

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 81 (1963)  
**Heft:** 11

**Artikel:** Stationäre Strömungsverhältnisse in einem Vertikalschacht unter Berücksichtigung eines Wärme-Austausches  
**Autor:** Gaillard, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66741>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Temperaturanstieg des Gases im heissesten Kühlkanal proportional ist. Diejenige Massenstromdichte im heissesten Kanal, welche eine vorgegebene maximale Hülsestemperatur ergibt, kann für eine cosinus-förmige axiale Leistungsverteilung, und unter Einbeziehung einer passenden Gleichung für den Wärmeübergang durch Konvektion, explizit angegeben werden. (Auf die Wiedergabe der resultierenden Formel wird hier verzichtet, da deren Ableitung zu viel Platz beanspruchen würde). Wenn wir nun  $T_{2H,K}$  bis hinauf zu einem Wert nahe bei der maximal zulässigen Hülsestemperatur verändern, so wird die Massenstromdichte im heissesten Kühlkanal, welche übrigens vom Druck im Kreislauf praktisch unabhängig ist, schliesslich gleich Null. Die Leistung je Flächeneinheit des Kernquerschnittes verschwindet somit für  $T_2 = T_1$  und für  $T_2$  nahe bei der höchstzulässigen Hülsestemperatur  $T_{H,max}$ . Zwischen diesen beiden Werten ergibt sich ein Maximum. So wurde z. B. für  $T_1 = 150^\circ\text{C}$ ,  $T_{H,max} = 650^\circ\text{C}$  und  $\beta = 1,32$  das Maximum für jeden beliebigen Wert der relativen Pumpleistung bei  $T_{2H,K} = 540^\circ\text{C}$  gefunden. Um die mittlere Austrittstemperatur aller Kühlkanäle durch die Strömung in den äusseren, weniger Leistung produzierenden Kanälen nicht zu vermindern, würden die letzteren durch Blenden in der Weise gedrosselt, dass deren Austrittstemperatur etwa dieselbe wäre wie die des heissesten Kanals.

Die zweite Frage im Zusammenhang mit den Hauptdaten der Kühlung betrifft den statischen Druck im Kreislauf. Der Druckverlust im ganzen Kreislauf ist, wie derjenige im Kern, der Dichte und damit dem Druckniveau indirekt proportional, siehe Gl. (4); Gl. (3) zeigt, dass die relative Pumpleistung daher dem Quadrat des Druckes indirekt proportional ist. Es besteht somit ein grosser Anreiz, den Druck so hoch wie möglich zu wählen; Einsparungen an Pumpleistung müssen dabei den Kosten gegenübergestellt

werden, die sich durch die stärkeren Bauteile des Kühlkreislaufs ergeben. Es wurde gefunden, dass ein Druck in der Grössenordnung von  $70\text{ kg/cm}^2$  zu genügend bescheidenen relativen Pumpleistungen führt.

Die Massenstromdichte im heissesten Kühlkanal ist wesentlich höher als diejenige von gasgekühlten thermischen Reaktoren. Der Schallzustand am Austritt und die damit verbundene Begrenzung ergibt sich aber erst bei relativen Pumpleistungen, welche weit ausserhalb des wirtschaftlich tragbaren Gebiets liegen.

Schliesslich seien einige Werte von resultierenden mittleren Leistungsdichten im Reaktorkern in Abhängigkeit des Durchmessers der Brennstoffelemente sowie des Verhältnisses von Strömungsquerschnitt zu Gesamtquerschnitt des Reaktorkerns angegeben, Bild 1. Die Kleinheit der Durchmesser mag erstaunen, doch handelt es sich um die normale Grössenordnung von Brennstoffelementen vom «Nadel-Typ» für schnelle Reaktoren, welche in der Tat durch den Wärmeübergang im Innern der Elemente vorgeschrieben wird<sup>2)</sup>. Die Leistungsdichten wurden gegenüber der idealen relativen Pumpleistung aufgetragen, die es braucht, um das Gas durch den Reaktorkern zu pumpen, siehe Gl. (3a) und (4). Während für einen konstanten Wert der relativen Pumpleistung die Leistung je Flächeneinheit des Kernquerschnitts mit  $v$  proportional anwächst, siehe Gl. (5), nimmt die Leistung je Volumeneinheit des Reaktorkerns mit wachsendem  $v$  ab, da die Länge der Brennstoffelemente stärker als  $v$  zunimmt, siehe Gl. (6). Wie man sieht, könnten schon bei bescheidenen relativen Pumpleistungen Leistungsdichten bewältigt werden, welche in dem für schnelle Reaktoren wünschbaren Bereich liegen.

<sup>2)</sup> Die durch den Wärmeübergang im Innern der Brennstoffelemente bedingte Beschränkung der erzielbaren Leistungsdichten ist im vorliegenden Diagramm nicht berücksichtigt.

## Stationäre Strömungsverhältnisse in einem Vertikalschacht unter Berücksichtigung eines Wärme-Austausches

DK 533.6

Von M. Gaillard, Institut für Aerodynamik an der ETH, Zürich

Herrn Professor Dr. J. Ackeret zum 65. Geburtstag gewidmet

### Einleitung

Im Zusammenhang mit den zahlreichen Tunnelprojekten taucht eine ganze Anzahl luftungstechnischer Fragen auf. Eine davon bilden die stationären Strömungsverhältnisse in einem langen Schacht, welcher in unserem Fall einen vertikal in den Felsen getriebenen Abluftkanal eines Tunnelabschnittes darstellen soll.

Ein Gebläse im Schachtfuss befördere die Abluft durch den Kanal ins Freie. Eine Anwendung der Lösung des Strömungsproblems wäre nun, die zur Bemessung des Ventilators erforderlichen Grössen zu bestimmen und einen wirtschaftlichen Betrieb zu gewährleisten. Bei Berücksichtigung des Wärmeaustausches zwischen Schachtwand und Luftstrom muss der Verlauf der Wandtemperatur bekannt sein. Wir nehmen eine lineare Abhängigkeit zwischen Tiefe und Temperatur an.

### Grundgleichungen

Die allgemeinen Grundgleichungen der Strömung in einem Vertikalschacht mit Reibungsdruckabfall und Wärmeaustausch zwischen Schachtwand und Luftstrom sind:

#### A. Die Kontinuitätsgleichung

$$u(z) = \frac{m_s}{F} v(z)$$

oder, differentiell geschrieben

$$(1) \quad du = \frac{m_s}{F} dv$$

$z$  ist die senkrechte Koordinate (positive Richtung nach oben),  $u(z)$  die mittlere Geschwindigkeit auf der Höhe  $z$ ,  $m_s$  die sekundliche Menge,  $D$  der Schachtdurchmesser, der

über die Höhe konstant sein soll,  $F = \pi/4 \cdot D^2$  der Schachtquerschnitt und  $v$  das spezifische Volumen.

#### B. Der Impulssatz

$$(2) \quad u du = -v dp - g dz - \frac{\lambda dz}{2D} u^2$$

Darin ist  $p(z)$  der Druck,  $g$  die Schwere-Beschleunigung und  $\lambda$  der Druckverlustkoeffizient des Schachtes.

Allgemein führt die Berechnung des Druckabfalles infolge Rohrreibung und damit auch von  $\lambda$  auf ein Grenzschicht-Problem. In unserem Fall sollen alle Geschwindigkeitsprofile diejenigen der voll ausgebildeten turbulenten Rohrströmung sein, so dass der Widerstandsbeiwert  $\lambda$  in einen Bereich zu liegen kommt, wo nur die relative Rauigkeit  $\epsilon/D$  ( $\epsilon$  absolute Rauigkeit) dessen Wert bestimmt, Bild 1,  $\lambda$  ist dann unabhängig von der Reynoldszahl und der Geschwindigkeit.

Ist der Schacht um einen Winkel  $\vartheta$  zur Senkrechten geneigt, lautet das Schwerglied in der Gleichung (2):  $g \cdot \cos \vartheta \cdot dz$ . Die Koordinate  $z$  liegt dann in der Axe des Schachtes.

#### C. Erster Hauptsatz der Wärmelehre

$$(3) \quad dq = di - v dp = c_p dT - v dp \quad \text{wobei}$$

$$dq = dq_a + dq_r$$

$$dq_a = \alpha \frac{\pi D}{m_s} (T_w(z) - T(z)) dz$$

$$T_w(z) = T_{w0} + \frac{k}{h} z$$

Es bedeuten:  $q_a$  die von aussen zu- oder abgeführte Wärmemenge,  $q_r$  die Reibungswärme und  $i$  die Enthalpie. Diese drei Grössen sind auf die Masseneinheit bezogen. Weiter ist  $\alpha$  die Wärme-Uebergangszahl,  $T_w(z)$  und  $T(z)$  die absolute Temperatur der Schachtwand bzw. der strömenden Luft.

Unter Verwendung der Gleichung (2) lässt sich Gleichung (3) schreiben:

$$(3a) \quad \alpha \frac{\pi D}{m_s} (T_w - T) dz = u du + c_p dT + g dz$$

Dabei streicht sich  $dq_r$  gegen  $\lambda \cdot dz / 2D \cdot u^2$  wegen der Äquivalenz von Reibungswärme und Reibungsarbeit. In dieser Darstellung gilt der Energiesatz für jede beliebige verlustbehaftete Strömung mit Wärmeaustausch.

An dieser Stelle soll nun eine Abschätzung der Wärme-Uebergangszahl  $\alpha$  erfolgen. — Jede Wärmeübertragung in einem strömenden Gas ist mit Reibung verbunden. Man kann nun, da der Mechanismus der Turbulenz den konvektiven Wärmetransport ins Innere der Strömung bestimmt, einen Zusammenhang zwischen Reibung und Wärmeübergang suchen. Ein solcher ist uns durch die Reynolds-Analogie gegeben, die einen linearen Zusammenhang zwischen dem dimensionslosen Wärme-Uebergangskoeffizienten  $c_q$  und dem Widerstandsbeiwert  $\lambda$  liefert. Dieser ist:

$$c_q = \frac{\lambda}{8}$$

Damit ist die sekundliche Wärmemenge gleich:

$$m_s dq_a = c_q c_p \left( \pi D \frac{u}{v} \right) (T_w - T) dz,$$

$$\text{und mit } m_s = \frac{\pi D^2}{4} \frac{u}{v} \text{ erhalten wir}$$

$$dq_a = c_q c_p \frac{4}{D} (T_w - T) dz.$$

$$dq_a = \alpha \frac{\pi D}{m_s} (T_w - T) dz$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \frac{\lambda c_p m_s}{8 F}$$

$c_p$  bleibt bei diesen Temperaturen konstant, so dass sich  $\alpha$  unter Berücksichtigung des konstanten Wertes von  $\lambda$  über  $z$  kaum merkbar ändern wird.

#### D. Die Zustandsgleichung idealer Gase

$$(4) \quad p v = R T$$

mit  $R$  als Gaskonstante von Luft.

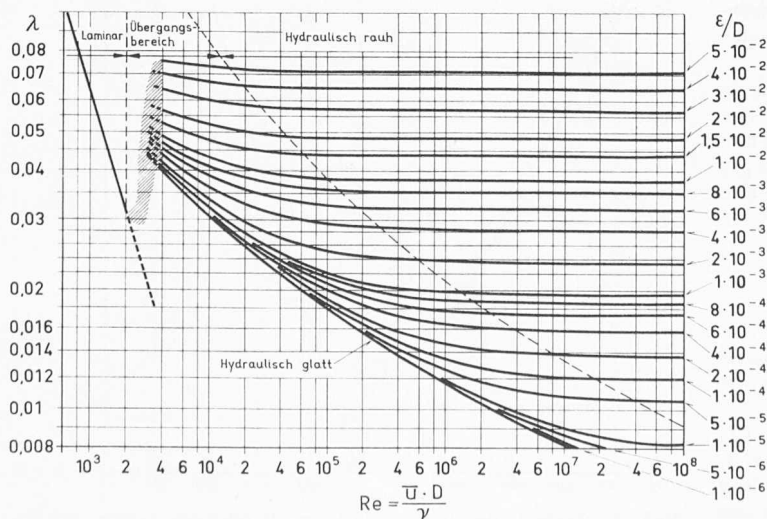


Bild 1. Widerstandszahl  $\lambda$  in Abhängigkeit der Reynoldszahl  $Re$  für verschiedene Rohrrauigkeiten  $\epsilon$

#### Herleitung des Systems von Differentialgleichungen:

Aus den Gleichungen (1), (2), (3 a) und (4) eliminieren wir das spezifische Volumen  $v$  und die absolute Temperatur  $T$ . Dadurch verringert sich die Anzahl der Gleichungen auf zwei. In diesen kommen nur der Druck  $p$  und die Geschwindigkeit  $u$  in Funktion von  $z$  vor. Schliesslich schreiben wir die beiden Differentialgleichungen dimensionslos. Aus den Gleichungen (2) und (1) eliminieren wir das spezifische Volumen  $v$  und erhalten

$$(5) \quad u u_z + \frac{F}{m_s} u p_z + \frac{\lambda u^2}{2 D} + g = 0$$

Ferner schreibt sich Gl. (3 a) bei Verwendung der Gleichungen (4) und (1) als

$$(6) \quad u u_z + \frac{c_p F}{R m_s} (u p)_z + \frac{\lambda c_p}{2 D} \frac{F}{m_s} (p u) - \frac{\lambda c_p}{2 D} T_w + g = 0$$

wobei  $\left( \frac{\quad}{\quad} \right)_z = \frac{d(\quad)}{dz}$  bedeuten soll.

Mit Hilfe der dimensionslosen Ausdrücke

$$\mu = \frac{u}{u_0} \quad \pi = \frac{p}{p_0} \quad \theta = \frac{T}{T_0} \quad \zeta = \frac{z}{h},$$

wobei sich die mit dem Index 0 behafteten Grössen auf den Eintrittsquerschnitt  $z = 0$  beziehen, und  $h$  die Schachttiefe ist, ergeben sich die Gleichungen:

$$(5a) \quad \left( \frac{u_0^2}{h} \right) \mu \mu_\zeta + \left( \frac{R T_0}{h} \right) \mu \pi_\zeta + \left( \frac{\lambda_0 u_0^2}{2 D} \right) \mu^2 + g = 0$$

$$(6a) \quad \left( \frac{u_0^2}{h} \right) \mu \mu_\zeta + \left( \frac{c_p T_0}{h} \right) (\mu \pi)_\zeta + \left( \frac{\lambda c_p T_0}{2 D} \right) \mu \pi - \left( \frac{\lambda c_p}{2 D} \right) T_w + g = 0$$

Dieses Gleichungspaar umschreibt die Strömungsvorgänge in einem Vertikalschacht bei Berücksichtigung eines allfälligen Wärmeaustausches zwischen Schachtwand und Luftstrom. Der Einfluss des Auftriebes wurde in der Gleichung (2) ausser acht gelassen. Nachträglich kann dieser näherungsweise in summarischer Form mitberücksichtigt werden. Die über die Schachttiefe ermittelte Druckdifferenz setzt sich im wesentlichen aus der hydrostatischen Druckhöhe und dem Reibungsdruckabfall zusammen. Letztere, verringert um den «Auftriebsdruck»  $\Delta p_A$  ist schliesslich die Druckerhöhung, die vom Ventilator zu bewältigen ist. Die Berechnung der Druckdifferenz  $\Delta p_A$ , die vom Auftrieb herrührt, erfolgt näherungsweise mit Hilfe des ermittelten Dichteverlaufes im Schacht und desjenigen der Ausenluft nach der Beziehung:

$$\Delta p_A = \frac{g h}{v_0} \int_0^1 \left( \frac{v_0}{v_a}(\zeta) - \frac{v_0}{v_i}(\zeta) \right) d\zeta$$

#### Lösung des Gleichungssystems

Bevor zur eigentlichen Lösung der Differentialgleichungen gegangen wird, sollen einige Ueberlegungen über den zu erwartenden Verlauf der Kurven  $\mu$ ,  $\pi$  und  $\theta$  angestellt werden. Unter den getroffenen Voraussetzungen eines über der Höhe konstanten Schacht-Querschnittes mit einer stetig verlaufenden Schachtwand-Temperatur wird der Verlauf der gesuchten Kurven sicher keine Singularitäten aufweisen. Bei nicht zu grossem Wärmeübergang dürfen die Steigungen dieser Kurven als verhältnismässig klein angenommen werden. Dementsprechend ist es naheliegend, die Lösungen in McLaurin-Reihen bis und mit Gliedern zweiter Ordnung anzusetzen.

$$\mu = \frac{u}{u_0} = 1 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \dots$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu_\zeta(0)}{1!} \quad \alpha_2 = \frac{\mu_{\zeta\zeta}(0)}{2!}$$

$$\pi = \frac{p}{p_0} = 1 + \beta_1 \zeta + \beta_2 \zeta^2 + \dots$$

$$\beta_1 = \frac{\pi_\zeta(0)}{1!} \quad \beta_2 = \frac{\pi_{\zeta\zeta}(0)}{2!}$$

Die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  stellen, von Konstanten abgesehen, die  $i$ -te Ableitung der Funktion  $\mu$  bzw.  $\pi$  an der Stelle 0 dar. Man beachte, dass die Randbedingungen im Lösungsansatz bereits enthalten sind; es gilt nämlich für

$$\zeta = 0; u(0) = u_0 \text{ und } p(0) = p_0.$$

Um die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  zu bestimmen, setzen wir zunächst in den Differentialgleichungen (5a) und (6a) die Anfangswerte  $\zeta = 0$ ,  $\mu = 1$ ;  $\pi = 1$  ein. Damit entstehen zwei gewöhnliche algebraische Gleichungen, aus welchen sich die zwei Unbekannten  $\mu_\zeta(0)$  und  $\pi_\zeta(0)$  unmittelbar berechnen lassen.

Die Ermittlung von  $\alpha_2$  und  $\beta_2$  erfolgt ganz ähnlich. Wir differenzieren das Gleichungssystem (5a), (6a) nach  $\zeta$  und setzen wiederum  $\zeta = 0$ ;  $\mu = 1$ ;  $\pi = 1$  ein. Aus den zwei somit erhaltenen algebraischen Gleichungen bestimmen wir die gesuchten Koeffizienten  $\alpha_2$  und  $\beta_2$  leicht. Nach durchgeführter Rechnung erhalten wir:

$$\alpha_1 = \frac{h}{\left(RT_0 - \frac{u_0^2}{\kappa}\right)} \left[ \left( \frac{\lambda u_0^2}{2D} + \frac{g}{\kappa} \right) + \frac{\lambda R}{2D} (T_{W0} - T_0) \right]$$

$$\beta_1 = -\frac{h}{RT_0} \left[ \left( \frac{\lambda u_0^2}{2D} + g \right) + \frac{u_0^2}{h} \alpha_1 \right] \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\alpha_2 = \frac{h}{2 \left(RT_0 - \frac{u_0^2}{\kappa}\right)} \left[ \alpha_1 \left( \frac{\lambda u_0^2}{D} + \alpha_1 \frac{u_0^2}{\kappa h} - \beta_1 \frac{RT_0}{h} \right) - \frac{\lambda R}{2D} \left( T_0 (\alpha_1 + \beta_1) - k \right) \right]$$

$$\beta_2 = -\frac{h}{2RT_0} \left[ \alpha_1 \left( \frac{\lambda u_0^2}{2D} - g \right) + 2 \left( \frac{u_0^2}{h} \right) \alpha_2 \right]$$

In vielen Fällen sind die Glieder mit  $u_0^2$  verglichen mit den restlichen Gliedern der Formel für  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  vernachlässigbar klein und können somit gestrichen werden.

Die Koeffizienten  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  der dimensionslosen Temperaturformel  $\theta = T/T_0$  berechnen wir mit Hilfe der Gl. (4) und (1)

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \frac{v}{v_0} \quad \mu = \frac{u}{u_0} = \frac{v}{v_0}$$

$$\theta = \mu \pi$$

Daraus ergeben sich

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 + \beta_1 \quad \varepsilon_2 = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2$$

Wir diskutieren nun noch kurz zwei Veröffentlichungen, welche ein ähnliches Thema behandeln. In beiden Fällen werden im Gegensatz zur vorliegenden Studie gewisse Glieder in den Differentialgleichungen vernachlässigt.

Kemp [1], der in seinem Bericht die Strömungsvorgänge in einem Grubenschacht behandelt, streicht in der Impuls- und Energiegleichung den gegenüber den restlichen Gliedern kleinen Ausdruck  $udu$ . Ferner trifft er für die gesamte ausgetauschte Wärmemenge zwischen Luftstrom und Schachtwand einen linearen Ansatz.

$$Q = qz = \frac{\lambda c_p}{2D} \int_0^h (T_W - T) dz.$$

Zur Bestimmung von  $q$  muss er aber noch die Lufttemperatur und die Geschwindigkeit im Endquerschnitt kennen.

In der «Theoretischen Maschinenlehre» von Grashof [2] wird die Bewegung der Luft in einer Röhre mit Wärmeleitung untersucht, und dies im Hinblick auf die Strömung von Heizgasen in einem Heizkanal. Somit ist der Einfluss des Wärmeaustausches auf die Temperatur weit grösser als der der kinetischen Energie oder der Hubarbeit. Demzufolge

werden in der Energiegleichung die Glieder  $udu$  und  $gdz$  vernachlässigt. Aus ähnlichen Überlegungen setzt er in der Gasgleichung das spezifische Volumen der absoluten Temperatur proportional.

Alle diese getroffenen Vereinfachungen der Differentialgleichungen erlauben dann eine Lösung in geschlossener Form. Zum praktischen Gebrauch aber entwickelt Kemp seine Formel in eine Potenzreihe.

### Rechenbeispiel

Das Beispiel, das hier behandelt werden soll, gliedert sich in zwei Teile, nämlich in die Bestimmung der  $\mu$ -,  $\pi$ - und  $\theta$ -Kurven, erstens unter Berücksichtigung des Wärmeaustausches, und zweitens ohne Wärmeaustausch zwischen Schachtwand und Luftstrom. Im zweiten Fall vergleichen wir unsere Formeln mit den entsprechenden von Kemp. Abmessungen des Schachtes:

$$L = 1000 \text{ m} \quad D = 7 \text{ m} \quad \lambda = 0,022$$

Anfangswerte:

$$u_0 = 10 \text{ m/s} \quad k = -18^\circ \\ T_0 = 300^\circ \text{K} \quad T_W = 297^\circ \text{K}$$

Fall 1. Mit Wärmeaustausch. Für die Koeffizienten ergibt sich:

$$\alpha_1 = 0,0677 \quad \beta_1 = -0,1159 \quad \varepsilon_1 = -0,0482 \\ \alpha_2 = -0,00526 \quad \beta_2 = +0,0038 \quad \varepsilon_2 = -0,00931$$

Somit gelten die Gleichungen:

$$\mu = 1 + 0,0677 \zeta - 0,00526 \zeta^2 \\ \pi = 1 - 0,1159 \zeta + 0,0038 \zeta^2 \\ \theta = 1 - 0,0482 \zeta - 0,00931 \zeta^2$$

Fall 2: Ohne Wärmeaustausch. Die Koeffizienten sind:

$$\alpha_1 = 0,0833 \quad \beta_1 = -0,1159 \quad \varepsilon_1 = -0,0326 \\ \alpha_2 = 0,00499 \quad \beta_2 = +0,00467 \quad \varepsilon_2 = 0 \\ \mu = 1 + 0,0833 \zeta + 0,00499 \zeta^2 \\ \pi = 1 - 0,1159 \zeta + 0,00467 \zeta^2 \\ \theta = 1 - 0,0326 \zeta$$

Bild 2 zeigt die Ergebnisse. Nach unserer Schreibweise dargestellt, lauten die Formeln von Kemp:

$$\mu = 1 + 0,0831 \zeta + 0,00498 \zeta^2 \\ \pi = 1 - 0,1156 \zeta + 0,004625 \zeta^2 \\ \theta = 1 - 0,03255 \zeta$$

Zwischen den Formeln Kemp und den unserigen bestehen keine nennenswerten Unterschiede. Dies ist auf die verhältnismässig kleinen Geschwindigkeiten zurückzuführen.

### Zusammenfassung

Aus den vier Grundgleichungen (1), (2), (3), (4) leiten wir zwei Differentialgleichungen in den unbekannten Funktionen  $u(z)$  und  $p(z)$  her. Nachdem wir zur dimensionslosen

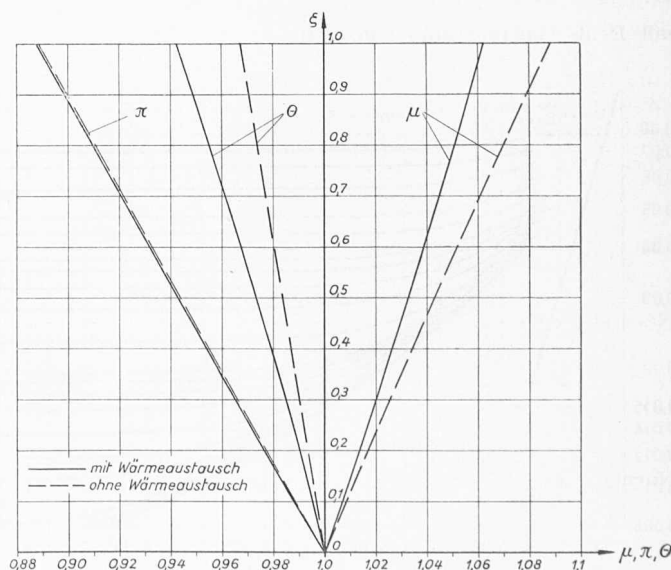


Bild 2. Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeiten  $\mu$ , der Drücke  $\pi$  und der Temperaturen  $\theta$  in Abhängigkeit vom Höhenverhältnis



Schreibweise übergegangen sind, stellen wir, gestützt auf qualitative Betrachtungen der Strömungsvorgänge im Schacht, die Funktionen  $\mu$  und  $\pi$  in Potenzreihen dar. Ihre Koeffizienten, welche im wesentlichen die Ableitungen der unbekannten Funktionen  $\mu$  und  $\pi$  im Nullpunkt darstellen, können durch Einsetzen der Anfangswerte  $\zeta = 0$ :  $\mu = 1$ ,  $\pi = 1$  sowohl in den Differentialgleichungen als auch in dem einmal nach  $\zeta$  differenzierten Gleichungssystem ermittelt werden.

## Bemerkungen zur Reduktion elliptischer Integrale auf Normalintegrale

DK 517.7

Von Dr. Reinhard Hürlimann, AG Brown, Boveri & Cie., Baden \*)

Herrn Professor Dr. J. Ackeret zum 65. Geburtstag gewidmet

### 1. Einleitung

Im Zusammenhang mit einer von Prof. Dr. J. Ackeret angeregten Arbeit auf dem Gebiete der Aerodynamik — Berechnung des minimalen induzierten Widerstandes einer Schaufel mit Spalt im Rechteckkanal [1] — hatte sich der Verfasser verschiedentlich mit der Lösung und numerischen Auswertung elliptischer Integrale zu befassen. Die Beschäftigung mit diesem Problemkreis gab den Anstoss zu den folgenden Überlegungen.

Ein erster Schritt bei der Berechnung elliptischer Integrale besteht bekanntlich darin, diese mit einer geeigneten Substitution auf Normalintegrale zurückzuführen. In gewissen Fällen treten nun die Integrale bereits in einer Form auf, die bei Kenntnis dieser Substitution nach kurzer Rechnung auf Normalintegrale reduzierbar ist.

Dem Ingenieur, der sich vor die Aufgabe gestellt sieht, solche nicht elementare Integrale zu lösen, kann es jedoch nicht in erster Linie daran gelegen sein, sich auf diesem Gebiet eingehender mit Funktionentheorie zu befassen. Er ist deshalb auf Hilfsmittel angewiesen, wie die Integraltafeln von Byrd und Friedman [2], Jahnke und Emde [3] u. a. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint es deshalb angebracht, auf eine Möglichkeit hinzuweisen, die für einige Fälle das rasche Auffinden der gewünschten Substitutionsformeln gestattet.

### 2. Die elliptischen Integrale

Elliptische Integrale lassen sich in die Form

$$(1) \int \frac{R(t)}{\sqrt{P(t)}} dt$$

bringen, wo  $R(t)$  eine rationale Funktion von  $t$  und  $P(t)$  ein Polynom 3. oder 4. Grades in  $t$  mit einfachen Nullstellen bedeuten.

Das Integral (1) ist, wie bereits angedeutet, reduzierbar auf eine Linearkombination von elementaren Integralen und von Normalintegralen. Die letzteren sind nachstehend an- geschrieben:

Normalintegral 1. Gattung:

$$(2) F(\tau^*, k) = u = \int_0^{\tau^*} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}$$

Normalintegral 2. Gattung:

$$(3) E(\tau^*, k) = \int_0^{\tau^*} \sqrt{\frac{1-k^2\tau^2}{1-\tau^2}} d\tau$$

Normalintegral 3. Gattung:

$$(4) \Pi(\tau^*, \alpha^2, k) = \int_0^{\tau^*} \frac{d\tau}{(1-\alpha^2\tau^2)\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}$$

\*) Ehemals Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik an der ETH, Zürich.

Weiter diskutieren wir kurz zwei Veröffentlichungen von Kemp und Grashof an Hand eines Rechenbeispiels.

### Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Kemp: Analysis of the Air Flow in Downcast Shafts with Reference to the Trailing-hose Method of Resistance Measurement. «Mine Ventilation Journal», January, 1962.
- [2] F. Grashof: Theoretische Maschinenlehre, Leipzig, Verlag von Leopold Voss, 1875, Bd. 1.

Dabei bezeichnet  $k$  den Modul und  $\alpha^2$  den Parameter des elliptischen Normalintegrals 3. Gattung, wobei  $-\infty < \alpha^2 < +\infty$ .

Die Substitution  $\tau = \sin \psi$  führt auf die Legendreschen Normalformen  $F(\varphi, k)$ ,  $E(\varphi, k)$  und  $\Pi(\varphi, \alpha^2, k)$  mit  $\varphi = \arcsin \tau^*$ . Falls die obere Integrationsgrenze  $\tau^* = 1$  bzw.  $\varphi = \pi/2$  ist, ergeben sich die vollständigen Normalintegrale  $K(k)$ ,  $E(k)$  und  $\Pi(\alpha^2, k)$ .

### 3. Die Ermittlung der Substitutionsformel

Die Integrale (2), (3) und (4) sind für reelle Werte, die den Bedingungen  $0 \leq k \leq 1$ ,  $0 \leq \tau^* \leq 1$  genügen, tabelliert. Zur Auswertung ist deshalb das Integral (1) auf Normalintegrale, welche die vorgenannten Bedingungen erfüllen, umzuformen. Eine Möglichkeit, in bestimmten Fällen eine dazu geeignete Substitution auf einfachem Wege zu finden, wird nachstehend erläutert.

Für die folgenden Ausführungen wird vorausgesetzt, dass die Koeffizienten des Polynoms  $P(t)$  in (1) reell sind. Falls  $P(t)$  konjugiert komplexe Wurzeln aufweist, werden lediglich die häufig auftretenden «symmetrischen» Fälle behandelt, welche durch

$$P(t) = a_0(t^2 + \alpha^2)(t^2 + b^2)$$

definiert sind. Ausserdem sei angenommen, dass eine Integrationsgrenze zugleich Nullstelle des Radikanden  $P(t)$  ist. Diese wird mit  $t_0^*$ , die andere Integrationsgrenze mit  $t^*$  bezeichnet. Oft ist es von Vorteil, die reellen Nullstellen zusammen mit der Integrationsgrenze  $t^*$  auf einer Zahlengeraden angeordnet zu denken, die über den unendlich fernen Punkt geschlossen ist.

Zur Umformung des elliptischen Integrals (1) auf Normalintegrale sowie für eine spätere numerische Auswertung ist es vorteilhaft, die trigonometrische Schreibweise zu benutzen oder Jacobische elliptische Funktionen einzuführen (vgl. [2]).

Die Substitution wird in der schon von Richelot [4] behandelten Form

$$(5) \sin^2 \psi = f(t) = \frac{s_1 s_3}{s_2 s_4}$$

geschrieben. Die Grössen  $s_1, s_2, s_3, s_4$  werden dabei entsprechend dem Integrationsintervall und den Wurzeln der Gleichung  $P(t) = 0$  für die verschiedenen möglichen Fälle nach folgendem Schema bestimmt (vgl. Bild 1):

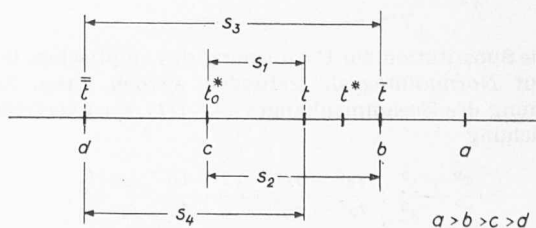


Bild 1. Darstellung der in (5) benötigten Grössen  $s_1, s_2, s_3, s_4$  als Strecken auf einer Zahlengeraden (über den unendlich fernen Punkt als geschlossen zu denken)