung die Koeffizienten α_{ik}, und die Elastizitätsbedingungen liefern uns ein Gleichungssystem für C_1 und C_2. Im vorliegenden Fall ergibt die Auflösung $C_1 = 0{,}5\,P$ und $C_2 = -0{,}125\,Pl$. Die endgültige Momentengleichung lautet:

$$M = 0{,}5\,Px - 0{,}125\,Pl + f(x)\,.$$

Aus diesen Berechnungen können wir einige wichtige Folgerungen ziehen:

Sobald wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung kennen, berechnen wir vorerst ein partikuläres Integral. Handelt es sich dann um einen statisch bestimmt gelagerten Balken, ergeben sich die Integrationskonstanten direkt aus den Randbedingungen und das Problem ist gelöst. Ist der Balken jedoch statisch unbestimmt gelagert, müssen wir die Integrationskonstanten aus den Elastizitätsbedingungen bestimmen. Dabei sind die Momente am Grundsystem identisch mit der partikulären Lösung und die Momente infolge einer Einheitsüberzähligen-Grösse erhalten wir, indem wir in der Differentialgleichungs-Lösung die entsprechenden Konstanten 1 und alle anderen Ausdrücke null setzen. Es sei nochmals betont, dass uns die statische Bedeutung des Grundsystems nicht interessiert und dass wir für jede partikuläre Lösung bzw. für jedes Grundsystem mit den gleichen überzähligen Grössen arbeiten, deren statische Bedeutung ebenfalls belanglos ist.

Mit dieser Methode wollen wir nun den Kreisringträger behandeln, und wir leiten deshalb vorerst die entsprechende Differentialgleichung ab.

Der Kreisringträger

In Bild 6 ist ein Kreisringträger dargestellt. Die Verschiebung und die Verdrehung eines Trägerelementes, die angreifende Schnittkraft und das angreifende Schnittmoment lauten in vektorieller Schreibweise (Einheitsvektoren $\vec{t}$, $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$):

$$\text{Verschiebung:} \qquad \vec{v} = u\,\vec{t} + v\,\vec{n}_1 + w\,\vec{n}_2$$

$$\text{Verdrehung:} \qquad \vec{d} = \chi\,\vec{t} + \gamma_1\,\vec{n}_1 + \gamma_2\,\vec{n}_2$$

(3)

$$\text{Schnittkraft:} \qquad \vec{S} = N\,\vec{t} + Q_1\,\vec{n}_1 + Q_2\,\vec{n}_2$$

$$\text{Schnittmoment:} \qquad \vec{M} = M_T\,\vec{t} + M_1\,\vec{n}_1 + M_2\,\vec{n}_2$$

Die gültige Vorzeichenregelung ist aus Bild 6 ersichtlich. Die Last greift mit einer Exzentrizität e am Träger an. Der Radius des Trägers ist mit a bezeichnet. Bei lotrechter Belastung verschwinden bei der Schnittkraft die Komponenten N und Q_1, beim Schnittmoment die Komponente M_2.

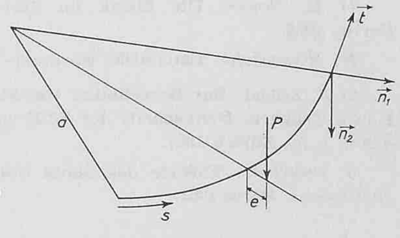


Bild 6

Der Einfachheit halber bezeichnen wir im folgenden Q_2 mit Q und M_1 mit M. Die Differentialgleichung lautet:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dQ}{ds} = -p \\
(4)\qquad &\frac{dM_T}{ds} + \frac{M}{a} = -ep \\
&\frac{dM}{ds} - \frac{M_T}{a} = Q
\end{aligned}
$$

Man findet diese Differentialgleichung in der Literatur [3]. Die Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$
\begin{aligned}
&Q = -\int_0^s p\,ds + X_1 \\
&M = X_2 \sin {}^s/_a + X_3 \cos {}^s/_a + f(s) \\
(5)\qquad &M_T = X_2 \cos {}^s/_a - X_3 \sin {}^s/_a - a X_1 + a \int_0^s p\,ds + a f'(s) \\
&\text{mit } f''(s) + \frac{1}{a^2} f(s) = -p \left(1 + \frac{e}{a}\right)
\end{aligned}
$$

Diese Ausdrücke können ohne weiteres durch Einsetzen in die Differentialgleichung verifiziert werden.

Wir kennen nun alles, was wir für die konkrete Berechnung brauchen, und können sofort mit der Lösung eines Beispiels beginnen.

Beispiel 1

Wir wählen einen 32 m langen Träger mit 50 m Radius (Bild 7). Die Belastung beträgt 10 t/m, die Exzentrizität 0. An beiden Auflagern ist der Träger frei drehbar gelagert und torsionsfest eingespannt; das Tragwerk ist somit einfach statisch unbestimmt. In einer ersten Phase müssen wir ein partikuläres Integral der Differentialgleichung

$$f''(s) + \frac{1}{a^2} f(s) = -p$$

berechnen.

Es wäre ohne weiteres möglich, diese Differentialgleichung mit der allgemeinen Seilpolygongleichung direkt zu lösen. Ich verweise auf die diesbezüglichen Ausführungen im Lehrbuch *F. Stüssi:* Entwurf und Berechnung von Stahlbauten, Springer-Verlag, Berlin 1958. Unsere Differentialgleichung ist übrigens analog gebaut wie diejenige des querbelasteten Zugstabes. Da nur ein partikuläres Integral erforderlich ist, könnte man sich — wie bei einem Anfangswertproblem — zwei Werte z. B. $f(0)$ und $f(1)$ vorgeben. Die übrigen Werte $f(s)$ liessen sich dann — ohne Gleichungssystem — mit Rekursformeln berechnen.

Ein etwas anderer Lösungsweg — der sehr einfach und übersichtlich ist und zudem den Vorteil hat, dass der Krümmungseinfluss direkt sichtbar wird — kann mit einem Iterationsverfahren gefunden werden. Die Differentialgleichung

$$f''(s) + (1/a^2)\, f(s) = -p$$

wird in der Form

$$f''(s) = -p - (1/a^2) f(s)$$

geschrieben. Das Glied $(1/a^2) f(s)$ ist sehr klein gegenüber p und man erhält eine erste Näherung durch Auflösen der Differentialgleichung $f_1''(s) = -p$, der gewöhnlichen Balkengleichung. $f_1(s)$ kann somit mit einer einfachen Seilpolygonrechnung ermittelt werden. Die Berechnung ist in Tabelle 2 durchgeführt.

[3] u. a. *C. Menn:* Kreisringträger und Wendelfläche, Diss., Druckerei Leemann AG, Zürich 1956.

$l = 32$ m
$a = 50$ m
$p = 10$ t/m
$e = 0$

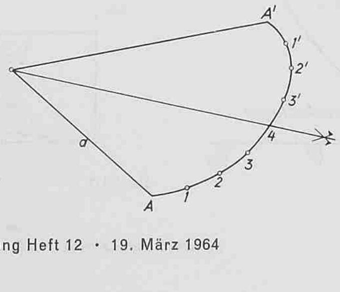
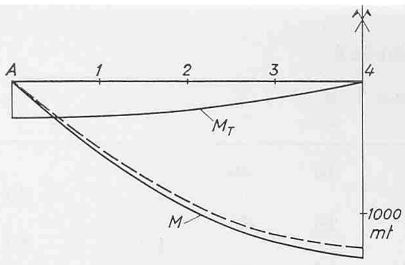


Bild 7

Bild 8



Im nächsten Schritt wird die zweite Näherung

$$f_2''(s) = -p - (1/a^2)\, f_1(s)$$

berechnet, d. h. die Seilpolygonrechnung wird für eine korrigierte Belastung wiederholt. Man sieht sofort, dass das Verfahren sehr rasch konvergiert, da die ursprüngliche Belastung von 10 t/m mit $(1/a^2) f_1(s)$ nur wenig verändert wird. Das Endergebnis findet sich in Tabelle 3. $f'(s)$ in den Knotenpunkten wurde durch Aufsummieren von $p + (1/a^2) f(s)$ (Parabelformel) erhalten.

In der zweiten Phase sind die Integrationskonstanten zu bestimmen. Wie man sieht, erfüllt die partikuläre Lösung $f(s)$ bereits die Anfangsbedingungen für M; X_2 und X_3 sind somit null. X_1 müsste eigentlich — weil unser System einfach statisch unbestimmt gelagert ist — aus einer Elastizitätsbedingung ermittelt werden. Im vorliegenden Fall genügt aber eine Symmetriebetrachtung für Q oder M_T, da diese beiden Schnittgrössen in Trägermitte null sein müssen. Hieraus folgt für X_1 160 t.

Bild 8 zeigt den Verlauf von M und M_T, wobei gestrichelt das Moment am geraden Balken angedeutet ist. M_T ist am Auflager am grössten. Dies war schon aus der Differentialgleichung ersichtlich, da für $e = 0$ M_T am Momentennullpunkt extremal wird.

Beispiel 2

Im zweiten Beispiel wird der gleiche Kreisringträger — diesmal jedoch mit biegefester Einspannung an beiden Auflagern — berechnet. Zunächst wird wieder ein partikuläres Integral ermittelt. Die Seilpolygonrechnung führen wir — von der Trägermitte ausgehend — am rechten Trägerteil über die Punkte 4—3'—2'—1'—A' durch (Tab. 4). Es besteht natürlich kein Zwang zu diesem Vorgehen. Wir werden aber sehen, dass wir damit die Symmetriebedingungen leichter ausnützen können ($\varphi = 0$ in Punkt 4). Die Endwerte der Iteration finden sich in Tabelle 5.

Ganz analog der eingangs durchgeführten Berechnung des eingespannten Balkens nehmen wir nun an, dass das partikuläre Integral die Schnittkräfte am Grundsystem liefert. Die Schnittgrössen infolge der überzähligen Grössen

Tabelle 2

Schnitt	p t/m	K t	λ m	$f_1'(s)$ t	$f_1(s)$ mt	$(1/a^2) f_1(s)$ t/m
A	10				0	0
			4,0	140		
1	10	40			560	0,224
			4,0	100		
2	10	40			960	0,384
			4,0	60		
3	10	40			1200	0,480
			4,0	20		
4	10	40			1280	0,512

Tabelle 3

Schnitt	$f(s)$ mt	$f'(s)$ t	$\int_0^s p\,ds$ t
A	0	165,60	0
1	582,11	125,14	40
2	1000,58	83,87	80
3	1252,74	42,07	120
4	1336,97	0	160

Tabelle 4

Schnitt	p t/m	K t	λ m	$f'(s)$ t	$f(s)$ mt	$(1/a^2)\,f(s)$ t/m
4	10	40			0	0
			4,0	— 20		
3′	10	40			— 80	—0,032
			4,0	— 60		
2′	10	40			— 320	—0,128
			4,0	—100		
1′	10	40			— 720	—0,288
			4,0	—140		
A′	10	40			—1280	—0,512

Tabelle 5

Schnitt	$f(s)$ mt	$f'(s)$ t	$\int_0^s p\,ds$ t	Q_0 t	M_0 mt	M_{T0} mt	s/a
4	0	0	0	0	0	0	0
3′	— 79,96	— 39,94	40	— 40	— 79,96	3,25	0,08
2′	— 319,31	— 79,62	80	— 80	— 319,31	19,25	0,16
1′	— 716,54	—118,79	120	—120	— 716,54	60,70	0,24
A′	—1269,10	—157,20	160	—160	—1269,10	140,15	0,32

X_1, X_2 und X_3, können aus den Grundgleichungen für Q, M und M_T abgeleitet werden, indem nacheinander X_1, X_2 und $X_3 = 1$ gesetzt werden.

$$Q_0 = -\int_0^s p\,ds$$

$$M_0 = f(s)$$

$$M_{T0} = a\int_0^s p\,ds + a f'(s)$$

$$\begin{array}{lll} X_1 = 1{:}\;\; Q_1 = 1 & X_2 = 1{:}\;\; Q_2 = 0 & X_3 = 1{:}\;\; Q_3 = 0 \\ M_1 = 0 & M_2 = \sin {}^s/_a & M_3 = \cos {}^s/_a \\ M_{T1} = -a & M_{T2} = \cos {}^s/_a & M_{T3} = -\sin {}^s/_a \end{array}$$

Die Elastizitätsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_{10} + X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_3\,\delta_{13} = 0 \\ \delta_2 &= \delta_{20} + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = 0 \\ \delta_3 &= \delta_{30} + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Die einzelnen Koeffizienten werden mit der Arbeitsgleichung berechnet, wobei man zur Integration zweckmässigerweise die Simpsonsche Regel anwendet.

Im Gegensatz zum geraden Balken muss zur Erreichung der erforderlichen Genauigkeit ausser dem Biegemoment auch das Torsionsmoment in die Integration einbezogen werden; der Einfluss der Querkraft ist nach wie vor vernachlässigbar klein. Der Koeffizient δ_{ik} ergibt sich somit aus

$$\int_s \frac{M_i M_k}{EJ}\,ds + \int_s \frac{M_{Ti}\,M_{Tk}}{G\,J_T}\,ds \tag{7}$$

Da wir von der Trägermitte aus gesehen über den Bereich $-s_o$ bis $+s_o$ intergrieren, verschwinden die Integrale der ungeraden Funktionen (x, $\sin x$, $\sin x \cos x$ usw.).

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & X_2 & X_3 & & \\ * & * & 0 & = & -\delta_{10} \\ * & * & 0 & = & -\delta_{20} \\ 0 & 0 & * & = & -\delta_{30} \end{array}$$

Das Gleichungssystem der Elastizitätsbedingung spaltet sich in zwei voneinander unabhängige Teile auf: X_1 und X_2 für den unsymmetrischen Anteil und X_3 für den symmetrischen Anteil. Da die Belastung ebenfalls symmetrisch verteilt ist, verschwinden auch δ_{10} und δ_{20}; es verbleibt lediglich die dritte Zeile

$$X_3\;\delta_{33} = -\delta_{30}.$$

Die Berechnung von X_3 ist sehr einfach:

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ}\left[s_0\,(1+\lambda) + \frac{a \sin 2\,{}^{s_0}/_a}{2}\,(1-\lambda)\right] \quad \lambda = \frac{EJ}{GJ_T}$$

$$\delta_{30} = \int_s \frac{M_0 \cos {}^s/_a}{EJ}\,ds - \int_s \frac{M_{T0} \sin {}^s/_a}{G\,J_T}\,ds \tag{8}$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}}$$

und wir gelangen zu den endgültigen Werten für Q, M und M_T.

$$\begin{aligned} Q &= -\int_0^s p\,ds \\ M &= X_3 \cos {}^s/_a + f(s) \\ M_T &= -X_3 \sin {}^s/_a + a\left[\int_0^s p\,ds + f'(s)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

Der Verlauf von M und M_T ist in Bild 9 graphisch dargestellt. Es ist zu beachten, dass M_T bei der Momentennullstelle ein Maximum aufweist. Es ist wichtig, zu wissen, dass beim eingespannten Balken das Torsionsmoment ungefähr im Trägerviertel extremal wird und ja nicht etwa am Auflager.

Vergleich

In Bild 10 sind das Biege- und Torsionsmoment bei verschieden starker Krümmung des Trägers dargestellt. Länge und Belastung der Träger sind gleich angenommen wie in den vorhergehenden Beispielen. Die Trägerlänge beträgt 32 m und die Belastung 10 t/m. Die Beispiele wurden für verschiedene Krümmungsradien durchgerechnet. Auf der Abszisse ist der Oeffnungswinkel φ_0 angegeben. $\varphi_0 = 0$ bedeutet, dass der Radius ∞ gross ist; das entspricht dem geraden Balken. $\varphi_0 = 1$ bedeutet, dass Radius und Trägerlänge gleich sind (φ von A aus gemessen).

Wir stellen nun fest, dass bei freier Auflagerung das Biegemoment mit zunehmendem Oeffnungswinkel grösser wird — die 10%-Abweichung gegenüber dem geraden Balken liegt bei rd. $\varphi_0 = 0{,}95$ — und dass das Torsionsmoment schon bei kleinem φ_0 sehr stark anwächst, d. h. schon bei $\varphi_0 = 0{,}5$ muss ein frei aufliegender Träger, dessen Dimensionen auf das Biegemoment abgestimmt sind, bereits kräftig auf Schub armiert werden.

Beim eingespannten Träger nimmt das Moment in Trägermitte bei wachsendem φ_0 leicht ab (das Einspannmoment verändert sich gleich). Die 10%-Grenze liegt bei rd. $\varphi_0 = 1{,}6$ und das Torsionsmoment wächst ebenfalls nur langsam mit zunehmender Krümmung.

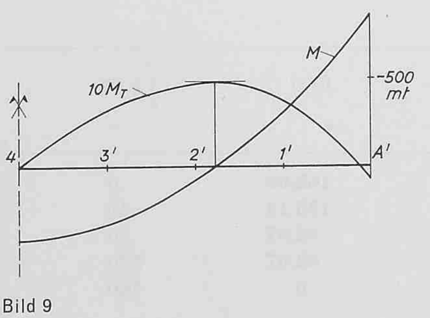


Bild 9

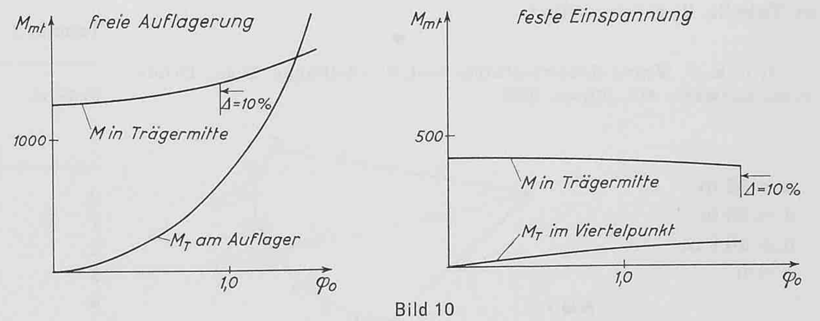


Bild 10

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass bei $\varphi_0 < 1$ das Biegemoment wie bei einem geraden Balken, dessen Spannweite der Trägerabwicklung entspricht, berechnet werden darf. Dem Torsionsmoment ist aber in jedem Fall Aufmerksamkeit zu schenken. Beim frei aufliegenden Träger, weil es sehr rasch und stark anwächst, beim eingespannten Träger, weil das Maximum ungefähr im Trägerviertel auftritt, wo die Druckplatte eines Kastenquerschnitts, die meistens die geringste Stärke und somit die grössten Schubspannungen aufweist, keine Voutenverstärkung mehr besitzt.

Näherungsberechnung

Aus der Tatsache, dass das Biegemoment am Kreisringträger keine grossen Abweichungen gegenüber dem geraden Balken aufweist, kann eine sehr einfache Näherungsberechnung abgeleitet werden.

Wir berechnen zu diesem Zweck vorerst das Biegemoment am geraden Balken, dessen Spannweite der Trägerabwicklung entspricht. Das Torsionsmoment kann dann aus zwei Anteilen zusammengesetzt werden (Bild 11). Der erste Anteil wird aus der äusseren Belastung abgeleitet. Die auf dem Kreis angreifenden Lasten weisen gegenüber der Sehne eine Exzentrizität auf; in der Sehne, dem geraden Balken, müsste somit ein Torsionsmoment $\overline{M}_{T1}$ entstehen. Zerlegt man dieses Torsionsmoment in die dem Kreisringträger entsprechenden Komponenten, so ergibt sich für den Kreisringträger das Torsionsmoment M_{T1} zu

$$M_{T1} = \overline{M}_{T1} \cos \varphi$$

Der zweite Torsionsmomentanteil wird aus dem Biegemoment des geraden Balkens abgeleitet. Wenn dieses Biegemoment $\overline{M}$ beträgt und in seine Komponenten zerlegt wird, entfällt auf den Kreisringträger als Torsionsmomentenanteil

$$M_{T2} = -\overline{M} \sin \varphi$$

Das vollständige Torsionsmoment beträgt:

$$M_T = M_{T1} + M_{T2}$$

Durchlaufwirkung

Zur Berücksichtigung der Durchlaufwirkung soll noch kurz ein Verfahren erläutert werden, das grundsätzlich gleich aufgebaut ist, wie die Dreimomentengleichung am geraden Durchlaufträger. Voraussetzung für diesen Berechnungsgang ist, dass der Träger über den Stützen keine Drehung um seine Axe ausführen kann, d. h. der Träger ist über den Stützen torsionsfest eingespannt.

Als Grundsystem unserer Berechnung dient der frei drehbar gelagerte Kreisringträger. Vorerst werden an diesem Grundsystem, das mit einer überzähligen Torsionseinspannung selber einfach statisch unbestimmt ist, die Schnittgrössen M_o, M_{To} und Q_o berechnet. An diesem statisch unbestimmten Grundsystem bringen wir als überzählige Grössen zur Berückichtigung der Durchlaufwirkung an den Auflagern die Momente M_l und M_r an, die den Momenten M_1 und M_2, die wir in der Baustatik verwenden, entsprechen (Bild 12).

Für diese überzähligen Grössen müssen wir noch den Momentenverlauf am Grundsystem berechnen. Ich zeige im folgenden, wie die Berechnung für M_l durchzuführen ist. Wir verlangen, dass am linken Auflager das Moment 1, am rechten Auflager das Moment null, entsteht. Da keine äusseren Lasten vorhanden sind, verschwindet das partikuläre Integral und wir entnehmen der Lösung der Differentialgleichung (Gl. 5)

$$M = X_2 \sin {}^s/_a + X_3 \cos {}^s/_a$$
$$M_T = X_2 \cos {}^s/_a - X_3 \sin {}^s/_a - a\,X_1$$

Zwei Konstanten, nämlich X_2 und X_3, lassen sich direkt bestimmen. Die Randbedingungen für M_l sind — wie bereits gesagt — für $s = 0 \rightarrow M = 1$ und es folgt $X_3 = 1$ und für $s = l \rightarrow M = 0$ und es folgt $X_2 = -\operatorname{ctg} {}^l/_a$.

M infolge $M_l = 1$ ist damit vollständig bestimmt, während für M_T noch X_1 aus der Elastizitätsbedingung $\delta_1 = \delta_{10} + X_1\,\delta_{11}$ zu berechnen ist.

Die Momente am Grundsystem lauten:

$$M_{10} = -\operatorname{ctg} {}^l/_a \sin {}^s/_a + \cos {}^s/_a$$
$$M_{T0} = -\operatorname{ctg} {}^l/_a \cos {}^s/_a - \sin {}^s/_a$$

und für $X_1 = 1$

$$M_{11} = 0$$
$$M_{T11} = -a$$

Damit ergibt die Rechnung für konstantes Torsionsträgheitsmoment $X_1 = -{}^1/_l$. Analog gehen wir für die Bestimmung der Schnittmomente infolge $M_r = 1$ vor.

Da wir nun M_o und M_{To} am Grundsystem und M und M_T infolge $M_l = 1$ bzw. $M_r = 1$ kennen, können mit der Arbeitsgleichung ohne weiteres die Auflagerdrehwinkel am Grundsystem infolge der äusseren Last und der Trägerfestwerte $M_l = 1$ und $M_r = 1$ berechnet werden. Die Elastizitätsbedingungen für γ ergeben dann das Gleichungssystem zur Bestimmung der effektiven Grösse von M_l und M_r und durch Superposition findet man die endgültigen Schnittgrössen.

Die Berücksichtigung der Vorspannung

Die grundlegenden Eigenschaften der Vorspannung bleiben natürlich auch bei gekrümmten Trägern erhalten. So sind bei einem statisch bestimmt gelagerten Träger Beton- und Stahlspannungen gesamthaft betrachtet in jedem Schnitt im Gleichgewicht und wie bei jedem Eigenspannungszustand sind wohl Tragwerksverformungen, aber keine Auflagerreaktionen feststellbar. Erst die Behinderung der Verformungen durch statisch unbestimmte Lagerung hat Auflagerreaktionen zur Folge, die ihrerseits wieder das Kräftespiel im Träger beeinflussen.

Hieraus ergibt sich die wichtige Feststellung, dass die Vorspannung bei statisch bestimmt gelagerten Trägern im allgemeinen wohl Biegemomente, in keinem Fall jedoch Torsionsmomente erzeugt. Man sieht ebenfalls ohne weiteres ein, dass z. B. zentrische Vorspannung auch bei einem gekrümmten Träger nur zentrischen Druck verursacht, darf dabei aber keinesfalls die sekundären Wirkungen der Vorspannung übersehen; denn die aus der Kabel-Krümmung im Grundriss entstehenden horizontalen Umlenkkräfte haben die Tendenz, die Vorspannkabel aus dem Betonquerschnitt herauszureissen, und es ist deshalb sehr wichtig, dass jene Spannkabel, die auf der konkaven Seite des Querschnitts verlaufen, genügend stark in den Beton hineingebunden werden.

Die Wirkung der Vorspannung ist nun aber bei gekrümmten Trägern nicht so günstig wie bei geraden oder schiefen Balken. Wohl können auch im gekrümmten Tragwerk die Biegemomente nach Belieben kompensiert werden, und die durch die Vorspannung erzeugten Betondruckspannungen wirken sich insofern günstig aus, als damit die Hauptzugspannungen infolge Torsion abgemindert werden können. Da aber bei Vollast in der dünnen unteren Platte in den Trägerviertelpunkten meist nur noch geringe Druckreserven vorhanden sind, fällt dieser Vorteil der Vorspannung oft nicht stark ins Gewicht.

Besonders schwierig ist eine geeignete Beeinflussung der Torsionsmomente, kann doch hier oft der Fall eintreten, dass das Torsionsmoment infolge Vorspannung im kritischen Schnitt gleich gerichtet ist wie das Torsionsmoment

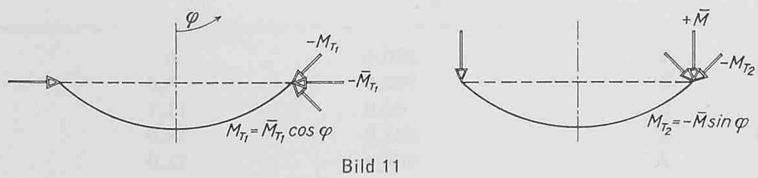


Bild 11

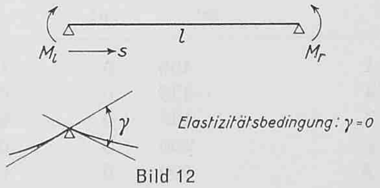


Bild 12

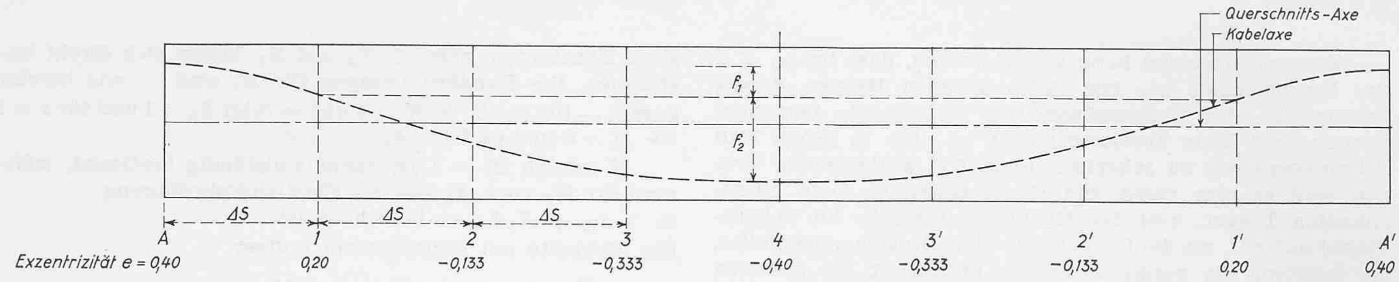


Bild 13. Trägerabwicklung. Längen 1:200, Höhen 1:50

zufolge der äusseren Lasten. Dies bedeutet, dass die Vorspannung die ungünstigsten Torsionsmomente nicht abbaut, sondern im Gegenteil vergrössert.

An einem Beispiel soll nun noch die Berechnung der Schnittkräfte infolge Vorspannung durchgeführt werden. Wir wählen dafür wieder einen Träger von 32 m Länge und einem Krümmungsradius von 50 m. Der Träger sei an beiden Auflagern biege- und torsionsfest eingespannt. Bei einer Trägerhöhe von 1,0 m verläuft die Vorspannung — wie aus Bild 13 ersichtlich ist — symmetrisch in Form von aneinandergefügten Parabeln zweiter Ordnung. Im Punkt 1 bzw. 1' weisen diese Parabeln eine gemeinsame Tangente auf. Die Berechnung der Schnittkräfte kann nun entweder mit Hilfe der Umlenkkräfte oder — viel einfacher — direkt in der nachfolgend beschriebenen Art durchgeführt werden.

Wir schreiben die Differentialgleichung (4) in der Form

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{dQ}{ds} &= -p \\ \frac{dM_T}{ds} + \frac{M}{a} &= -m_t \\ \frac{dM}{ds} - \frac{M_T}{a} &= Q \end{aligned}$$

wobei p die Umlenkkraft der Vorspannung in vertikaler Richtung und m_t das tordierende Moment der Umlenkkräfte der Vorspannung in horizontaler Richtung bedeuten. Die Lösung dieser Differentialgleichung wird ebenfalls in etwas abgeänderter Form angeschrieben:

$$(11)\qquad \begin{aligned} Q &= Q_0 + X_1 \\ M &= X_2 \sin {}^s/_a + X_3 \cos {}^s/_a + M_0 \\ M_T &= X_2 \cos {}^s/_a - X_3 \sin {}^s/_a - a X_1 - a Q_0 + a M_0' \\ \text{mit}\quad M_0'' &+ \frac{1}{a^2} M_0 = -p - \frac{m_t}{a} \end{aligned}$$

Q_0 und M_0, die Querkraft bzw. das Moment infolge Vorspannung am statisch bestimmten Grundsystem, sind aus der Kabelneigung und der Kabellage in jedem Querschnitt direkt ersichtlich und krümmungsunabhängig. Deshalb verschwindet in Gl. (11) — wie zu erwarten war — das Torsionsmoment am Grundsystem.

$$M_{T0} = -a Q_0 + a M_0' = 0\,;$$

und die partikuläre Differentialgleichung

$$M_0'' + \frac{1}{a^2} M_0 = -p - \frac{m_t}{a}$$

ist a priori erfüllt.

Für die Berechnung der überzähligen Grösse X_3 (X_1 und X_2 verschwinden aus Symmetriegründen) dienen die Ausgangswerte der Tabelle 6 (φ bzw. ${}^s/_a$ von Punkt 4 aus gerechnet).

Die Integration (Simpson'sche Regel) ergibt die Koeffizienten δ_{30} und δ_{33} nach Formel (7) und es folgt

$$X_3 = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} = 69{,}6\,\text{mt}$$

Die Superposition liefert die endgültigen Werte am beidseitig biege- und torsionsfest eingespannten Träger (Tab. 7).

Das gleiche Beispiel soll nun noch durch Einführen der Umlenkkräfte berechnet werden. Wie aus Bild 13 ersichtlich ist, betragen die vertikalen Umlenkkräfte in den Berechnungspunkten A, 1, 2, 3, 4 . . .

$$A : q_v = \frac{8 f_1 V}{(2\Delta s)^2} = 25\,\text{t/m}$$

$$1 \div 4 : q_v = -\frac{8 f_2 V}{(6\Delta s)^2} = -8{,}33\,..\,\text{t/m}$$

Die horizontalen Umlenkkräfte sind auf der ganzen Trägerlänge konstant:

$$q_h = \frac{V}{a} = 20\,\text{t/m}$$

Unter Berücksichtigung der Kabelexzentrizität in den einzelnen Schnitten findet man die tordierenden Momente m_t (Tabelle 8).

Da vertikale und horizontale Umlenkkräfte wie äussere Lasten aufgefasst werden, wenden wir wieder die hiefür beschriebene Methode an und ermitteln ein partikuläres Integral der Differentialgleichung

$$f''(s) = -p - \frac{m_t}{a} - \frac{1}{a^2} f(s)$$

Der erste Iterationsschnitt ist in Tabelle 9 dargestellt. Auch hier konvergiert die Iteration sehr schnell. Tabelle 10 zeigt die endgültigen Lösungswerte der partikulären Differentialgleichung.

Da mit den Umlenkkräften allein die Höhenlage des Vorspannkabels im Träger noch nicht fixiert ist, muss den Werten der Tabelle 10 zur Bestimmung der Schnittkräfte am statisch bestimmten Grundsystem noch eine Randstörung, die die Höhenlage der Vorspannung definiert, überlagert werden. Im Schnitt 4 beträgt das Randmoment

$$M_R = V e_{(4)} = -400\,\text{mt}$$

und der Einfluss von M_R in den übrigen Schnitten ist nach Gl. (11):

$$M = M_R \cos {}^s/_a$$

$$M_T = -M_R \sin {}^s/_a$$

Wie zu erwarten war, hat somit die Berechnung über die Umlenkkräfte zu den gleichen Schnittmomenten am Grund-

Tabelle 6

Schnitt	M_0 mt	M_{T0} mt	$M_3 = \cos s/a$	$M_{T3} = -\sin s/a$
4	—400	0	1,0	0
3'	—333	0	0,99680	—0,07991
2'	—133	0	0,98723	—0,15932
1'	200	0	0,97134	—0,23770
A'	400	0	0,94924	—0,31457

Tabelle 7

Schnitt	M mt	M_T mt
4	—330,4	0
3'	—263,9	— 5,6
2'	— 64,6	—11,1
1'	267,6	—16,5
A'	466,1	—21,9

Bild 14

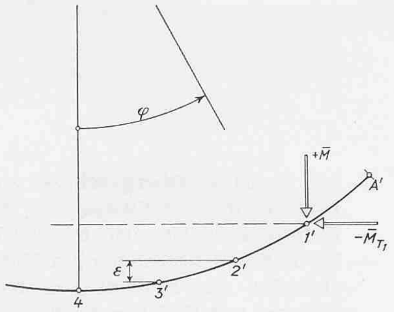


Tabelle 8

Schnitt	q_h t/m	e m	m_t mt/m
4	20,0	0,4	8,0
3′	20,0	0,333	6,66
2′	20,0	0,133	2,66
1′	20,0	—0,20	—4,0
A′	20,0	—0,40	—8,0

Tabelle 9

Schnitt	p t/m	m_t/a t/m	K t	$f_1'(s)$ t	$f_1(s)$ mt	$(1/a^2)\,f(s)$ t/m
4	— 8,33	0,16	—16,355		0	0
				16,355		
3′	— 8,33	0,133	—32,817		65,42	0,026
				49,172		
2′	—8,33	0,053	—33,137		262,11	0,105
				82,309		
1′	—8,33 +25,0	—0,08	33,031		591,34	0,237
				49,278		
A′	+25,0	—0,16	49,706		788,46	0,315

Tabelle 10

Schnitt	$M = f(s)$ mt	$f'(s)$ t	$\int_0^s p\,ds$ t	M_T mt
4	0	0	0	0
3′	65,39	32,70	— 33,33	— 31,9
2′	261,56	65,39	— 66,66	— 63,7
1′	588,53	98,10	—100,0	— 95,1
A′	779,69	—2,51	0,0	—125,7

Tabelle 11

Schnitt	$M = M_R \cos\varphi$ mt	$M_T = -M_R \sin\varphi$ mt	M_0 mt	M_{T0} mt
4	—400,0	0	—400,0	0
3′	—398,72	31,9	—333,3	0
2′	—394,89	63,7	—133,3	0
1′	—388,54	95,1	200,0	0
A′	—379,69	125,7	400,0	0

Tabelle 12

Schnitt	$\overline{M} = M$ Näherung mt	M Soll-Wert mt
4	—333,3	—330,4
3′	—266,7	—263,9
2′	— 66,7	— 64,6
1′	266,7	267,6
A′	466,7	466,1

Tabelle 13

Schnitt	ε m	$K(q_v)$ t	$\Sigma K(q_v)$ t	$\overline{M}_{T1}(q_v)$ mt	m_t mt/m	$M_{T1}(q_h)$ mt
4		—16,67		0	8,00	0
	0,1600		—16,67			
3′		—33,33		2,66	6,67	—29,34
	0,4785		—50,00			
2′		—33,33		26,59	2,67	—48,02
	0,7945		—83,33			
1′		+33,33		92,80	—4,00	—45,36
	1,1050		—50,00			
A′		+50,0		148,05	—8,00	—21,36

Tabelle 14

Schnitt	$\overline{M}_{T1}\cos\varphi$ mt	$-M \sin\varphi$	M_T Näherung mt	M_T Sollwert mt
4	0	0	0	0
3′	—26,5	21,3	— 5,2	5,6
2′	—21,1	10,6	—10,5	—11,1
1′	46,0	— 63,4	—17,4	—16,5
A′	120,2	—146,8	—26,6	—21,9

system geführt (Tabelle 11), wie die Berechnung der Momente aus der Kabellage in den einzelnen Schnitten. Da die Berechnung der überzähligen Grösse X_3 wieder gleich durchgeführt wird, ändert sich natürlich auch am Endergebnis (statisch unbestimmtes System) nichts.

Unter der Voraussetzung biegefest eingespannter Trägerenden könnte X_3 auch direkt aus den Werten der Tabelle 10 berechnet werden, da in diesem Falle die Höhenlage des Spannkabels (bzw. das Randmoment) keine Rolle spielt. Die Berechnung ergibt in diesem Falle

$$X_3 = -330{,}4 \text{ mt}$$

Das Endergebnis liefert ebenfalls wieder die Werte der Tabelle 7.

Zum Schluss sei nochmals kurz auf die vorgeschlagene Näherungsberechnung hingewiesen. Es ist klar, dass diese Näherungsmethode für die Berechnung der Vorspannung weniger genau ist als für die Berechnung äusserer, vertikaler Lasten, da in der partikulären Lösung der Differentialgleichung (11) das Glied m_t/a von beträchtlichem Einfluss ist.

Am geraden Träger findet man die Biegemomente $\overline{M}$ gemäss Tabelle 12, die als Näherung bereits endgültigen Charakter haben. Die Torsionsmomente M_T setzen sich zusammen aus $\overline{M}_{T1} \cos\varphi$ und $-\overline{M} \sin\varphi$ (Bild 14); wobei $\overline{M}_{T1}$ eine Funktion der vertikalen Umlenkkräfte (q_v) und der horizontalen Umlenkkräfte (q_h) ist.

$$\overline{M}_{T1} = \overline{M}_{T1}\,(q_v) + \overline{M}_{T1}\,(q_h)$$

Bezeichnet man mit

$$\varepsilon = a\,(\cos\varphi_{i+1} - \cos\varphi_i)$$

die Differenz der Exzentrizität zwischen zwei Punkten $i+1$ und i gegenüber der Sehne, so folgt

$$\overline{M}_{T1}\,(q_v) = \sum (\varepsilon \sum q_v)$$

$\overline{M}_{T1}(q_h)$ ergibt sich durch Aufsummieren der durch die horizontalen Umlenkkräfte V/a erzeugten tordierenden Momente $m_t = (V/a)e$ (Tabelle 13). Damit liefert die Näherungsberechnung mit

$$M_T = \overline{M}_{T1} \cos\varphi - \overline{M} \sin\varphi$$

verglichen mit den Sollwerten die angenäherten Torsionsmomente gemäss Tabelle 14.

Adresse des Verfassers: Dr. *Ch. Menn*, Quaderstrasse 18, Chur.