Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 81 (1963)
Heft: 11

Artikel: Numerische Methoden des restringierten Dreikörperproblems
Autor: Ginsburg, Theo
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66738

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

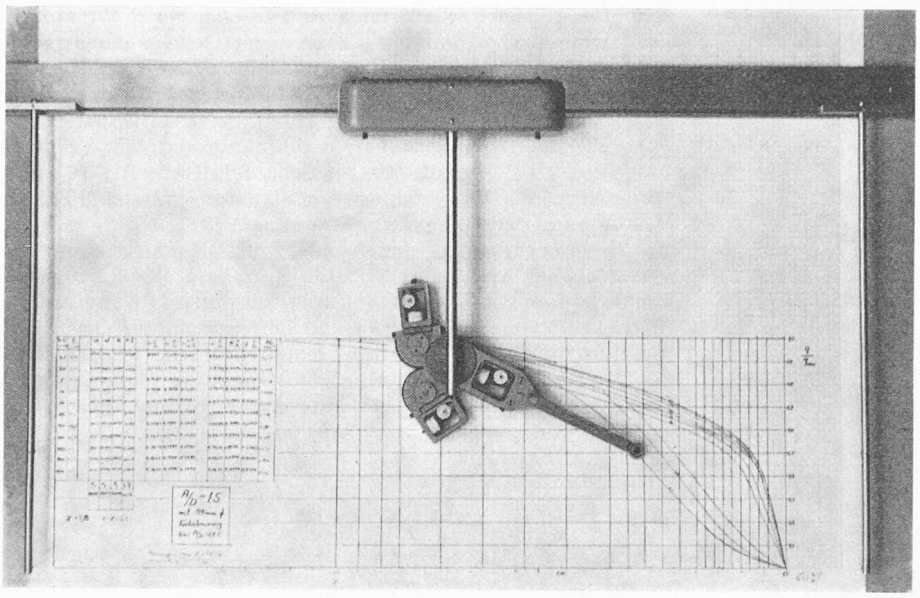


Bild 3. *Amsler* — Potenzplanimeter für Potenzen 1/2, 1 und 3/2 zur Auswertung aerodynamischer Strömungsgrössen

man die Leitschiene parallel zur Nullinie des Diagramms, das sodann zuerst von der Nullinie am Anfang bis zur Nullinie am Ende der Kurve (für Ablesungen a_1 und a_3) und schliesslich bis zum Ausgangspunkt zurück (für Ablesung a_2) umfahren wird. Die Differenz-Anzeigen (a_i) an den drei Integrierrollen (i = 1, 2 und 3) ergeben mit entsprechenden, dem Instrument eigenen Konstanten (K_i) multipliziert, die drei gesuchten Integralwerte

$$I_1 = \int_0^1 y^{1/2}\, dx = K_1 \,.\, a_1 \,,\; I_2 = \int_0^1 y\, dx = K_2 \,.\, a_2 \text{ und}$$

$$I_3 = \int_0^1 y^{3/2}\, dx = K_3 \,.\, (a_1 - K_4 \,.\, a_3) \,,$$

wobei für das dritte Integral eine Superposition der Anzeigen massgebend ist. Damit ist die Bestimmung der sekundlichen Volumina, der Impulsströme und der kinetischen Energieströme auf eine einmalige, simultane Planimetrierung der direkt aufgetragenen Messgrössen = Staudrücke reduziert unter Elimination von Zwischenrechnungen und Zwischenauftragungen.

Auf Grund von Erfahrungen beim Gebrauch ergeben sich folgende Regeln:

A. Das Umfahren mit diesem Potenzplanimeter ist mit demjenigen bei einem gewöhnlichen Planimeter vergleichbar. Zwecks Gewährleistung der Genauigkeit werden die üblichen Planimetrierungsregeln befolgt (kein ruckweises Anfahren und Anhalten, kein Ueberspringen von Papierkanten, kein Hochspringen des Fahrarms). Dazu gehören Papierblätter von entsprechendem Format: hier etwa 50 × 70 cm.

B. Die Genauigkeit der simultanen Auswertung mit diesem Planimeter ist sehr befriedigend. So ergeben z. B. Kontrollen der hier erhaltenen Integralwerte von analytischen Funktionen durch Rechnungen keine grösseren Abweichungen, als die einzelnen Streuungen bei mehrmaligem Umfahren der Einzelfunktionen mit einem Linearplanimeter.

C. Der gesamte Zeitgewinn gegenüber einer Einzelauswertung mit dem Linearplanimeter ist sehr beträchtlich. Er kann bei zweckmässiger Normierung der Diagramme und einiger Fertigkeit in der Handhabung etwa ⅔ und mehr betragen. Man wird dabei mit Vorteil mehrere Kurven auf ein Blatt auftragen.

Dieses Potenzplanimeter wird am Institut für Aerodynamik der ETH, Zürich, sowohl bei den Laboratoriumsübungen für die Studierenden wie auch bei den Forschungsarbeiten angewendet.

Literaturhinweise

Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Ackeret. Verlag Leemann, Zürich:

[1] *A. Gerber:* Untersuchung über Grenzschichtabsaugung. Nr. 8 (1938).

[2] *W. Pfenninger:* Vergleich der Impulsmethode mit der Wägung bei Profil-Widerstandsmessungen. Nr. 8 (1943).

[3] *W. Pfenninger:* Untersuchungen über Reibungsverminderungen an Tragflügeln, insbesondere mit Hilfe von Grenzschicht-Absaugung. Nr. 13 (1946).

[4] *J. Ackeret, F. Feldmann u. N. Rott:* Untersuchungen an Verdichtungsstössen und Grenzschichten in schnell bewegten Gassen. Nr. 10 (1946).

[5] *C. Keller:* Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie. Nr. 2 (1934).

[6] *W. T. Sawyer:* Experimental Investigation of a Stationary Cascade of Aerodynamic Profiles. Nr. 17 (1949).

[7] *Z. Plaskowski:* Schubvermehrung durch Strahlmischung. Nr. 21 (1954).

[8] *R. W. Detra:* The secondary Flow in Curved Pipes. Nr. 20 (1953).

[9] *A. Haerter:* Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Lüftungsanlagen von Strassentunneln. Nr. 29 (1961).

[10] *H. Sprenger:* Experimentelle Untersuchungen an geraden und gekrümmten Diffusoren. Nr. 27 (1959).

[11] *E. Mühlemann:* Experimentelle Untersuchungen an einer axialen Gebläsestufe. Nr. 12 (1946).

[12] *H. Sprenger:* 90° Krümmer für Rechteckrohre — Druckverlust von einzelnen und von in Serie geschalteten Krümmern. SBZ 1963, Heft 11, S. 181.

[13] *F. Dubois:* Nouveaux appareils pour opérations mathématiques. «Génie Civil» CXXX (1953), 8, S. 150-153.

[14] *Th. Erismann:* Alte und neue mechanische Integriergeräte. Beilage Technik — NZZ, Nr. 109 (16. Jan. 1952).

Numerische Methoden des restringierten Dreikörperproblems

DK 521.531

Von PD Dr. **Theo Ginsburg**, Institut für angewandte Mathematik an der ETH, Zürich *)

Herrn Professor Dr. **J. Ackeret** zum 65. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Das Zeitalter der Erforschung des Weltenraumes — oder sagen wir vorläufig bescheidener des Sonnensystems — mit Hilfe von Raumschiffen, verbunden mit der raschen Entwicklung von hochleistungsfähigen Rechenautomaten, hat mit der *Himmelsmechanik* eine Wissenschaft wieder zum pulsierenden Leben erweckt, welche in den vergangenen Jahrzehnten zu erstarren schien. Waren es bis vor kurzem lediglich einige wenige besinnliche Forscher, welche im stillen Kämmerlein mit Bleistift und Handrechenmaschine Planetenbahnen berechneten, so finden sich heute in allen grossen Raketen- und Flugzeugwerken mit den modernsten Computern ausgerüstete Rechenzentren, deren Aufgabe in erster Linie darin besteht, bessere, genauere und schnellere Methoden der Bahnbestimmung von Himmelskörpern zu entwikkeln. Dabei werden viele alte, fast vergessene Forschungs-

*) Ehemals Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik an der ETH, Zürich.

ergebnisse wieder aktuell, welche zur Zeit ihrer Erarbeitung nur einen rein theoretischen Wert besassen, verbunden mit den modernen Hilfsmitteln der Rechentechnik jedoch heute grosse Bedeutung erlangen. Wir denken hierbei an die Arbeiten von *Poincaré, Sundman, Levi-Civita,* um nur einige der wichtigsten zu nennen.

Wenn die Schweiz sich auch heute noch nicht selbst mit praktischen Problemen der Weltraumforschung befasst (sondern höchstens die europäische Raumforschung finanziell unterstützt), so werden doch an unseren Hochschulen theoretische Fragen aus diesem Problemkreis untersucht. So wurde an der ETH vor zwei Jahren ein Seminar unter der Leitung der Professoren *J. Ackeret* und *E. Stiefel* durchgeführt, bei welchem die Himmelsmechanik im Mittelpunkt stand. Neben verschiedenen theoretischen Untersuchungen, wie beispielsweise über den Einfluss des Lichtdruckes, der Reibung und der Abplattung der Erdkugel auf Satellitenbahnen, wurden im speziellen einige Methoden der Bahnbestimmung durch mathematische Experimente auf elektronischen Rechenmaschinen auf ihre Güte und Schnelligkeit hin getestet. Zur Verfügung stand dabei der an der ETH entwickelte Computer ERMETH, eine dezimale Seriemaschine mit beweglichem Komma; die Zahlen werden dabei in halblogarithmischer Darstellung mit elfstelligen Mantissen angegeben und umfassen einen Wertebereich von 10^{-200} bis 10^{200}. Die mittleren Operationszeiten betragen für die Addition 9 msec, für die Multiplikation 23 msec.

Alle im folgenden dargelegten Untersuchungen wurden im Hinblick auf die Bestimmung von Satellitenbahnen im Einflussbereich von Erde und Mond gemacht, wobei die Störeinflüsse der Sonne und der anderen Planeten vernachlässigt wurden. Unter einigen vereinfachenden Annahmen kommt man zu dem sogenannten *«restringierten Dreikörperproblem»*, welches in § 2 formuliert ist. Einige Lösungsmethoden werden in § 3 kurz diskutiert, u. a. die Integrationsmethode von *Cowell,* mit welcher die in § 4 angegebenen Resultate gewonnen wurden. Die dabei auch erwähnte *Regularisierung* des restringierten Dreikörperproblems wurde am Institut für angewandte Mathematik der ETH von *J. Waldvogel* genauer untersucht; die dabei verwendete Theorie und die Resultate einiger numerischer Berechnungen auf der ERMETH sollen in Kürze in einem Bericht publiziert werden [1].

2. Das restringierte Dreikörperproblem

Beim gewöhnlichen Dreikörperproblem der Himmelsmechanik handelt es sich um die Bewegung dreier materieller Punkte im Raume, welche sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen. Bekannterweise existiert eine explizite Lösung dieses allgemeinen Problems nicht, ebensowenig wie für das *restringierte* Dreikörperproblem, welches angenähert auch das Verhalten eines Satelliten im Kraftfeld von Erde und Mond beschreibt. Dieses spezielle Problem ist gekennzeichnet durch folgende drei Einschränkungen:

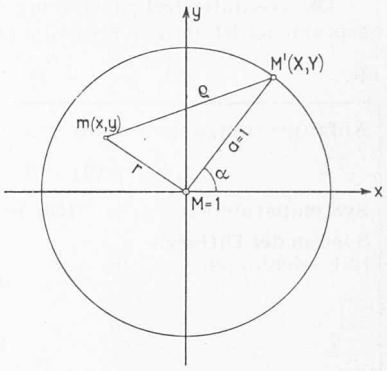
1. Alle drei Körper, deren Massen punktförmig konzentriert angenommen werden, bewegen sich in einer Ebene.

2. Die Masse des Satelliten m ist vernachlässigbar klein gegenüber den beiden anderen Massen M und M' von Erde und Mond. Deren Bewegungen werden somit vom Satelliten nicht beeinflusst.

3. Im geozentrischen System, in welchem wir rechnen werden, wird die Mondbahn als kreisförmig angenommen, so dass sich der Mond mit konstanter Geschwindigkeit um die im Nullpunkt ruhende Erde dreht. Die sich aus dieser Annahme gegenüber der Wirklichkeit ergebenden Abweichungen sind gering, da die Exzentrizität der Mondbahn lediglich $e = 0{,}0549$ beträgt.

Für die Rechnung im geozentrischen Koordinatensystem werden die Massen-, Längen- und Zeiteinheiten so normiert, dass die im Nullpunkt des Systems konzentrierte Erdmasse $M = 1$, der konstante Abstand zwischen Erde und Mond $a = 1$ und die Umlaufzeit des Mondes um die Erde $\tau = 2\pi$

Bild 1 Bezeichnungen der Massen (M Erde, M' Mond, m Satellit), der Koordinaten und der Abstände



wird. Bezeichnen wir ferner mit X, Y die Koordinaten des Mondes, mit x, y diejenigen des Satelliten und mit r und ρ die Abstände des Satelliten von der Erde bzw. vom Monde (Bild 1), so erhalten die Newtonschen Bewegungsgleichungen für x, y unter Berücksichtigung der Einschränkungen 1 bis 3 folgende Form:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \ddot{x} &= -k^2 \left\{ \frac{x}{r^3} + \mu \frac{X - x}{\rho^3} - \mu X \right\} \\ \ddot{y} &= -k^2 \left\{ \frac{y}{r^3} + \mu \frac{Y - y}{\rho^3} - \mu Y \right\} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet μ das Verhältnis der Mond- zur Erdmasse

$$(2)\qquad \mu = \frac{M'}{M}$$

während k^2 die Gravitationskonstante darstellt, welche sich bei den oben getroffenen Normierungen mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes bestimmen lässt:

$$(3)\qquad k^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{\tau^2} \frac{1}{(1+\mu)} = \frac{1}{1+\mu}$$

Als einziger Parameter für das vom Satelliten unabhängige System der beiden grossen Massen tritt somit lediglich μ auf, welches für das Erde-Mond-System den Wert $\mu = 0{,}0123$ aufweist. Der Vollständigkeit halber seien hier noch die physikalischen Daten dieses Systems gegeben, welche teilweise nach der Rechnung mit den normierten Einheiten gebraucht werden, um die gefundenen Resultate in die uns geläufigen Längen- und Zeiteinheiten umzurechnen:

Mittlerer Abstand Erde-Mond	:	$A = 384\,405$ km
Umlaufdauer des Mondes	:	$T = 27{,}3216$ Tage
Masse der Erde	:	$M = 5{,}977 . 10^{27}$ g
Mittlerer Radius der Erde	:	$R_e = 6371{,}229$ km
Masse des Mondes	:	$M' = 7{,}350 . 10^{25}$ g
Mittlerer Radius des Mondes	:	$R_m = 1738{,}0$ km

Da auch das restringierte Dreikörperproblem in seiner äusserst einfachen Form (1) keine explizite Lösung zulässt, ist man auf numerische Verfahren zur Integration des Gleichungssystems angewiesen. Um ein spezielles Problem genau zu definieren, müssen ausser den Differentialgleichungen (1) auch die Anfangsbedingungen gegeben sein. Diese umfassen neben den zur Zeit $t = 0$ vorgegebenen Koordinaten $x(0)$, $y(0)$ und Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}(0)$, $\dot{y}(0)$ auch die für diesen Zeitpunkt geltende Lage des im Gegenuhrzeigersinne drehenden Mondes. Anstatt der Koordinaten X, Y wird diese Lage durch den Winkel α_0 gegeben, welcher die Verbindungslinie Erde-Mond mit der positiven x-Achse zur Zeit $t = 0$ bildet. In dem für die ERMETH entwickelten Rechenprogramm wurde die Wahl der Anfangsbedingungen etwas eingeschränkt, indem der Start des Satelliten immer auf der positiven x-Achse angenommen wurde und der Abschuss parallel zur Erdoberfläche, d. h. in der y-Richtung erfolgte.

Die gesamte Problemstellung des restringierten Dreikörperproblems ist in den Formeln (4) kurz zusammengefasst:

(4)

Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0$; $y(0) = 0$; $\alpha(0) = \alpha_0$

$\dot{x}(0) = 0$; $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$

Systemparameter: μ (für Erde-Mond-System: $\mu = 0{,}0123$)

System der Differentialgleichungen:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{1+\mu}\left\{\frac{x}{r^3} + \mu\frac{X-x}{\rho^3} - \mu X\right\}$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{1+\mu}\left\{\frac{y}{r^3} + \mu\frac{Y-y}{\rho^3} - \mu Y\right\}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad ; \rho^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2$$

$$X = \cos(t+\alpha_0) \; ; \; Y = \sin(t+\alpha_0)$$

Dabei sind natürlich bei den Anfangsbedingungen x_0 und $\dot{y}_0$ in den normierten Einheiten anzugeben.

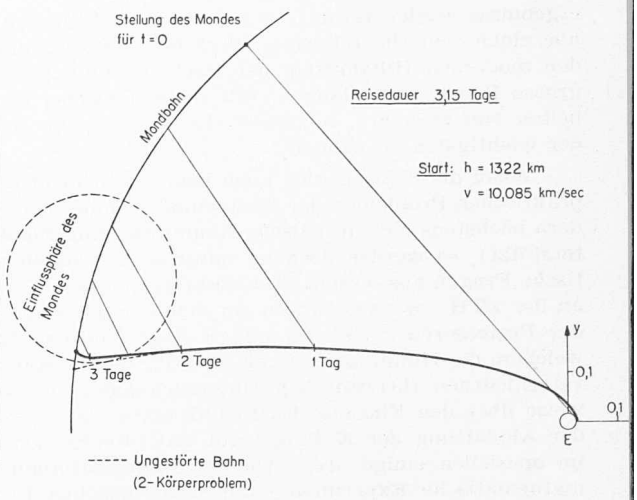


Bild 2. Flugbahn eines Satelliten, der nach 3,15 Tagen auf den Mond auftrifft

3. Lösungsmethoden

Gehen wir darauf aus, Flugbahnen von Satelliten zu bestimmen, die von der Erde ausgehend in die Nähe des Mondes führen (*Annäherungsbahnen*), so zeigt bereits eine oberflächliche Analyse der Differentialgleichungen (4), dass bei der Annäherung des Satelliten an den Mond ($\rho < r$), dessen Kraftwirkung gegenüber derjenigen der viel weiter entfernten Erde stark überwiegt. Um diese qualitative Feststellung mathematisch zu fassen, führte *Subbotin* [2] den Begriff der «*Einflussphäre eines kleinen Himmelskörpers M' in bezug auf einen grossen Himmelskörper M*» ein; der Radius r^* der Einflussphäre ergibt sich nach der Formel:

$$(5) \qquad r^* = A\,(M'/M)^{2/5} = A\,\mu^{2/5}$$

wobei A den Abstand zwischen den beiden Körpern bedeutet (für die genaue Definition der Einflussphäre verweisen wir auf [3], S. 83). Für das Erde-Mond-System wird $r^* = 66\,000$ Kilometer. Bezeichnen wir mit ρ den Abstand des Satelliten vom Mond, so zeigt eine kleine Abschätzung, dass das Verhältnis der Störung durch die Erdanziehung ΔF zur Anziehung F' des Mondes innerhalb der Einflussphäre der Relation

$$(6) \qquad \frac{\Delta F}{F'} \approx \left(\frac{\rho}{r^*}\right)^3 \left(\frac{16\,M'}{M}\right)^{1/5}$$

genügt.

Gibt man sich bei der Bestimmung der Annäherungsbahnen von der Erde zum Mond mit Näherungsmethoden zufrieden, so erlaubt der so definierte Begriff der Einflussphäre eine Gliederung der Flugbahn in drei Teile: die Bewegung von der Erde zur Einflussphäre, die Bewegung innerhalb dieser Sphäre und die Bewegung von ihr weg. Bei der ersten und dritten Phase ist der Einfluss des Mondes vernachlässigbar; wir können deshalb in einem geozentrischen System die Flugbahn näherungsweise durch die Keplerschen Gesetze (Zweikörperproblem) bestimmen. Eine entsprechende Vereinfachung ergibt sich innerhalb der Einflussphäre, wo in einem selenozentrischen System der Störeinfluss der Erde vernachlässigt und die Flugbahn deshalb wieder als ein Kegelschnitt mit dem Mond in einem der Brennpunkte angenähert werden kann. *Egorov* hat mit Hilfe dieses äusserst einfachen Verfahrens in einer umfangreichen Arbeit [3] die grundlegenden Gesetzmässigkeiten und Eigenschaften von Annäherungsbahnen untersucht.

Genügt die bei diesem Näherungsverfahren erreichte Genauigkeit nicht, so müssen numerische Integrationsverfahren herangezogen werden. Die Astronomen haben im Laufe der Jahrhunderte äusserst genaue Methoden entwickelt, welche der speziellen Form der in der Himmelsmechanik auftretenden Differentialgleichungen Rechnung tragen. Alle diese Rechenverfahren beruhen auf dem sogenannten *Differenzenschema*, mit dessen Hilfe die Lösungskurven stückweise durch Polynome ersetzt werden können. Bei seinen Untersuchungen der Bewegung des Halleyschen Kometen für den langen Zeitraum von 1759 bis 1910 wandte der englische Astronom Cowell zum erstenmal eine neue Methode an, welche seither seinen Namen trägt und die nach einer noch von Cowell selbst empfohlenen Verbesserung den grossen Vorteil hat, dass die Ausbreitung von Rundungsfehlern auch bei Integrationen über lange Zeiträume gering ist. Die Methode ist für den praktischen Gebrauch in [4] beschrieben; eine Theorie der Fehlerfortpflanzung und Fehlerabschätzung findet sich in [5]. Das zweite verbesserte Integrationsverfahren von Cowell wurde auf der ERMETH programmiert, wobei das Differenzenschema für die beiden Koordinaten x, y bis zur siebten Differenz verwendet wurde.

Schon aus dem Differentialgleichungs-System (4) ist ersichtlich, dass bei starker Annäherung des Satelliten an die Erde oder den Mond r bzw. ρ sehr klein wird und im Falle eines Zusammenstosses ganz verschwindet, wodurch die rechten Seiten von (4) sehr gross und im Grenzfalle sogar unendlich werden. Dies äussert sich im Differenzenschema darin, dass die höchste verwendete Differenz (in unserem konkreten Falle die siebte) bei der Annäherung des Satelliten an einen der beiden Himmelskörper immer grössere Werte annehmen, wenn die Schrittweite Δt konstant gehalten wird. Dies gibt uns ein Mittel in die Hand, den Zeitschritt für die Integration zu regeln. Um eine gleichmässige Genauigkeit über die ganze Integration zu erreichen, wird vorgeschrieben, dass sich die siebten Differenzen in bestimmten Grenzen bewegen müssen. Ueberschreiten diese Differenzen die obere Grenze, so wird der Zeitschritt verkleinert, bis sie sich wieder im vorgeschriebenen Intervall befinden. Anderseits kann der Zeitschritt vergrössert werden, falls die höchsten Differenzen eine vorgeschriebene Grenze unterschreiten. Im Falle der Flugbahn von der Erde zum Mond muss natürlich die Schrittweite beim Wegflug von der Erde vergrössert und beim Anflug des Mondes verkleinert werden. In der Praxis hat sich eine Verdoppelung bzw. eine Fünftelung der Schrittweite als günstig erwiesen und wurde deshalb in das ERMETH-Programm eingebaut.

Mit dieser Methode der diskreten Anpassung der Schrittlänge an die Genauigkeit gelingt es, Annäherungsbahnen an den Mond zu berechnen, welche sehr nahe am Mondmittelpunkt vorbeiführen, wobei eben in der Nähe des Mondes sehr viele Integrationsschritte durchgeführt werden müssen. Die Grenze dieses Verfahrens wird jedoch dort erreicht, wo die Schrittweite so gering wird, dass sie mit der Rechengenauigkeit der Maschine vergleichbar wird; dies ist der Fall, wenn die Satellitenbahn fast oder ganz durch den Mondmittelpunkt führt (der Mond wie auch die Erde werden bei der ganzen Rechnung immer als *Massenpunkte* angenommen). In diesem Falle hilft nur ein Radikalmittel: die in den Gleichungen (4) möglichen Singularitäten bei $r = 0$ oder $\rho = 0$ müssen durch spezielle Transformationen ausgemerzt werden. Dies gelingt durch das sogenannte Verfahren der *Regularisierung*, welches zuerst von Levi-Civita [6] entwickelt wurde. Diese Transformationen gewährleisten eine automatische und kon-

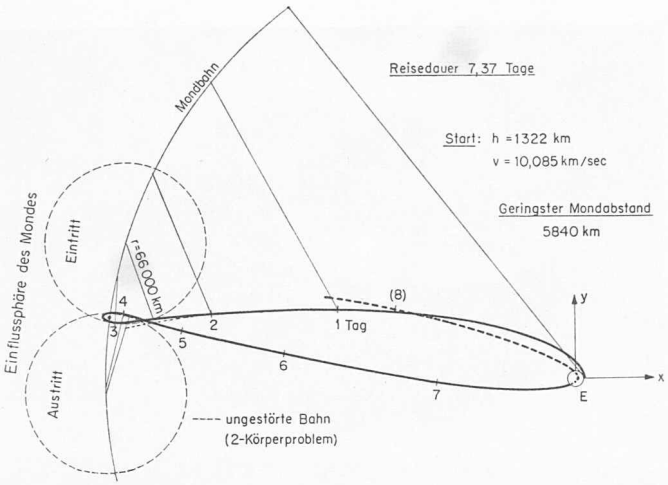


Bild 3 Flugbahn eines Satelliten, der den Mond umfliegt (geringster Abstand von der Mondoberfläche 5480 km) und nach 7,37 Tagen wieder auf die Erdoberfläche auftrifft

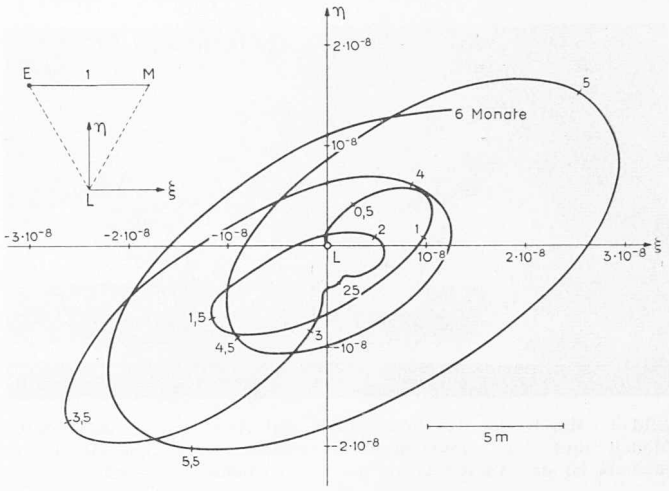


Bild 4 Schwingung um einen stabilen Librationspunkt im rotierenden System Erde—Mond

tinuierliche Anpassung der Schrittweite an die Genauigkeit und sind so wirkungsvoll, dass auch beim Auftreffen des Satelliten auf den Mondmittelpunkt die Differentialgleichungen über den Stoss hinaus integriert werden können. Ein entsprechendes Programm für die ERMETH wurde nach Abklärung der theoretischen Fragen von Waldvogel am Institut für angewandte Mathematik der ETH aufgestellt, wobei die Rechnung ausgezeichnete Resultate lieferte und auch Flugbahnen integriert werden konnten, bei welcher die Methode von Cowell versagte. Ein Bericht über diese Untersuchungen soll demnächst erscheinen [1].

4. Ergebnisse

In den Bildern 2 bis 4 sind die Ergebnisse einiger Berechnungen zusammengefasst, welche nach dem Cowellschen Verfahren auf der ERMETH durchgeführt wurden. Die Bilder 2 und 3 zeigen Satelliten-Flugbahnen von der Erde zum Mond, wobei die erste auf dem Mond auftrifft, während bei der zweiten die Anfangsbedingungen so gewählt sind, dass das Raumschiff den Mond in einer Schleifenbahn umfliegt und wieder zur Erde zurückkehrt. Bei beiden Flugbahnen erfolgt der Start in einer Höhe von 1322 km über der Erdoberfläche mit einer horizontalen Geschwindigkeit von 10,085 km/s, der einzige Unterschied in den Anfangsbedingungen für beide Bahnen besteht lediglich in einer kleinen Differenz bei der Ausgangslage des Mondes im Zeitpunkt $t = 0$.

Bei der in Bild 2 dargestellten Auftreffbahn, welche den Satelliten in etwas mehr als drei Tagen zum Mond führen würde, verläuft die berechnete Bahnkurve so nahe am Mondmittelpunkt vorbei, dass das Rechenverfahren aus dem in § 3 erwähnten Grunde dort abbrach. Im Gegensatz dazu konnte J. Waldvogel [1] mit Hilfe der regularisierten Differentialgleichungen diese auch über die «fast singuläre Stelle» hinweg integrieren; bei der von uns immer angenommenen Idealisierung der vollkommenen Konzentration der Mondmasse im Mondmittelpunkt gelang es ihm so, die Bahnkurve über den mondnächsten Punkt hinweg weiterzuführen.

Die Schleifenbahn um den Mond nach Bild 3 zeigt den möglichen Flugweg eines Satelliten, welcher den Mond an dessen Hinterseite in einem minimalen Abstand von 5840 km von der wirklichen Mondoberfläche umfliegt und durch die Mondmasse gerade so stark abgelenkt wird, dass er zur Erde zurückfliegt, wo er nach einem etwas mehr als eine Woche dauernden Flug wieder eintrifft. In diesem Fall gelingt es auch mit dem Cowellschen Verfahren, die Flugbahn über den erdnächsten Punkt hinweg weiterzuführen, was in der gestrichelten Kurve dargestellt ist.

Als weiteres Resultat ist in Bild 4 die Bewegung eines Raumkörpers in der Umgebung eines stabilen Librationspunktes L angegeben, welcher — wie in Bild 4 skizziert — in der Spitze eines gleichseitigen Dreiecks über der Verbindungslinie Erde—Mond liegt. Die Kurve ist deshalb interessant, weil sie zeigt, mit welch ausserordentlicher Genauigkeit das Cowellsche Verfahren arbeitet, beträgt doch der maximale Abstand des Körpers vom Librationspunkt L, welcher im rotierenden System Erde—Mond festliegt, in dem ganzen untersuchten Zeitraum von sechs Monaten weniger als zwanzig Meter. Verglichen mit dem Abstand Erde—Mond stellt dies rund den zwanzigmillionsten Teil dar. Trotz dieser äusserst geringen Schwingungsamplituden der Störung können die Kurven mit grosser Präzision bestimmt werden.

Literaturverzeichnis

[1] *J. Waldvogel:* Numerische Berechnung von Erde-Mond-Flugbahnen auf Grund von Regularisierungsmethoden (erscheint demnächst).

[2] *M. F. Subbotin:* Lehrbuch der Himmelmechanik, Band 2 ONTI (1937).

[3] *V. A. Egorov:* Einige Probleme der Dynamik des Fluges zum Mond; 2. Sonderband der Reihe «Fortschritte der Physik»: Künstliche Erdsatelliten; Akademie-Verlag Berlin, 1959.

[4] *G. Stracke:* Bahnbestimmung der Planeten und Kometen; Springer Berlin, 1927.

[5] *P. Henrici:* Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations; John Wiley & Sons, New York, 1962.

[6] *T. Levi-Civita:* Die Regularisierung des Dreikörperproblems und ihre Tragweite; Springer 1923.

Windkanalmessungen am Modell eines Luftkissenfahrzeuges

DK 533.6:629.124.8

Von **H. Baumann**, dipl. Ing., Wallisellen und **R. Murao**, dipl. Ing., Tokio *)

Herrn Professor Dr. **J. Ackeret** zum 65. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Durch eine steigende Anzahl von Firmen in der ganzen Welt wurden in den letzten Jahren Luftkissenfahrzeuge gebaut und im ganzen auch ziemlich erfolgreich erprobt. Während man sich in den USA mehr für die militärischen Anwendungen dieser Fahrzeugkategorie interessiert, haben sich die britischen Firmen einen klaren Vorsprung im Bau von zivilen Typen für Fahrten über Wasserflächen erworben. In der Sowjetunion werden ebenfalls Versuche mit grossen Fahrzeugen dieser Art für den zivilen Einsatz durchgeführt. Wenn auch der fahrplanmässige Verkehr bisher eine nicht sehr grosse Regelmässigkeit erreichte, da er mit den kleineren in England letztes Jahr dazu verwendeten Fahrzeugen noch zu stark von Wetter und Wellengang abhängig

*) Beide Autoren sind ehemalige Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik an der ETH, Zürich.