Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 81 (1963)

Heft: 11

Artikel: Bemerkungen zur Reduktion elliptischer Integrale auf Normalintegrale

Autor: Hürlimann, Reinhard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66742

Schreibweise übergegangen sind, stellen wir, gestützt auf qualitative Betrachtungen der Strömungsvorgänge im Schacht, die Funktionen μ und π in Potenzreihen dar. Ihre Koeffizienten, welche im wesentlichen die Ableitungen der unbekannten Funktionen μ und π im Nullpunkt darstellen, können durch Einsetzen der Anfangswerte $\zeta = 0$: $\mu = 1$, $\pi = 1$ sowohl in den Differentialgleichungen als auch in dem einmal nach ζ differentierten Gleichungssystem ermittelt werden.

Weiter diskutieren wir kurz zwei Veröffentlichungen von Kemp und Grashof an Hand eines Rechenbeispiels.

Literaturverzeichnis

[1] *J. F. Kemp:* Analysis of the Air Flow in Downcast Shafts with Reference to the Trailing-hose Method of Resistance Measurement. «Mine Ventilation Journal», January, 1962.

[2] *F. Grashof:* Theoretische Maschinenlehre, Leipzig, Verlag von Leopold Voss, 1875, Bd. 1.

Bemerkungen zur Reduktion elliptischer Integrale auf Normalintegrale

DK 517.7

Von Dr. **Reinhard Hürlimann**, AG Brown, Boveri & Cie., Baden *)

Herrn Professor Dr. **J. Ackeret** zum 65. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Im Zusammenhang mit einer von Prof. Dr. *J. Ackeret* angeregten Arbeit auf dem Gebiete der Aerodynamik — Berechnung des minimalen induzierten Widerstandes einer Schaufel mit Spalt im Rechteckkanal [1] — hatte sich der Verfasser verschiedentlich mit der Lösung und numerischen Auswertung elliptischer Integrale zu befassen. Die Beschäftigung mit diesem Problemkreis gab den Anstoss zu den folgenden Ueberlegungen.

Ein erster Schritt bei der Berechnung elliptischer Integrale besteht bekanntlich darin, diese mit einer geeigneten Substitution auf Normalintegrale zurückzuführen. In gewissen Fällen treten nun die Integrale bereits in einer Form auf, die bei Kenntnis dieser Substitution nach kurzer Rechnung auf Normalintegrale reduzierbar ist.

Dem Ingenieur, der sich vor die Aufgabe gestellt sieht, solche nicht elementare Integrale zu lösen, kann es jedoch nicht in erster Linie daran gelegen sein, sich auf diesem Gebiet eingehender mit Funktionentheorie zu befassen. Er ist deshalb auf Hilfsmittel angewiesen, wie die Integraltafeln von *Byrd* und *Friedman* [2], *Jahnke* und *Emde* [3] u. a. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint es deshalb angebracht, auf eine Möglichkeit hinzuweisen, die für einige Fälle das rasche Auffinden der gewünschten Substitutionsformeln gestattet.

2. Die elliptischen Integrale

Elliptische Integrale lassen sich in die Form

$$\text{(1)} \qquad \int \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}}\, dt$$

bringen, wo $R(t)$ eine rationale Funktion von t und $P(t)$ ein Polynom 3. oder 4. Grades in t mit einfachen Nullstellen bedeuten.

Das Integral (1) ist, wie bereits angedeutet, reduzierbar auf eine Linearkombination von elementaren Integralen und von Normalintegralen. Die letzteren sind nachstehend angeschrieben:

Normalintegral 1. Gattung:

$$\text{(2)} \qquad F(\tau^*, k) = u = \int_0^{\tau^*} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)\,(1-k^2\tau^2)}}$$

Normalintegral 2. Gattung:

$$\text{(3)} \qquad E(\tau^*, k) \quad = \int_0^{\tau^*} \sqrt{\frac{1-k^2\,\tau^2}{1-\tau^2}}\, d\tau$$

Normalintegral 3. Gattung:

$$\text{(4)} \qquad \Pi(\tau^*, \alpha^2, k) = \int_0^{\tau^*} \frac{d\tau}{(1-\alpha^2\tau^2)\sqrt{(1-\tau^2)\,(1-k^2\tau^2)}}$$

*) Ehemals Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik an der ETH, Zürich.

Dabei bezeichnet k den Modul und α^2 den Parameter des elliptischen Normalintegrals 3. Gattung, wobei $-\infty < \alpha^2 < +\infty$.

Die Substitution $\tau = \sin\psi$ führt auf die *Legendre*schen Normalformen $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ und $\Pi(\varphi, \alpha^2, k)$ mit $\varphi = \arcsin \tau^*$. Falls die obere Integrationsgrenze $\tau^* = 1$ bzw. $\varphi = \pi/2$ ist, ergeben sich die vollständigen Normalintegrale $K(k)$, $E(k)$ und $\Pi(\alpha^2, k)$.

3. Die Ermittlung der Substitutionsformel

Die Integrale (2), (3) und (4) sind für reelle Werte, die den Bedingungen $0 \leqq k \leqq 1$, $0 \leqq \tau^* \leqq 1$ genügen, tabelliert. Zur Auswertung ist deshalb das Integral (1) auf Normalintegrale, welche die vorgenannten Bedingungen erfüllen, umzuformen. Eine Möglichkeit, in bestimmten Fällen eine dazu geeignete Substitution auf einfachem Wege zu finden, wird nachstehend erläutert.

Für die folgenden Ausführungen wird vorausgesetzt, dass die Koeffizienten des Polynoms $P(t)$ in (1) reell sind. Falls $P(t)$ konjugiert komplexe Wurzeln aufweist, werden lediglich die häufig auftretenden «symmetrischen» Fälle behandelt, welche durch

$$P(t) = a_0\,(t^2 \pm a^2)\,(t^2 \pm b^2)$$

definiert sind. Ausserdem sei angenommen, dass eine Integrationsgrenze zugleich Nullstelle des Radikanden $P(t)$ ist. Diese wird mit $t_0{}^*$, die andere Integrationsgrenze mit t^* bezeichnet. Oft ist es von Vorteil, die reellen Nullstellen zusammen mit der Integrationsgrenze t^* auf einer Zahlengeraden angeordnet zu denken, die über den unendlich fernen Punkt geschlossen ist.

Zur Umformung des elliptischen Integrals (1) auf Normalintegrale sowie für eine spätere numerische Auswertung ist es vorteilhaft, die trigonometrische Schreibweise zu benutzen oder *Jacobische* elliptische Funktionen einzuführen (vgl. [2]).

Die Substitution wird in der schon von *Richelot* [4] behandelten Form

$$\text{(5)} \qquad \sin^2\psi = f(t) = \frac{s_1}{s_2}\,\frac{s_3}{s_4}$$

geschrieben. Die Grössen s_1, s_2, s_3, s_4 werden dabei entsprechend dem Integrationsintervall und den Wurzeln der Gleichung $P(t) = 0$ für die verschiedenen möglichen Fälle nach folgendem Schema bestimmt (vgl. Bild 1):

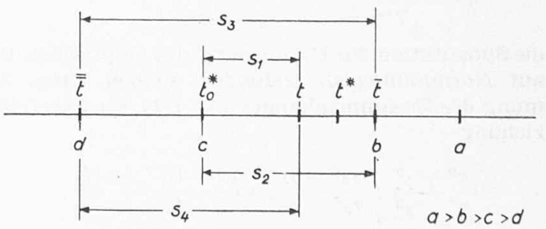

Bild 1. Darstellung der in (5) benötigten Grössen s_1, s_2, s_3, s_4 als Strecken auf einer Zahlengeraden (über den unendlich fernen Punkt als geschlossen zu denken)

3.1. $P(t) = a_0\,(t-a)\,(t-b)\,(t-c)\,(t-d)$,
wobei $a > b > c > d$.

$$s_1 : |\, t - t_0^* \,| \quad ;$$

$$s_2 : |\, t_0^* - \bar{t} \,| \quad ,$$

d. h. Länge derjenigen Strecke auf der Zahlengeraden, welche, von der Integrationsgrenze t_0^* ausgehend, zur benachbarten Nullstelle $\bar{t}$ führt und die andere Integrationsgrenze t^* enthält.

Es sei hier darauf hingewiesen, dass in den Fällen $t^* > a$ bzw. $t^* < d$ diese Nullstelle $\bar{t} = d$ bzw. $\bar{t} = a$ ist!

$$s_3 : |\, \bar{t} - \bar{\bar{t}} \,| \quad ;$$

Abstand von $\bar{t}$ bis zur übernächsten Nullstelle $\bar{\bar{t}}$.

$$s_4 : |\, \bar{\bar{t}} - t \,|$$

Durch Einsetzen von $t = f(\sin^2\psi)$ in Gleichung (1) lässt sich die Umformung auf Normalintegrale vornehmen.

Das Verfahren ist im Anhang an einigen Beispielen erläutert.

3.2. $P(t) = a_0\,(t-a)\,(t-b)\,(t-c)$, wobei $a > b > c$.

Hier ist zu beachten, dass ein Polynom 3. Grades als Grenzfall eines solchen 4. Grades aufgefasst werden kann, bei dem eine Nullstelle ins Unendliche verlegt worden ist. Es ist also

$$a_0\,(t-a_1)\,(t-a_2)\,(t-a_3) =$$

$$= \lim_{a_4 \to \infty} \left[-\frac{a_0}{a_4}\,(t-a_1)\,(t-a_2)\,(t-a_3)\,(t-a_4) \right]$$

Damit ist dieser Fall auf den unter 3.1. behandelten zurückgeführt.

3.3. $P(t) = a_0\,(t^2 \pm a^2)\,(t^2 \pm b^2)$

Zur Ermittlung von (5) lassen sich die nach obiger Beziehung möglichen Fälle durch folgende einfache Transformationen auf den unter 3.2. besprochenen Fall zurückführen.

3.3.1. $P(t) = a_0\,(t^2 - a^2)\,(t^2 - b^2)$ mit $a > b$.

Mit der Transformation $t^2 = \tau'$ wird

$$\frac{dt}{\sqrt{a_0\,(t^2-a^2)\,(t^2-b^2)}} = \frac{d\tau'}{2\sqrt{a_0\,(\tau'-a^2)\,(\tau'-b^2)\,\tau'}}$$

3.3.3. $P(t) = a_0\,(t^2 + a^2)\,(t^2 - b^2)$

Die Transformation $t^2 + a^2 = \tau'$ ergibt

$$\frac{dt}{\sqrt{a_0\,(t^2+a^2)\,(t^2-b^2)}} = \frac{d\tau'}{2\sqrt{a_0\,\tau'\,[\tau' - (a^2+b^2)]\,[\tau' - a^2]}}$$

3.3.3. $P(t) = a_0\,(t^2 + a^2)\,(t^2 + b^2)$ mit $a > b$.

Hier führt die Transformation $t^2 + a^2 = \tau'$ bzw. $t^2 + b^2 = \tau'$ auf die gewünschte Form des Radikanden $P(\tau')$.

Es sei noch angemerkt, dass in den obigen drei Fällen die Substitutionsformel (5) wegen der Rücktransformation $\tau' \to t^2$ die Form $\sin^2\psi = f(t^2)$ annimmt.

4. Schlussbemerkungen

Nachstehend wird noch kurz angedeutet, wie mit Hilfe der Transformation

$$\tau^2 = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t}$$

die Substitution zur Umformung des elliptischen Integrals (1) auf Normalintegrale gefunden werden kann. Zur Bestimmung des Zusammenhanges $\tau^2 = f(t)$ wird vorteilhaft die Beziehung

$$\frac{\tau^2 - \tau_1^2}{\tau^2 - \tau_2^2} : \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{\tau_3^2 - \tau_2^2} = \frac{t - t_1}{t - t_2} : \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2}$$

verwendet (vgl. *Hurwitz-Courant* [5]). Die drei Paare zugeordneter Werte werden entsprechend der Reduktionsvorschrift $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ bzw. $0 \leqq \tau^* \leqq 1$, wie folgt gewählt:

$$\tau_1 = 0 \qquad t_1 = t_0^*$$
$$\tau_2 = \infty \qquad t_2 = \bar{\bar{t}}$$
$$\tau_3 = 1 \qquad t_3 = \bar{t}$$

Damit wird

$$(6) \qquad \tau^2 = \frac{t - t_0^*}{t - \bar{\bar{t}}}\;\frac{\bar{t} - \bar{\bar{t}}}{\bar{t} - t_0^*}$$

Wie man sich leicht überzeugt, hat die obige Beziehung einen positiven reellen Wert und stimmt mit dem durch Formel (5) gegebenen Zusammenhang überein, falls $\tau^2 = \sin^2\psi$ gesetzt wird.

Abschliessend sei darauf hingewiesen, dass die Formel (5) bzw. (6) oft auf eine einfachere Form gebracht werden kann, was dann eintritt, wenn je eine der Strecken im Zähler bzw. im Nenner unendlich gross wird. Dies lässt sich u. U. je nach Wahl der Integrationsgrenzen erreichen, indem entweder $u_1 = F(\varphi, k)$ berechnet wird oder $K - u_1 = u_2 = F(\vartheta, k)$, wobei $\operatorname{ctg}\varphi = k'\operatorname{tg}\vartheta$ mit $k'^2 = 1 - k^2$ ist.

5. Anhang

5.1. Gegeben ist

$$\int_b^a \frac{t\,dt}{(t-t_1)\sqrt{(t-a)\,(t-b)\,(t-1)\,t}} \text{ mit } a > b > 1 > 0$$

Entsprechend den Bezeichnungen in 3.1. wird wegen $c = 1$ und $d = 0$ $t_0^* = a$ gewählt. Ferner ist $\bar{t} = b$ bzw. $\bar{\bar{t}} = 0$. Dann wird (vgl. Bild 2).

$$s_1 : a - t \qquad s_2 : a - b \qquad s_3 : b \qquad s_4 : t$$

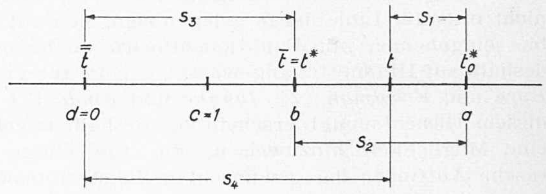

Bild 2. Darstellung der Grössen s_1, s_2, s_3, s_4 zu Beispiel 5.1

womit die Substitutionsformel (5) lautet

$$\sin^2\psi = \frac{b\,(a-t)}{t\,(a-b)}\text{, sodass } t = \frac{ab}{a\sin^2\psi + b\cos^2\psi} \text{ wird.}$$

Die Integration zwischen den Grenzen a und b, welche Nullstellen des Radikanden $P(t)$ sind, führt auf ein vollständiges Normalintegral. Dieses ist wegen $P(t_1) \neq 0$ ein solches 3. Gattung, vgl. (4).

$$5.2. \qquad \int_b^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t-a)\,(t-b)\,(t-1)}} \text{ mit } a > b > 1$$

Nach 3.2. kann hier für t_0^* der unendlich ferne Punkt gewählt werden. Damit wird (vgl. Bild 3)

$$s_1 = s_2 = \infty \qquad s_3 : a - 1 \qquad s_4 : t - 1$$

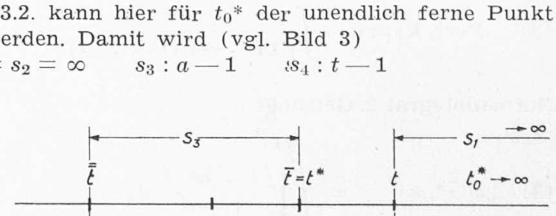

Bild 3. Darstellung der Grössen s_1, s_2, s_3, s_4 zu Beispiel 5.2

$$\text{und} \quad \sin^2\psi = \frac{a-1}{t-1} \quad \text{bzw. } t = \frac{a - \cos^2\psi}{\sin^2\psi}$$

Auch hier lässt sich das elliptische Integral auf ein vollständiges Normalintegral reduzieren, welches jedoch diesmal von 1. Gattung ist, vgl. (2).

5.3. Für das Auffinden der Substitution zur Umformung des Integrals

$$\int_{t^*}^{b} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2-t^2)}} = \int_{t^*}^{b} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} \quad \text{mit } b > t^* > 0$$

auf die Normalform ist nach 3.3.2. vorerst die Transformation $\tau' = t^2 + a^2$ anzuwenden, womit sich für $P(\tau')$ die folgenden Nullstellen ergeben:

$$a^2 + b^2 > a^2 > 0 \qquad \text{mit} \qquad a^2 + b^2 > \tau'^* > a^2$$

Damit wird (vgl. Bild 4)

$$s_1 : a^2 + b^2 - \tau' \qquad s_2 : b^2 \qquad s_3 = s_4 = \infty$$

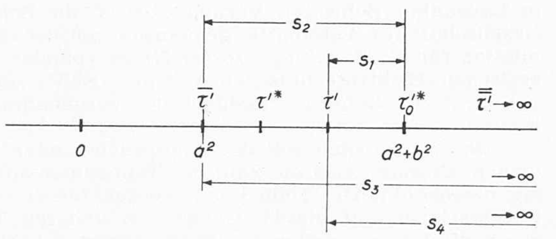

Bild 4. Darstellung der Grössen s_1, s_2, s_3, s_4 zu Beispiel 5.3

und $\sin^2\psi = \dfrac{b^2 - t^2}{b^2}$ bzw. $t = b \cos\psi$

Nach kurzer Rechnung ergibt sich nun

$$\sqrt{P(t)} = b \sin\psi \sqrt{a^2+b^2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2+b^2} \sin^2\psi}$$

$$dt = -b \sin\psi \, d\psi$$

Also ist

$$\int_{t^*}^{b} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_{0}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \frac{F(\varphi, k)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

mit $\varphi = \arccos(t^*/b)$ und $k^2 = \dfrac{b^2}{a^2+b^2}$

Literaturverzeichnis

[1] *R. Hürlimann:* Untersuchungen über Strömungsvorgänge an Schaufelenden in der Nähe von Wänden. Mitt. a. d. Inst. für Aerodynamik a. d. ETH Zürich, Nr. 31 (1962), S. 38—54.

[2] *P. F. Byrd and M. D. Friedman:* Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Die Grundlehren der math. Wiss. Bd. LXVII, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1954.

[3] *E. Jahnke and F. Emde:* Tables of Functions with Formulas and Curves. Dover Publ. Inc., New York, 1945.

[4] *F. Richelot:* Ueber die Substitution von der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform. Crelle's Journal f. d. M., Bd. XXXIV (1847), Heft 1, S. 19—24.

[5] *A. Hurwitz — R. Courant:* Allg. Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 3. Auflage, Springer, Berlin, 1929, S. 349.

90° Krümmer für Rechteckrohre

Druckverluste von einzelnen und von in Serie geschalteten Krümmern

Von Dr. **H. Sprenger**, Institut für Aerodynamik an der ETH, Zürich

Herrn Professor Dr. **J. Ackeret** zum 65. Geburtstag gewidmet

Der Aufsatz kann aus technischen Gründen erst später veröffentlicht werden

Wettbewerbe

Gemeindehaus in Muri bei Bern. Beschränkter Projektwettbewerb unter sieben Teilnehmern. Fachleute im Preisgericht waren die Architekten H. Daxelhofer, H. Rüfenacht, Kantonsbaumeister H. Türler und Ing. A. Geiser.

1. Preis (2000 Fr.	und Empfehlung zur Weiterbearbeitung) Daniel Reist, Bern
2. Preis (1200 Fr.)	Rud. Gasser, Gümligen
3. Preis (1000 Fr.)	Willi Althaus, Muri, Mitarbeiter Rolf Stuhldreher
4. Preis (800 Fr.)	Max Böhm, Gümligen

Die Ausstellung im Pavillon 2 der Primarschulhausanlage in Muri dauert noch bis am 21. März, werktags 14 bis 20 h, samstags und sonntags 10 bis 12 und 14 bis 18 h.

Nekrologe

† **Robert Dubs,** dipl. Masch.-Ing., S. I. A., G. E. P., von Zürich und Zollikon, geboren am 3. Jan. 1880, Eidg. Polytechnikum 1901 bis 1905, 1926 bis 1949 Professor an der ETH, ist am 10. März nach langem Leiden gestorben.

† **Hendrik Frederik Doeff,** dipl. Masch. Ing., von Oldenzaal (Holland), geboren 22. November 1901, ETH 1921 bis 1926, ist am 27. Februar 1963 in Den Haag gestorben. Unser S. I. A.- und G. E. P.-Kollege hat sein ganzes Leben dem Erdöl gewidmet. 1927 begann er seine berufliche Laufbahn bei der Astra Romana in Ploesti (Rumänien), später war er in Sumatra für die Bataaf'sche Petroleum Mij. und in den Vereinigten Staaten für die Shell Oil Company tätig. Venezuela, Den Haag und Djakarta waren weitere Stationen, und von 1951 bis zur 1961 erfolgten Pensionierung arbeitete er bei der Nederlandsche Aardolin Mij., Oldenzaal.

Mitteilungen aus dem S.I.A.

Protokoll der ausserordentlichen Generalversammlung vom 28. April 1962 in der Aula der Universität Neuenburg

Vorsitz:	A. Rivoire, Arch., Präsident des S. I. A.
Protokoll:	M. Beaud.
Traktanden:	1. Protokoll der 67. Generalversammlung vom 25. Juni 1961 in Winterthur.
	2. Vorlagen der Delegiertenversammlung:
	a) Teilrevision der Statuten;
	b) Revision der Standesordnung.
	3. Verschiedenes.

Präsident A. Rivoire eröffnet um 11.10 h die Generalversammlung, entbietet der Sektion Neuenburg die besten Wünsche des Vereins zum 100. Jubiläum und verdankt dem Organisationskomitee der Versammlung die vorzügliche Durchführung des Programms. Ferner schlägt er der Versammlung vor, unter der Rubrik «Verschiedenes» Punkt 9 «Frage der allfälligen Einführung von Kollektivmitgliedern» der Traktandenliste der Delegiertenversammlung, der am Vortage infolge Zeitmangel nicht besprochen werden konnte, sowie die wichtige Frage der Titel, die wieder aktuell wird, zu behandeln. Die Versammlung genehmigt die Traktandenliste mit den aufgeführten Ergänzungen.

1. *Protokoll der 67. Generalversammlung vom 25. Juni 1961 in Winterthur.*

Es werden keine Bemerkungen angebracht, womit das Protokoll genehmigt ist.

2. *Vorlagen der Delegiertenversammlung*

a) *Teilrevision der Statuten.* Die Delegiertenversammlung beantragt Genehmigung des vorliegenden Projektes der Teilrevision der Statuten, wobei jedoch die Einführung der Studentenmitglieder und der Kollektivmitglieder vor-