

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 81 (1963)
Heft: 11

Artikel: Numerische Methoden des restringierten Dreikörperproblems
Autor: Ginsburg, Theo
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-66738>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

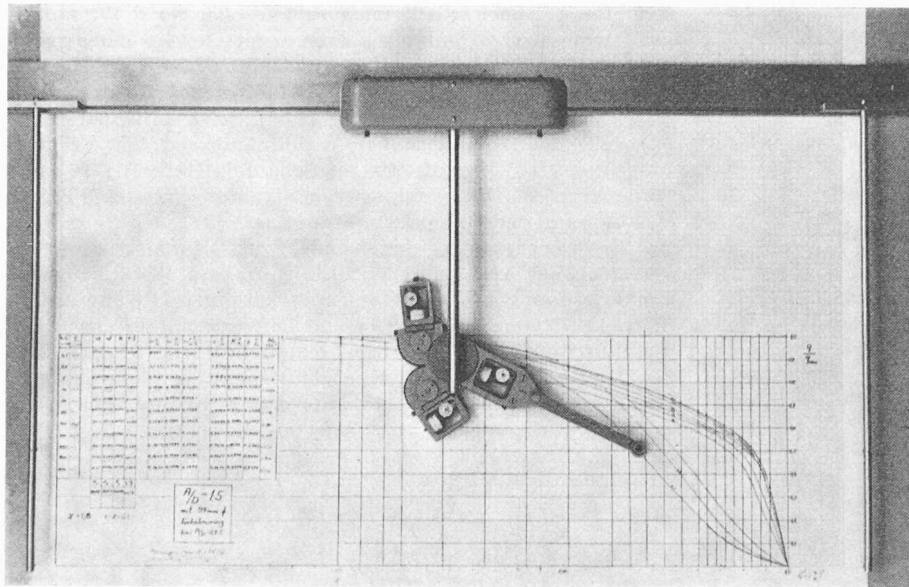


Bild 3. Amsler — Potenzplanimeter für Potenzen 1/2, 1 und 3/2 zur Auswertung aerodynamischer Strömungsgrößen

die einzelnen Streuungen bei mehrmaligem Umfahren der Einzelfunktionen mit einem Linearplanimeter.

C. Der gesamte Zeitgewinn gegenüber einer Einzelauswertung mit dem Linearplanimeter ist sehr beträchtlich. Er kann bei zweckmässiger Normierung der Diagramme und einiger Fertigkeit in der Handhabung etwa $\frac{2}{3}$ und mehr betragen. Man wird dabei mit Vorteil mehrere Kurven auf ein Blatt auftragen.

Dieses Potenzplanimeter wird am Institut für Aerodynamik der ETH, Zürich, sowohl bei den Laboratoriumsübungen für die Studierenden wie auch bei den Forschungsarbeiten angewendet.

man die Leitschiene parallel zur Nulllinie des Diagramms, das sodann zuerst von der Nulllinie am Anfang bis zur Nulllinie am Ende der Kurve (für Ablesungen a_1 und a_3) und schliesslich bis zum Ausgangspunkt zurück (für Ablesung a_2) umfahren wird. Die Differenz-Anzeigen (a_i) an den drei Integrierrollen ($i = 1, 2$ und 3) ergeben mit entsprechenden, dem Instrument eigenen Konstanten (K_i) multipliziert, die drei gesuchten Integralwerte

$$I_1 = \int_0^1 y^{1/2} dx = K_1 \cdot a_1, \quad I_2 = \int_0^1 y dx = K_2 \cdot a_2 \quad \text{und}$$

$$I_3 = \int_0^1 y^{3/2} dx = K_3 \cdot (a_1 - K_4 \cdot a_3),$$

wobei für das dritte Integral eine Superposition der Anzeigen massgebend ist. Damit ist die Bestimmung der sekundlichen Volumina, der Impulsströme und der kinetischen Energieströme auf eine einmalige, simultane Planimetrie der direkt aufgetragenen Messgrößen = Staudrücke reduziert unter Elimination von Zwischenrechnungen und Zwischenauftragungen.

Auf Grund von Erfahrungen beim Gebrauch ergeben sich folgende Regeln:

A. Das Umfahren mit diesem Potenzplanimeter ist mit demjenigen bei einem gewöhnlichen Planimeter vergleichbar. Zwecks Gewährleistung der Genauigkeit werden die üblichen Planimetrierungsregeln befolgt (kein ruckweises Anfahren und Anhalten, kein Ueberspringen von Papierkanten, kein Hochspringen des Fahrarms). Dazu gehören Papierblätter von entsprechendem Format: hier etwa 50×70 cm.

B. Die Genauigkeit der simultanen Auswertung mit diesem Planimeter ist sehr befriedigend. So ergeben z. B. Kontrollen der hier erhaltenen Integralwerte von analytischen Funktionen durch Rechnungen keine grösseren Abweichungen, als

Literaturhinweise

Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich, Herausgegeben von Prof. Dr. J. Ackeret. Verlag Leemann, Zürich:

- [1] A. Gerber: Untersuchung über Grenzschichtabsaugung. Nr. 8 (1938).
- [2] W. Pfenninger: Vergleich der Impulsmethode mit der Wägung bei Profil-Widerstandsmessungen. Nr. 8 (1943).
- [3] W. Pfenninger: Untersuchungen über Reibungsverminderungen an Tragflügeln, insbesondere mit Hilfe von Grenzschicht-Absaugung. Nr. 13 (1946).
- [4] J. Ackeret, F. Feldmann u. N. Rott: Untersuchungen an Verdichtungsstössen und Grenzschichten in schnell bewegten Gassen. Nr. 10 (1946).
- [5] C. Keller: Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie. Nr. 2 (1934).
- [6] W. T. Sawyer: Experimental Investigation of a Stationary Cascade of Aerodynamic Profiles. Nr. 17 (1949).
- [7] Z. Plaskowski: Schubvermehrung durch Strahlmischung. Nr. 21 (1954).
- [8] R. W. Detra: The secondary Flow in Curved Pipes. Nr. 20 (1953).
- [9] A. Haerter: Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Lüftungsanlagen von Strassentunneln. Nr. 29 (1961).
- [10] H. Sprenger: Experimentelle Untersuchungen an geraden und gekrümmten Diffusoren. Nr. 27 (1959).
- [11] E. Mühlemann: Experimentelle Untersuchungen an einer axialen Gebläsestufe. Nr. 12 (1946).
- [12] H. Sprenger: 90° Krümmer für Rechteckrohre — Druckverlust von einzelnen und von in Serie geschalteten Krümmern. SBZ 1963, Heft 11, S. 181.
- [13] F. Dubois: Nouveaux appareils pour opérations mathématiques. «Génie Civil» CXXX (1953), 8, S. 150-153.
- [14] Th. Erismann: Alte und neue mechanische Integriergeräte. Beilage Technik — NZZ, Nr. 109 (16. Jan. 1952).

Numerische Methoden des restringierten Dreikörperproblems

DK 521.531

Von PD Dr. Theo Ginsburg, Institut für angewandte Mathematik an der ETH, Zürich *)

Herrn Professor Dr. J. Ackeret zum 65. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Das Zeitalter der Erforschung des Weltenraumes — oder sagen wir vorläufig bescheidener des Sonnensystems — mit Hilfe von Raumschiffen, verbunden mit der raschen Entwicklung von hochleistungsfähigen Rechenautomaten, hat mit der Himmelsmechanik eine Wissenschaft wieder zum pulsierenden Leben erweckt, welche in den vergangenen Jahrzeh-

*) Ehemals Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik an der ETH, Zürich.

ten zu erstarren schien. Waren es bis vor kurzem lediglich einige wenige besinnliche Forscher, welche im stillen Kämmerlein mit Bleistift und Handrechenmaschine Planetenbahnen berechneten, so finden sich heute in allen grossen Raketen- und Flugzeugwerken mit den modernsten Computern ausgerüstete Rechenzentren, deren Aufgabe in erster Linie darin besteht, bessere, genauere und schnellere Methoden der Bahnbestimmung von Himmelskörpern zu entwickeln. Dabei werden viele alte, fast vergessene Forschungs-

ergebnisse wieder aktuell, welche zur Zeit ihrer Erarbeitung nur einen rein theoretischen Wert besaßen, verbunden mit den modernen Hilfsmitteln der Rechentechnik jedoch heute grosse Bedeutung erlangen. Wir denken hierbei an die Arbeiten von *Poincaré*, *Sundman*, *Levi-Civita*, um nur einige der wichtigsten zu nennen.

Wenn die Schweiz sich auch heute noch nicht selbst mit praktischen Problemen der Weltraumforschung befasst (sondern höchstens die europäische Raumforschung finanziell unterstützt), so werden doch an unseren Hochschulen theoretische Fragen aus diesem Problemkreis untersucht. So wurde an der ETH vor zwei Jahren ein Seminar unter der Leitung der Professoren *J. Ackeret* und *E. Stiefel* durchgeführt, bei welchem die Himmelsmechanik im Mittelpunkt stand. Neben verschiedenen theoretischen Untersuchungen, wie beispielsweise über den Einfluss des Lichtdruckes, der Reibung und der Abplattung der Erdkugel auf Satellitenbahnen, wurden im speziellen einige Methoden der Bahnbestimmung durch mathematische Experimente auf elektronischen Rechenmaschinen auf ihre Güte und Schnelligkeit hin getestet. Zur Verfügung stand dabei der an der ETH entwickelte Computer *ERMETH*, eine dezimale Seriemaschine mit beweglichem Komma; die Zahlen werden dabei in halblogarithmischer Darstellung mit elfstelligen Mantissen angegeben und umfassen einen Wertebereich von 10^{-200} bis 10^{200} . Die mittleren Operationszeiten betragen für die Addition 9 msec, für die Multiplikation 23 msec.

Alle im folgenden dargelegten Untersuchungen wurden im Hinblick auf die Bestimmung von Satellitenbahnen im Einflussbereich von Erde und Mond gemacht, wobei die Störeinflüsse der Sonne und der anderen Planeten vernachlässigt wurden. Unter einigen vereinfachenden Annahmen kommt man zu dem sogenannten «*restringierten Dreikörperproblem*», welches in § 2 formuliert ist. Einige Lösungsmethoden werden in § 3 kurz diskutiert, u. a. die Integrationsmethode von *Cowell*, mit welcher die in § 4 angegebenen Resultate gewonnen wurden. Die dabei auch erwähnte *Regularisierung* des restringierten Dreikörperproblems wurde am Institut für angewandte Mathematik der ETH von *J. Waldvogel* genauer untersucht; die dabei verwendete Theorie und die Resultate einiger numerischer Berechnungen auf der *ERMETH* sollen in Kürze in einem Bericht publiziert werden [1].

2. Das restringierte Dreikörperproblem

Beim gewöhnlichen Dreikörperproblem der Himmelsmechanik handelt es sich um die Bewegung dreier materieller Punkte im Raume, welche sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen. Bekannterweise existiert eine explizite Lösung dieses allgemeinen Problems nicht, ebensowenig wie für das *restringierte* Dreikörperproblem, welches angenähert auch das Verhalten eines Satelliten im Kraftfeld von Erde und Mond beschreibt. Dieses spezielle Problem ist gekennzeichnet durch folgende drei Einschränkungen:

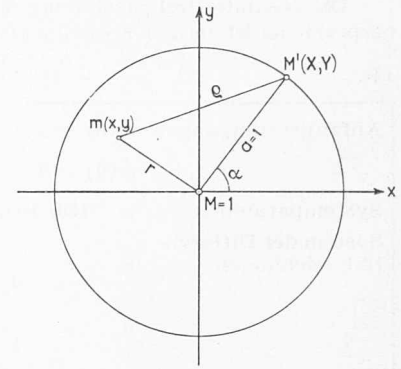
1. Alle drei Körper, deren Massen punktförmig konzentriert angenommen werden, bewegen sich in einer Ebene.

2. Die Masse des Satelliten m ist vernachlässigbar klein gegenüber den beiden anderen Massen M und M' von Erde und Mond. Deren Bewegungen werden somit vom Satelliten nicht beeinflusst.

3. Im geozentrischen System, in welchem wir rechnen werden, wird die Mondbahn als kreisförmig angenommen, so dass sich der Mond mit konstanter Geschwindigkeit um die im Nullpunkt ruhende Erde dreht. Die sich aus dieser Annahme gegenüber der Wirklichkeit ergebenden Abweichungen sind gering, da die Exzentrizität der Mondbahn lediglich $e = 0,0549$ beträgt.

Für die Rechnung im geozentrischen Koordinatensystem werden die Massen-, Längen- und Zeiteinheiten so normiert, dass die im Nullpunkt des Systems konzentrierte Erdmasse $M = 1$, der konstante Abstand zwischen Erde und Mond $a = 1$ und die Umlaufzeit des Mondes um die Erde $\tau = 2\pi$

Bild 1 Bezeichnungen der Massen (M Erde, M' Mond, m Satellit), der Koordinaten und der Abstände



wird. Bezeichnen wir ferner mit X, Y die Koordinaten des Mondes, mit x, y diejenigen des Satelliten und mit r und ρ die Abstände des Satelliten von der Erde bzw. vom Monde (Bild 1), so erhalten die Newtonschen Bewegungsgleichungen für x, y unter Berücksichtigung der Einschränkungen 1 bis 3 folgende Form:

$$(1) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= -k^2 \left\{ \frac{x}{r^3} + \mu \frac{X-x}{\rho^3} - \mu X \right\} \\ \ddot{y} &= -k^2 \left\{ \frac{y}{r^3} + \mu \frac{Y-y}{\rho^3} - \mu Y \right\} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet μ das Verhältnis der Mond- zur Erdmasse

$$(2) \quad \mu = \frac{M'}{M}$$

während k^2 die Gravitationskonstante darstellt, welche sich bei den oben getroffenen Normierungen mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes bestimmen lässt:

$$(3) \quad k^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{\tau^2} \frac{1}{(1+\mu)} = \frac{1}{1+\mu}$$

Als einziger Parameter für das vom Satelliten unabhängige System der beiden grossen Massen tritt somit lediglich μ auf, welches für das Erde-Mond-System den Wert $\mu = 0,0123$ aufweist. Der Vollständigkeit halber seien hier noch die physikalischen Daten dieses Systems gegeben, welche teilweise nach der Rechnung mit den normierten Einheiten gebraucht werden, um die gefundenen Resultate in die uns geläufigen Längen- und Zeiteinheiten umzurechnen:

Mittlerer Abstand Erde-Mond	: $A = 384\,405$ km
Umlaufdauer des Mondes	: $T = 27,3216$ Tage
Masse der Erde	: $M = 5,977 \cdot 10^{27}$ g
Mittlerer Radius der Erde	: $R_e = 6371,229$ km
Masse des Mondes	: $M' = 7,350 \cdot 10^{25}$ g
Mittlerer Radius des Mondes	: $R_m = 1738,0$ km

Da auch das restringierte Dreikörperproblem in seiner äusserst einfachen Form (1) keine explizite Lösung zulässt, ist man auf numerische Verfahren zur Integration des Gleichungssystems angewiesen. Um ein spezielles Problem genau zu definieren, müssen ausser den Differentialgleichungen (1) auch die Anfangsbedingungen gegeben sein. Diese umfassen neben den zur Zeit $t = 0$ vorgegebenen Koordinaten $x(0), y(0)$ und Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}(0), \dot{y}(0)$ auch die für diesen Zeitpunkt geltende Lage des im Gegenurzeigersinne drehenden Mondes. Anstatt der Koordinaten X, Y wird diese Lage durch den Winkel α_0 gegeben, welcher die Verbindungslinie Erde-Mond mit der positiven x -Achse zur Zeit $t = 0$ bildet. In dem für die *ERMETH* entwickelten Rechenprogramm wurde die Wahl der Anfangsbedingungen etwas eingeschränkt, indem der Start des Satelliten immer auf der positiven x -Achse angenommen wurde und der Abschuss parallel zur Erdoberfläche, d. h. in der y -Richtung erfolgte.

Die gesamte Problemstellung des restringierten Dreikörperproblems ist in den Formeln (4) kurz zusammengefasst:

(4)

Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0$; $y(0) = 0$; $\alpha(0) = \alpha_0$	
$\dot{x}(0) = 0$; $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$	
Systemparameter:	μ (für Erde-Mond-System: $\mu = 0,0123$)
System der Differentialgleichungen:	$\ddot{x} = -\frac{1}{1+\mu} \left\{ \frac{x}{r^3} + \mu \frac{X-x}{\rho^3} - \mu X \right\}$ $\ddot{y} = -\frac{1}{1+\mu} \left\{ \frac{y}{r^3} + \mu \frac{Y-y}{\rho^3} - \mu Y \right\}$
	$r^2 = x^2 + y^2$; $\rho^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2$
	$X = \cos(t + \alpha_0)$; $Y = \sin(t + \alpha_0)$

Dabei sind natürlich bei den Anfangsbedingungen x_0 und \dot{y}_0 in den normierten Einheiten anzugeben.

3. Lösungsmethoden

Gehen wir darauf aus, Flugbahnen von Satelliten zu bestimmen, die von der Erde ausgehend in die Nähe des Mondes führen (*Annäherungsbahnen*), so zeigt bereits eine oberflächliche Analyse der Differentialgleichungen (4), dass bei der Annäherung des Satelliten an den Mond ($\rho < r$), dessen Kraftwirkung gegenüber derjenigen der viel weiter entfernten Erde stark überwiegt. Um diese qualitative Feststellung mathematisch zu fassen, führte *Subbotin* [2] den Begriff der «*Einflussphäre eines kleinen Himmelskörpers M' in bezug auf einen grossen Himmelskörper M*» ein; der Radius r^* der Einflussphäre ergibt sich nach der Formel:

$$(5) \quad r^* = A (M'/M)^{2/5} = A \mu^{2/5}$$

wobei A den Abstand zwischen den beiden Körpern bedeutet (für die genaue Definition der Einflussphäre verweisen wir auf [3], S. 83). Für das Erde-Mond-System wird $r^* = 66\,000$ Kilometer. Bezeichnen wir mit ρ den Abstand des Satelliten vom Mond, so zeigt eine kleine Abschätzung, dass das Verhältnis der Störung durch die Erdanziehung ΔF zur Anziehung F' des Mondes innerhalb der Einflussphäre der Relation

$$(6) \quad \frac{\Delta F}{F'} \approx \left(\frac{\rho}{r^*} \right)^3 \left(\frac{16 M'}{M} \right)^{1/5}$$

genügt.

Gibt man sich bei der Bestimmung der Annäherungsbahnen von der Erde zum Mond mit Näherungsmethoden zufrieden, so erlaubt der so definierte Begriff der Einflussphäre eine Gliederung der Flugbahn in drei Teile: die Bewegung von der Erde zur Einflussphäre, die Bewegung innerhalb dieser Sphäre und die Bewegung von ihr weg. Bei der ersten und dritten Phase ist der Einfluss des Mondes vernachlässigbar; wir können deshalb in einem geozentrischen System die Flugbahn näherungsweise durch die Kepler'schen Gesetze (Zweikörperproblem) bestimmen. Eine entsprechende Vereinfachung ergibt sich innerhalb der Einflussphäre, wo in einem selenozentrischen System der Störeinfluss der Erde vernachlässigt und die Flugbahn deshalb wieder als ein Kegelschnitt mit dem Mond in einem der Brennpunkte angenähert werden kann. *Egorov* hat mit Hilfe dieses äusserst einfachen Verfahrens in einer umfangreichen Arbeit [3] die grundlegenden Gesetzmässigkeiten und Eigenschaften von Annäherungsbahnen untersucht.

Genügt die bei diesem Näherungsverfahren erreichte Genauigkeit nicht, so müssen numerische Integrationsverfahren herangezogen werden. Die Astronomen haben im Laufe der Jahrhunderte äusserst genaue Methoden entwickelt, welche der speziellen Form der in der Himmelsmechanik auftretenden Differentialgleichungen Rechnung tragen. Alle diese Rechenverfahren beruhen auf dem sogenannten *Differenzenschema*, mit dessen Hilfe die Lösungskurven stückweise durch Polynome ersetzt werden können. Bei seinen Untersuchungen der Bewegung des Halleyschen Kometen für den langen Zeitraum von 1759 bis 1910 wandte der englische Astronom Co-

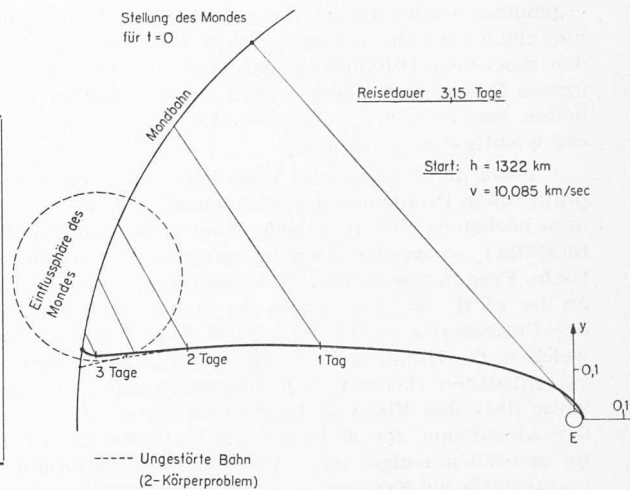


Bild 2. Flugbahn eines Satelliten, der nach 3,15 Tagen auf den Mond auftrifft

well zum erstenmal eine neue Methode an, welche seither seinen Namen trägt und die nach einer noch von Cowell selbst empfohlenen Verbesserung den grossen Vorteil hat, dass die Ausbreitung von Rundungsfehlern auch bei Integrationen über lange Zeiträume gering ist. Die Methode ist für den praktischen Gebrauch in [4] beschrieben; eine Theorie der Fehlerfortpflanzung und Fehlerabschätzung findet sich in [5]. Das zweite verbesserte Integrationsverfahren von Cowell wurde auf der ERMETH programmiert, wobei das Differenzenschema für die beiden Koordinaten x, y bis zur siebten Differenz verwendet wurde.

Schon aus dem Differentialgleichungs-System (4) ist ersichtlich, dass bei starker Annäherung des Satelliten an die Erde oder den Mond r bzw. ρ sehr klein wird und im Falle eines Zusammenstosses ganz verschwindet, wodurch die rechten Seiten von (4) sehr gross und im Grenzfalle sogar unendlich werden. Dies äussert sich im Differenzenschema darin, dass die höchste verwendete Differenz (in unserem konkreten Falle die siebte) bei der Annäherung des Satelliten an einen der beiden Himmelskörper immer grössere Werte annehmen, wenn die Schrittweite Δt konstant gehalten wird. Dies gibt uns ein Mittel in die Hand, den Zeitschritt für die Integration zu regeln. Um eine gleichmässige Genauigkeit über die ganze Integration zu erreichen, wird vorgeschrieben, dass sich die siebten Differenzen in bestimmten Grenzen bewegen müssen. Ueberschreiten diese Differenzen die obere Grenze, so wird der Zeitschritt verkleinert, bis sie sich wieder im vorgeschriebenen Intervall befinden. Andererseits kann der Zeitschritt vergrössert werden, falls die höchsten Differenzen eine vorgeschriebene Grenze unterschreiten. Im Falle der Flugbahn von der Erde zum Mond muss natürlich die Schrittweite beim Wegflug von der Erde vergrössert und beim Anflug des Mondes verkleinert werden. In der Praxis hat sich eine Verdopplung bzw. eine Fünftelung der Schrittweite als günstig erwiesen und wurde deshalb in das ERMETH-Programm eingebaut.

Mit dieser Methode der diskreten Anpassung der Schrittweite an die Genauigkeit gelingt es, Annäherungsbahnen an den Mond zu berechnen, welche sehr nahe am Mondmittelpunkt vorbeiführen, wobei eben in der Nähe des Mondes sehr viele Integrationsschritte durchgeführt werden müssen. Die Grenze dieses Verfahrens wird jedoch dort erreicht, wo die Schrittweite so gering wird, dass sie mit der Rechengenauigkeit der Maschine vergleichbar wird; dies ist der Fall, wenn die Satellitenbahn fast oder ganz durch den Mondmittelpunkt führt (der Mond wie auch die Erde werden bei der ganzen Rechnung immer als *Massenpunkte* angenommen). In diesem Falle hilft nur ein Radikalmittel: die in den Gleichungen (4) möglichen Singularitäten bei $r = 0$ oder $\rho = 0$ müssen durch spezielle Transformationen ausgemerzt werden. Dies gelingt durch das sogenannte Verfahren der *Regularisierung*, welches zuerst von Levi-Civita [6] entwickelt wurde. Diese Transformationen gewährleisten eine automatische und kon-

