

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 80 (1962)  
**Heft:** 19

**Artikel:** Lineare Ungleichungen in der Baustatistik  
**Autor:** Prager, William  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66151>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Lineare Ungleichungen in der Baustatik

DK 624.04:539.374

Von Prof. William Prager, Brown University, Providence, R. I., USA <sup>1)</sup>

### I. Einleitung

Lineare Ansätze, aus denen Superpositionsprinzipien folgen, sind die Regel in der mathematischen Analyse technischer Probleme. So führt zum Beispiel das Ohmsche Gesetz auf ein lineares Gleichungssystem für die Verteilung der Stromstärke in einem elektrischen Leitungsnetz. In Anbetracht der grossen Erfolge linearer Ansätze in der mathematischen Physik und im Ingenieurwesen ist es ganz natürlich, dass man sich wiederum solcher Ansätze bediente, als man volkswirtschaftliche Probleme mathematisch zu erfassen begann. Es zeigte sich jedoch bald, dass dieses Vorgehen nicht von Erfolg begleitet war, und es ist das Verdienst Johann von Neumanns, auf die wichtige Rolle hingewiesen zu haben, welche Ungleichungen in diesem Gebiete spielen können. In vielen Fällen kann man diese Ungleichungen linearisieren, und das typische Problem erfordert dann die Ermittlung des Maximums oder Minimums einer linearen Funktion, deren Veränderliche linearen Ungleichungen unterworfen sind.

Viele Aufgaben der Planung in Industrie und Volkswirtschaft lassen sich auf dieses Grundproblem der sogenannten *linearen Optimierung* zurückführen. Obwohl allgemeine Methoden zur Lösung dieses Problems erst vor kurzem im Rahmen der Planungsforschung entwickelt wurden, findet sich das erste Beispiel einer linearen Optimierung in einer Arbeit, die Fourier im Jahre 1823 in der *Histoire de l'Académie* veröffentlicht hat (Werke, Bd. II, S. 321). In dieser Arbeit stellt sich Fourier die folgende Aufgabe. Eine *starre* quadratische Platte ruht in horizontaler Lage auf vier Stützen an ihren Ecken. Keine der Stützen kann eine Druckkraft aufnehmen, die grösser als die Krafteinheit ist. Man bestimme die grösste vertikale Last, die an einem gegebenen Punkt der Platte wirken kann, ohne zum Versagen der Konstruktion zu führen. Fourier bemerkt, dass die Prinzipien der Statik unmittelbar drei Gleichungen für die vier Stützkräfte liefern, zu denen

man für jede Stütze noch zwei Ungleichungen fügen muss, welche ausdrücken, dass die Druckkraft in der Stütze positiv und kleiner als die Krafteinheit sein muss. Ohne auf mathematische Einzelheiten einzugehen, gibt Fourier die Lösung der Aufgabe und stellt fest, dass sie nicht durch einen analytischen Ausdruck dargestellt ist. In der Tat, bei gegebener Lastintensität ist der Angriffspunkt der Last auf das Innere eines gewissen Polygons beschränkt, wenn die Konstruktion nicht versagen soll. Bild 1 zeigt einige dieser Polygone und die zugehörigen Lastintensitäten.

Fouriers Arbeit erschien einige Jahre vor Cauchys grundlegenden Untersuchungen zur Elastizitätstheorie. Es ist daher kaum verwunderlich, dass Fourier ein statisch unbestimmtes Problem behandelt, ohne die Spannungs-Dehnungsbeziehungen für die Stützen zu verwenden. Die Erd-drucktheorie, die zu Fouriers Zeit schon weit entwickelt war, geht in ähnlicher Weise vor, indem sie zu den Gleichgewichtsbedingungen eine Ungleichung hinzufügt, der zu Folge die in einem beliebigen Flächenelement übertragene Schubspannung nicht einen bestimmten Prozentsatz der Normalspannung in diesem Element überschreiten kann.

Da jedoch Fouriers Analyse zu einer eindeutigen Lösung führt, setzt sie ein bestimmtes mechanisches Verhalten der Stützen voraus. In der Tat, damit Fouriers Analyse berechtigt ist, muss die Beziehung zwischen der Verkürzung  $u_i$  der Stütze und der zugehörigen Druckkraft  $R_i$  durch das Diagramm Bild 2 dargestellt werden. Der Zweig  $OAB$  dieses Diagramms stellt das elastische Verhalten mit nachfolgendem plastischem Fließen der Stütze dar, und der Zweig  $OC$  entspricht dem Abheben der Platte von der Stütze. Wenn man will, kann man diesen Zweig als plastisches Fließen unter verschwindender Zugkraft deuten. Fouriers Problem kann daher als ein Problem der plastischen Traglastbestimmung angesehen werden.

Um grundlegende Lehrsätze des plastischen Traglastverfahrens zu erläutern, wollen wir Fouriers Problem abändern, indem wir das Diagramm Bild 2 durch dasjenige von Bild 3 ersetzen: Die Platte kann sich nicht mehr von den Stützen abheben; die Stützen verhalten sich elastisch-idealplastisch unter Druck, aber unbegrenzt elastisch unter Zug. Die Möglichkeit, dass die vier Stützen verschiedene Druckfliessgrenzen besitzen, soll nicht ausgeschlossen werden.

Wir wählen einen festen Angriffspunkt für die Last und lassen ihre Intensität von null an stetig zunehmen. Unter genügend kleiner Last verhalten sich alle Stützen elastisch, und zur Berechnung der vier Stützkräfte stehen uns drei Gleichgewichtsbedingungen und eine Verträglichkeitsbedingung zur Verfügung. Die letztere sagt aus, dass, infolge der

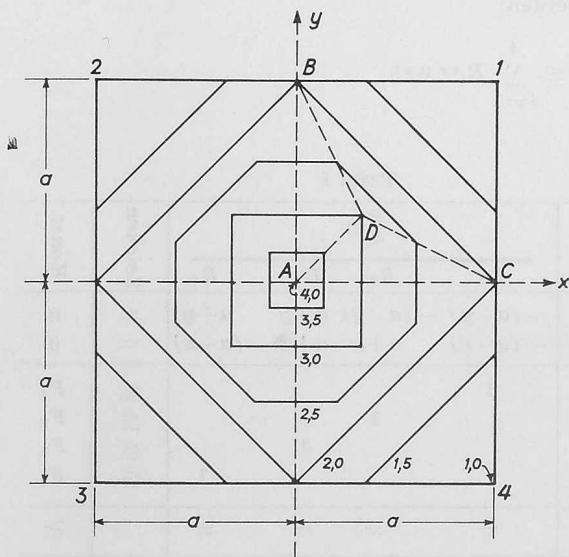


Bild 1

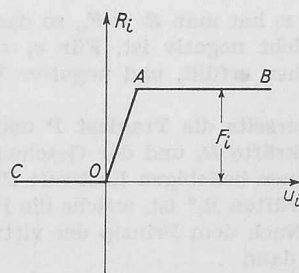


Bild 2

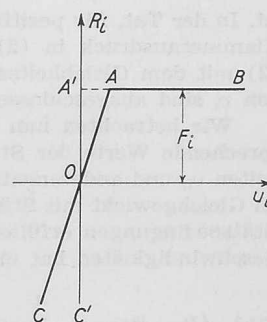


Bild 3

vorausgesetzten Starrheit der Platte, die Längenänderungen von drei Stützen die Längenänderung der vierten Stütze eindeutig bestimmen. Das *völlig elastische Verhalten*, während dessen die Stützkraft proportional zur Last wachsen, endet, wenn eine der Stützkraft die zugehörige Flie遡grenze erreicht. Da diese Stützkraft nicht weiter wachsen kann, verteilt sich jeder weitere Zuwachs der Last in statisch bestimmter Weise auf die drei anderen Stützen. Solange diese Stützen sich elastisch verhalten, hat die plastische Verkürzung der vierten Stütze elastische Grössenordnung. Dieses *elastisch-plastische Verhalten mit beschränkter plastischer Verformung* endet, wenn eine weitere Stütze ihre Flie遡grenze erreicht. Infolge des Flie遡s der beiden plastischen Stützen unter konstanter Last beginnt sich die Platte um die Gerade zu drehen, welche die Stützpunkte der noch elastischen Stützen verbindet. Die zugehörige Last stellt die *Tragfähigkeit* der Konstruktion für den gewählten Lastangriffspunkt dar.

Wir bemerken, dass im elastischen Gebiete die Verteilung der Last auf die vier Stützen sich nicht ändert, wenn man den Elastizitätsmodul einer jeden Stütze mit dem selben Faktor multipliziert. Indem wir uns diesen Faktor sehr gross gewählt denken, können wir die elastisch-plastischen Stützen durch starr-plastische Stützen ersetzen, deren mechanisches Verhalten durch das Diagramm *C'A'B* in Bild 3 dargestellt wird. Um dieses Diagramm mathematisch zu beschreiben, benützen wir die Druckkraft  $R_i$  an der Stütze  $i$  und die Geschwindigkeit  $v_i$ , mit der sich diese Stütze verkürzt.

Einer beliebigen positiven Geschwindigkeit  $v_i$  entspricht die Druckflie遡kraft  $F_i$ , während einer beliebigen Stützkraft unterhalb der Flie遡grenze  $F_i$  die Geschwindigkeit  $v_i = 0$  entspricht. Die Leistung der Stützkraft ist daher

$$(1) \quad L = F_i v_i \text{ für } v_i \geq 0$$

Negative Geschwindigkeiten  $v_i$  sind nicht zulässig.

Solange die Last unterhalb der Traglast  $P$  bleibt, verhält sich die Konstruktion starr. Plastisches Flie遡 kann nur unter der Einwirkung der Traglast  $P$  auftreten. Während dieses Flie遡s seien  $v$  und  $v_i$  die Vertikalgeschwindigkeiten des Lastangriffspunkts und der vier Ecken der Platte, und  $R_i$  die zugehörigen Stützkraften. Diese Grössen sind den folgenden Bedingungen unterworfen:

1. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Last  $P$  und die Stützkraften  $R_i$  (drei Gleichungen);
2. die Verträglichkeitsbedingungen für die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_i$  (zwei Gleichungen);
3. die Plastizitätsbedingungen, welche Stützkraften  $R_i$  oberhalb der zugehörigen Flie遡grenze  $F_i$  ausschliessen (vier Ungleichungen); und
4. die Flie遡regeln, welche fordern, dass die Geschwindigkeit  $v_i$  nichtnegativ ist oder verschwindet, je nach dem die Stützkraft  $R_i$  ihren Grösstwert  $F_i$  annimmt oder nicht.

Aus der Flie遡regel ergibt sich leicht eine wichtige Beziehung. Für einen zulässigen, das heisst nichtnegativen Wert von  $v_i$ , soll  $R_i$  den tatsächlichen Wert der Stützkraft bedeuten und  $R_i^*$  einen fiktiven Wert dieser Stützkraft, der die Plastizitätsbedingung  $R_i^* \leq F_i$  erfüllt. Man bestätigt ohne Schwierigkeit, dass

$$(2) \quad (R_i - R_i^*) v_i \geq 0$$

ist. In der Tat, für positives  $v_i$  hat man  $R_i = F_i$ , so dass der Klammerausdruck in (2) nicht negativ ist. Für  $v_i = 0$  ist (2) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt, und negative Werte von  $v_i$  sind ausgeschlossen.

Wir betrachten nun einerseits die Traglast  $P$  und entsprechende Werte der Stützkraften  $R_i$  und der Geschwindigkeiten  $v_i$ , und andererseits einen beliebigen Lastwert  $P^*$ , der im Gleichgewicht mit Stützkraften  $R_i^*$  ist, welche die Plastizitätsbedingungen erfüllen. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten hat man dann

$$(3) \quad (P - P^*) v = \sum_{i=1}^4 (R_i - R_i^*) v_i$$

Da die Geschwindigkeit  $v$  nichtnegativen Werten der Geschwindigkeiten  $v_i$  entspricht, ist sie selbst nichtnegativ, und Einsetzen der Ungleichung (2) in die Beziehung (3) ergibt

$$(4) \quad P \geq P^*$$

Die Traglast ist somit die grösste Last, die mit Stützkraften ins Gleichgewicht gesetzt werden kann, welche die Plastizitätsbedingungen erfüllen.

Dieses statische Prinzip führt unmittelbar auf ein Problem der linearen Optimierung. In der Tat, durch den gewählten Lastangriffspunkt ziehen wir Parallelen zur  $x$ - und  $y$ -Achse (Bild 1) und verlangen, dass die Summe der Momente der Stützkraften mit Bezug auf eine jede dieser Achsen verschwindet. Dies gibt zwei lineare Gleichungen für die Stützkraften  $R_i$ , denen wir noch vier Ungleichungen hinzufügen müssen, welche die Plastizitätsbedingungen für die Stützkraften ausdrücken. Um die Traglast  $P$  zu finden, müssen wir die Unbekannten  $R_1, R_2, R_3, R_4$  so bestimmen, dass diese Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen erfüllt sind, während die lineare Form

$$(5) \quad P = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

ihren Grösstwert annimmt. Mit den Bezeichnungen von Bild 1 ist diese lineare Optimierungsaufgabe durch die Tafel I dargestellt.

Die Einträge in der ersten Kolonne dieser Tafel werden später erklärt werden. Die Einträge in den nächsten sechs Kolonnen sind die Koeffizienten von  $R_1$  bis  $R_4$ , die Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen, und die rechten Seiten unserer Beziehungen. Die ersten zwei Zeilen der Tafel I sind die Gleichgewichtsbedingungen und die folgenden vier Zeilen die Plastizitätsbedingungen. Die letzte Zeile schliesslich sagt aus, dass die Traglast  $P$  dem Grösstwert der Summe der Stützkraften  $R_1$  bis  $R_4$  entspricht. Da die beiden Gleichgewichtsbedingungen die Gesamtheit der Stützkraften auf eine zweiparametrische Schar reduzieren, ist zu erwarten, dass in der Lösung unseres Problems das Gleichheitszeichen in wenigstens zwei der Plastizitätsbedingungen gilt.

Eine andere lineare Optimierungsaufgabe, deren Lösung die Traglast liefert, wird wie folgt erhalten. Wir betrachten einerseits die Traglast  $P$  und entsprechende Werte der Stützkraften  $R_i$  und der Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_i$ , und andererseits nichtnegative Geschwindigkeiten  $v^{**}$  und  $v_i^{**}$ , welche die Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, und Stützkraften  $R_i^{**}$ , die zusammen mit den Geschwindigkeiten  $v_i^{**}$  die Flie遡regeln erfüllen. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten hat man

$$(6) \quad P v^{**} = \sum_{i=1}^4 R_i v_i^{**}$$

In Anbetracht der Beziehung (2) kann (6) wie folgt geschrieben werden:

$$(7) \quad P v^{**} \leq \sum_{i=1}^4 R_i^{**} v_i^{**}$$

Tafel I

Veränderliche	$\begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$				Zeichen	Konst.
	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$		
$\begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0, \begin{cases} \omega_x \\ \omega_y \end{cases}$	$-(a-y)$	$-(a-y)$	$a+y$	$a+y$	$=$	0
	$-(a-x)$	$a+x$	$a+x$	$-(a-x)$	$=$	0
$\begin{matrix} \geq 0 \\ \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{cases} \end{matrix}$	1	1	1	1	$\leq$	$F_1$ $F_2$ $F_3$ $F_4$
Zeichen	$=$	$=$	$=$	$=$		$\geq$
Konst.	1	1	1	1	$\leq$	$P$



Da  $R_i^{**}v_i^{**}$  die Leistung der Stützkraft  $R_i^{**}$  an der Geschwindigkeit  $v_i^{**}$  ihres Angriffspunktes ist, folgt aus (1) und (7), dass

$$(8) \quad P v^{**} \leq \sum_{i=1}^4 F_i v_i^{**}$$

ist.

Wir bezeichnen nun mit  $P^{**}$  die fiktive Traglast, welche durch Gleichsetzen der äusseren Leistung  $P^{**}v^{**}$  und der inneren Leistung

$$\sum_{i=1}^4 F_i v_i^{**}$$

erhalten wird. Da die Geschwindigkeit  $v^{**}$  als nichtnegativ vorausgesetzt wurde, zeigt die Ungleichung (8), dass  $P \leq P^{**}$  ist.

Die tatsächliche Traglast ist daher die kleinste der betrachteten fiktiven Traglasten.

Wir wenden nun dieses kinematische Prinzip auf die Bestimmung der Traglast an. Ein System von Geschwindigkeiten  $v^{**}, v_1^{**}, v_2^{**}, v_3^{**}, v_4^{**}$ , das die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, kann durch Superposition der folgenden drei Bewegungen erhalten werden: Eine vertikale Translation der Platte und Drehungen um Parallelen zur  $x$ - und  $y$ -Axe durch den Lastangriffspunkt. Wir bezeichnen die Winkelgeschwindigkeiten dieser Drehungen mit  $\omega_x$  und  $\omega_y$ , und kommen überein, dass eine positive Winkelgeschwindigkeit der Ecke 1 (Bild 1) eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit erteilen soll. Da unsere Beziehungen homogen in den Geschwindigkeiten sein werden, hat der Geschwindigkeitsmassstab keinerlei Bedeutung, und wir können die Geschwindigkeit der vertikalen Translation der Platte als Geschwindigkeitseinheit wählen. Wir erhalten somit die Gleichung

$$(9) \quad v_1 = 1 + \omega_x(a - y) + \omega_y(a - x)$$

und ähnliche Gleichungen für die Geschwindigkeiten der anderen Ecken. Wir bemerken, dass wir sowohl diese Gleichungen als auch die lineare Form, deren Minimum die Traglast ist, aus den Kolonnen der Tafel I erhalten können, wobei die Elemente einer Kolonne als Koeffizienten der am linken Rande aufgeführten Grössen gedeutet werden müssen.

Die beiden linearen Optimierungsaufgaben, die durch die Tafel I dargestellt sind, werden als einander dual zugeordnet bezeichnet. Die folgenden Eigenschaften der hier betrachteten Aufgaben gelten ganz allgemein für duale lineare Optimierungen. Den Ungleichungen einer Aufgabe entsprechen nichtnegative Veränderliche der dualen Aufgabe, während die den Gleichungen einer Aufgabe entsprechenden Veränderliche der dualen Aufgabe keinerlei Vorzeichenbeschränkungen unterliegen. Wenn eine Ungleichung einer Aufgabe als Ungleichung im engeren Sinn erfüllt ist, so verschwindet die entsprechende Veränderliche der dualen Aufgabe.

Tafel II

Veränderliche	$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$			$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$				Zeichen	Konst.
	$v$	$\omega_x$	$\omega_y$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$		
$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$	$R_1$	1	$a - y$	$a - x$	-1			=	0
	$R_2$	1	$a - y$	$-(a + x)$	-1			=	0
	$R_3$	1	$-(a + y)$	$-(a + x)$		-1		=	0
	$R_4$	1	$-(a + y)$	$a - x$			-1	=	0
$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$	$F_1$				1			$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$	$l_1$
	$F_2$					1		$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$	$l_2$
	$F_3$						1	$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$	$l_3$
	$F_4$							$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$	$l_4$
Zeichen	=	=	=	$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$	$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$	$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$	$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$		$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$
Konst.	$P$	0	0	0	0	0	0	$\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}$	$C$

Im bisher betrachteten Problem waren die Flie遡sgrenzen der vier Stützen gegeben, und der Grenzwert der Last, die an einem vorgegebenen Angriffspunkt wirken kann, war gesucht. Von dieser Aufgabe der plastischen Analyse wollen wir uns nun einer Aufgabe der plastischen Bemessung zuwenden. Um ein nicht völlig triviales Problem zu erhalten, setzen wir voraus, dass die vier Stützen verschiedene Längen  $l_1, l_2, l_3, l_4$  besitzen können. Wir nehmen an, dass der Preis einer Stütze mit der Länge  $l_i$  und der Flie遡sgrenze  $F_i$  dem Produkt  $l_i F_i$  proportional ist. Bei vorgeschriebener Lastintensität und gegebenem Angriffspunkt sollen die vier Stützen so bemessen werden, dass ihr Gesamtpreis möglichst klein ausfällt.

Die Kolonnen der Tafel II geben die Beziehungen, welche die Stützkraften und die Flie遡sgrenzen erfüllen müssen. Die ersten drei Kolonnen entsprechen den Gleichgewichtsbedingungen und die darauf folgenden vier den Plastizitätsbedingungen. Die letzte Kolonne schliesslich gibt die lineare Form  $C$ , welche dem Gesamtpreis  $C$  proportional ist, und die man zu einem Minimum machen will. Wir haben gesehen, dass für gegebene Flie遡sgrenzen die Traglast die grösste aller Lasten ist, die mit Stützkraften ins Gleichgewicht gesetzt werden kann, welche die Plastizitätsbedingungen erfüllen. Eine Last, die mit solchen Stützkraften im Gleichgewicht steht, kann daher die Traglast nicht überschreiten. Ein jedes System von Stützkraften und Flie遡sgrenzen, welches die durch die ersten sieben Kolonnen der Tafel II gegebenen Beziehungen erfüllt, stellt daher eine zulässige Bemessung dar. Die letzte Kolonne der Tafel II verlangt, dass man unter allen diesen Bemessungen die mit dem kleinsten Preis sucht.

Die Tafel II wurde kolonnenweise geschrieben, damit das Ungleichheitszeichen über der rechten unteren Ecke den selben Sinn hat wie in der Tafel I.

Aus der Tafel II kann man das duale Problem wie folgt ablesen: Man finde nichtnegative Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_1$  bis  $v_4$ , welche den Verträglichkeitsbedingungen und den Ungleichungen

$$(10) \quad v_i = l_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

genügen und das Produkt  $Pv$  und somit  $v$  möglichst gross machen. Da die Geschwindigkeiten  $v_i$  nur der einzigen Verträglichkeitsbedingung

$$(11) \quad v_1 + v_3 - v_2 - v_4 = 0$$

unterliegen, kann man diese Geschwindigkeiten so wählen, dass das Gleichheitszeichen in mindestens drei der Ungleichungen (10) gilt. Wenn zum Beispiel die Stützen 1, 2 und 3 die gleiche Länge  $L$  haben, während die vierte Stütze eine grössere Länge  $L + l$  besitzt, so sind solche Geschwindigkeitssysteme durch

$$1 \quad v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = L$$

oder

$$2 \quad v_1 = L, v_2 = L - l, v_3 = L, v_4 = L + l$$

gegeben. Im ersten Falle hat man  $v_4 < l_4$  und somit  $F_4 = 0$ . Im zweiten Falle ist  $v_2 < l_2$  und daher  $F_2 = 0$ . In jedem Fall wird also eine der Stützen fortgelassen, und die Last verteilt sich in statisch bestimmter Weise auf die drei verbleibenden Stützen, wobei die Wirkungslinie der Last im Inneren oder auf der Oberfläche des dreieckigen Prismas liegen muss, das die Axen der Stützen zu Kanten hat. Die optimale Bemessung entspricht daher einer statisch bestimmten Konstruktion.

Aus dem Obigen folgt, dass der Mindestpreis dem Ausdruck

$$(12) \quad C = F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + F_4 l_4 \\ = F_1 v_1 + F_1 v_1 + F_3 v_3 + F_4 v_4$$

proportional ist, weil nämlich  $v_i = l_i$  sein muss, wenn  $F_i$  nicht verschwindet. Für die Konstruktion optimaler Bemessung existiert also ein System von verträglichen Geschwindigkeiten, für welches die Dissipationsleistung je Einheitspreis eines Bauelements für alle Elemente den gleichen Wert hat. Man

kann dieses Ergebnis als das *Prinzip der gleichförmigen Ausnutzung des Materials* bezeichnen.

Bei der Anwendung unserer Ergebnisse auf die plastische Bemessung von Balken oder Rahmen gebrauchen wir ähnliche Vereinfachungen wie bei der Behandlung des Fourierschen Problems. Wir vernachlässigen die elastischen Formänderungen und setzen voraus, dass sich die plastischen Formänderungen unter konstanter Spannung vollziehen. Ein Balkenelement bleibt daher starr oder wirkt als *plastisches Gelenk*, je nachdem der Absolutwert des Biegemoments unterhalb eines kritischen Wertes, dem sogenannten *Fliessmoment*, bleibt oder ihm gleichkommt.

Als Beispiel wollen wir die zweiparametrische Bemessung des Rahmens in Bild 4 behandeln. Wir setzen voraus, dass das Fliessmoment des Balkens den konstanten Wert  $F_2$  hat. Wir setzen weiter voraus, dass der Preis je Längeneinheit eines Balkens mit genügender Genauigkeit durch

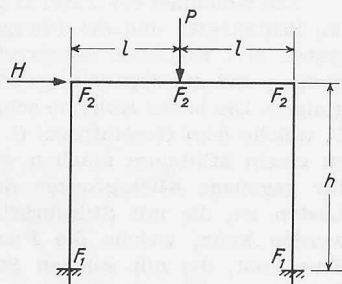


Bild 4

$$(13) \quad c = \alpha + \beta F$$

gegeben ist, wo  $F$  das Fliessmoment ist und  $\alpha$  und  $\beta$  Konstanten sind, welche die zur Verfügung stehenden Balkenprofile charakterisieren. Infolgedessen ist  $\alpha h + \beta h (F_1 + F_2)/2$  der Preis einer Säule und  $2 \alpha l + 2 \beta l F_2$  der Preis des Balkens. Da  $\alpha$  und  $\beta$  Festwerte sind, entspricht die optimale Bemessung dem Minimum der linearen Form

$$(14) \quad C = h F_1 + (h + 2l) F_2$$

die als der *veränderliche Anteil des Preises* bezeichnet werden soll.

Je nach seiner Bemessung könnte der betrachtete Rahmen gemäss eines der in Bild 5 angedeuteten Fliessmechanismen versagen. Nach unserem kinematischen Prinzip muss man die Fliessmomente so wählen, dass für jeden dieser Fliessmechanismen die Dissipationsleistung in den plastischen Gelenken der Leistung der gegebenen Last gleichkommt oder sie übertrifft. Man erhält so die durch die Kolonnen der Tafel III dargestellte lineare Optimierungsaufgabe.

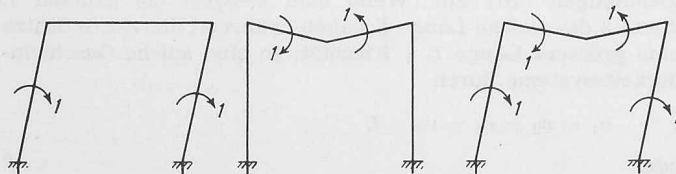


Bild 5

Wir wollen diese Aufgabe lösen, ohne spezielle Werte für die nichtnegativen Grössen  $h$ ,  $l$ ,  $H$  und  $P$  vorzusetzen. Da die durch die ersten drei Kolonnen der Tafel III dargestellten Beziehungen nur zwei Unbekannte enthalten, wird mindestens eine der drei Beziehungen als Ungleichung im engeren Sinn erfüllt sein. Wir nehmen zunächst an, dass dies die erste dieser Beziehungen ist. Indem wir das Gleichheits-

Tafel III

Veränderliche	$\geq 0$			Zeichen	Konstante
	$c_1$	$c_2$	$c_3$		
$\geq 0 \begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases}$	2	0	2	$\geq$	$h$
	2	4	4	$\geq$	$h + 2l$
Zeichen	$\geq$	$\geq$	$\geq$		$\geq$
Konstante	$H \cdot h$	$P \cdot l$	$H \cdot h + P \cdot l$	$\leq$	$C$

zeichen in den beiden anderen Beziehungen gebrauchen, erhalten wir die Fliessmomente

$$(15) \quad F_1 = Hh/2, \quad F_2 = Pl/4$$

welche die erste Beziehung für alle Werte von  $H$  und  $P$  erfüllen. Um den Gültigkeitsbereich der Bemessung (15) zu bestimmen, betrachten wir das duale Problem, das durch die Zeilen der Tabelle III angegeben ist. Da die erste Beziehung des ursprünglichen Problems als Ungleichung im engeren Sinn erfüllt ist, muss die entsprechende Veränderliche  $c_1$  des dualen Problems verschwinden. Da weiterhin die Bemessung (15) positive Werte für  $F_1$  und  $F_2$  liefert, muss das Gleichheitszeichen in den entsprechenden Beziehungen des dualen Problems gelten. Man erhält so

$$(16) \quad c_2 = (2l - h)/4, \quad c_3 = h/2$$

Da diese Veränderlichen nichtnegativ sein müssen, ist die Bemessung (15) nur möglich, wenn

$$(17) \quad l/h \geq 1/2$$

ist.

Wir nehmen dann an, dass die zweite Beziehung des ursprünglichen Problems als Ungleichung im engeren Sinn erfüllt ist. Gebrauch des Gleichheitszeichens in den beiden anderen Beziehungen liefert

$$(18) \quad F_1 = (Hh - Pl)/2, \quad F_2 = Pl/2$$

Da  $F_1$  nicht negativ sein kann, ist diese Bemessung nur möglich, wenn

$$(19) \quad Pl/Hh \leq 1$$

ist. Mit  $c_2 = 0$  liefert das duale Problem die Werte

$$(20) \quad c_1 = (h - 2l)/2, \quad c_3 = l$$

die nichtnegativ sind für

$$(21) \quad l/h \leq 1/2$$

Die Bemessung (18) ist somit den Bedingungen (19) und (21) unterworfen.

Wenn man die ersten beiden Beziehungen des ursprünglichen Problems als Gleichungen schreibt, findet man, dass ihre Lösung die dritte Beziehung nicht erfüllt. Wir nehmen daher an, dass die beiden ersten Beziehungen des ursprünglichen Problems als Ungleichungen im engeren Sinn erfüllt sind, so dass die entsprechenden Veränderlichen  $c_1$  und  $c_2$  des dualen Problems verschwinden. Die zwei Beziehungen des dualen Problems können dann nicht beide Gleichungen sein. Wenn das Gleichheitszeichen in der zweiten gilt, ist die erste eine Ungleichung im engeren Sinn für

$$(22) \quad l/h < 1/2$$

und die entsprechende Veränderliche des ursprünglichen Problems verschwindet. Da die dritte Beziehung dieses Problems als Gleichung vorausgesetzt wurde, hat man

$$(23) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = (Pl + Hh)/4$$

Die beiden ersten Beziehungen des ursprünglichen Problems sind dann Ungleichungen im engeren Sinn, wenn

$$(24) \quad Pl/Hh > 1$$

ist. Die Bemessung (23) ist somit den Bedingungen (22) und (24) unterworfen. Die drei betrachteten Bemessungen und ihre Gültigkeitsbereiche sind in Bild 6 dargestellt.

Wir bemerken noch, dass die Veränderlichen  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  des dualen Problems nichtnegative Koeffizienten einer linearen Kombination der drei in Bild 4 dargestellten Mecha-

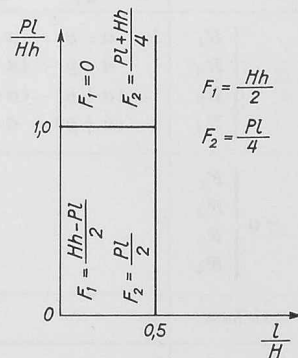


Bild 6



nismen, sind, welche den durch das Prinzip der gleichförmigen Ausnützung des Materials geforderten Mechanismus liefert. Dieses Prinzip gilt jedoch nur, solange man es mit einem einzigen Lastsystem zu tun hat.

Um dies zu beweisen, betrachten wir einen Balken der Länge  $l$ , der am einen Ende eingespannt und am anderen gelenkig gelagert ist und durch eine Last der Intensität  $P$  beansprucht wird, die entweder in der Mitte der Spannweite oder im Abstand  $l/4$  von einem oder dem anderen Ende wirkt. Wir untersuchen die vierparametrische Bemessung, welche durch die Fliessmomente  $F_1$  bis  $F_4$  in den Viertelpunkten der Spannweite bestimmt ist (siehe Bild 7), wobei das Fliessmoment sich in linearer Weise vom einen zum nächsten dieser Punkte verändert und am gelenkig gestützten Ende verschwindet. Bild 7 zeigt sechs Fliesmechanismen, deren jeder zwei plastische Gelenke aufweist. Drei dieser Mechanismen entsprechen der Laststellung 1, zwei der Stellung 2, und einer der Stellung 3. Für einen jeden dieser Mechanismen muss die Dissipationsleistung in den plastischen Gelenken der Leistung der Last gleich sein oder diese überschreiten. Man erhält so die lineare Optimierungsaufgabe, welche durch die Kolonnen der Tafel IV dargestellt ist.

Die für diesen Vortrag angesetzte Zeit schliesst eine detaillierte Beschreibung dieser und der zu ihr dualen Aufgabe aus. Man findet

$$(25) \quad F_1 = \frac{5}{32} Pl, \quad F_2 = \frac{7}{48} Pl, \quad F_3 = \frac{1}{32} Pl, \quad F_4 = \frac{5}{24} Pl$$

$$(26) \quad c_1 = 0, \quad c_2 = l/6, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = l/12, \quad c_5 = 18, \quad c_6 = l/16$$

Bild 8 zeigt den Verlauf des Fliessmoments für die optimale Bemessung.

Wir bemerken, dass die relative Winkelgeschwindigkeit am Gelenk 3 für den zweiten und vierten Fliesmechanismus

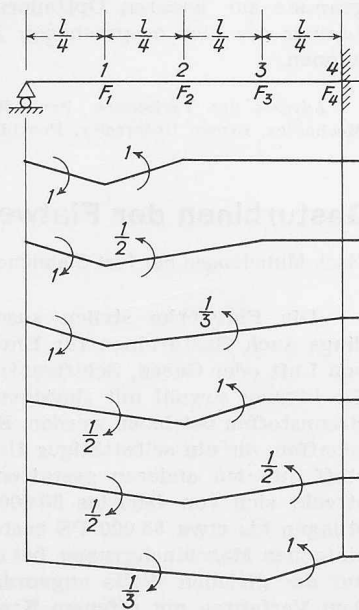


Bild 7

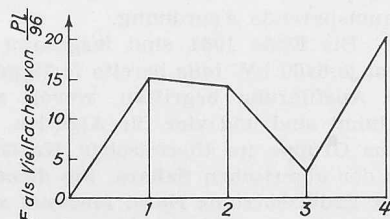


Bild 8

Tafel IV

Veränderliche	$\geq 0$						Zeichen	Konst.
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$		
$\geq 0$	$F_1$	2	$3/2$	$4/3$			$\leq$	$l/4$
	$F_2$	1		$3/2$	1		$\leq$	$l/4$
	$F_3$		$1/2$	1		$4/3$	$\leq$	$l/4$
	$F_4$			$1/3$	$1/2$	1	$\leq$	$l/8$
Zeichen	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$		$\geq$
Konstante	$P \cdot l/4$	$P \cdot l/4$	$P \cdot l/4$	$P \cdot l/4$	$P \cdot l/4$	$P \cdot l/4$	$\leq$	$C$

von Bild 6 negativ ist, aber positiv für den sechsten. Infolgedessen kann die dritte Beziehung des dualen Problems, nämlich die Gleichung

$$(27) \quad \frac{1}{2}c_2 + c_4 + \frac{1}{3}c_6 = l/4$$

nicht als die Forderung eines Fliesmechanismus interpretiert werden, für den die relative Winkelgeschwindigkeit am Gelenk 3 den Wert  $l/4$  hat. Das Prinzip der gleichförmigen Ausnützung des Materials verliert daher seine Gültigkeit, wenn man es mit mehrfachen Lastsystemen zu tun hat.

Indem man die Anzahl der betrachteten Laststellungen vergrössert, kann man die numerischen Methoden der linearen Optimierung benutzen, um sich der Bemessung für bewegliche Lasten anzunähern. Allgemeine Methoden zur direkten Lösung dieses Problems liegen jedoch zurzeit noch nicht vor.

Wir haben gezeigt, wie ein jedes einer Reihe von Problemen der plastischen Analyse und Bemessung von Tragwerken als eine lineare Optimierungsaufgabe formuliert werden kann. Das Anziehende dieser Formulierung ist, dass dadurch ein und dieselbe numerische Methode auf verschiedenartige Probleme der Baustatik angewandt werden kann. Wir wollen nun diese Methode kurz besprechen. Um die Schreibarbeit gering zu halten, betrachten wir die durch die Zeilen der Tafel III dargestellte, lineare Optimierungsaufgabe und nehmen für die Abmessungen des Rahmens und die auf ihn einwirkenden Lasten die folgenden Werte an:  $h = 5$  m,  $l = 4$  m,  $H = 1000$  kg,  $P = 5000$  kg. Unter den Nebenbedingungen

$$(28) \quad \begin{aligned} 2c_1 + 2c_3 &\leq 5 \\ 2c_1 + 4c_2 + 4c_3 &\leq 13 \end{aligned}$$

für die nichtnegativen Veränderlichen  $c_1, c_2, c_3$  soll dann der Ausdruck

$$(29) \quad C = 5000c_1 + 20000c_2 + 25000c_3$$

zu einem Maximum gemacht werden.

Wir schreiben zunächst die Nebenbedingungen (28) in der Form

$$(30) \quad \begin{aligned} k_1 - 2c_1 - 2c_3 + 5 &\geq 0, \\ k_2 - 2c_1 - 4c_2 - 4c_3 + 13 &\geq 0, \end{aligned}$$

wobei  $k_1$  und  $k_2$  durch diese Beziehungen definierte neue nichtnegative Veränderliche sind. Die Nebenbedingungen (30) sind offenbar durch die nichtnegativen Werte

$$(31) \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad k_1 = 5, \quad k_2 = 13$$

erfüllt, für die  $C = 0$  wird. Wir trachten nun, den Wert von  $C$  zu vergrössern, indem wir eine der Veränderlichen  $c_1, c_2, c_3$  auf Kosten von  $k_1$  und  $k_2$  wachsen lassen. Da im Ausdruck (29) für  $C$  die Veränderliche  $c_3$  den grössten Beiwert hat, soll  $c_3$  wachsen, während  $c_1$  und  $c_2$  den Wert null beibehalten. Dem Betrag, um den  $c_3$  wachsen kann, sind durch die Nichtnegativität von  $k_1$  und  $k_2$  Schranken gesetzt. Die Beziehungen (30) zeigen, dass mit  $c_1 = c_2 = 0$  die Veränderliche  $k_1$  für  $c_3 = 5/2$  verschwindet und die Veränderliche  $k_2$  für  $c_3 = 13/4$ . Wenn  $c_3$  von null an stetig wächst, so verschwindet also  $k_1$  für einen Wert von  $c_3$ , für den  $k_2$  noch positiv ausfällt.

Wir lösen nun die Definition von  $k_1$  nach  $c_3$  auf und setzen das Resultat in die Definition von  $k_2$  und den Ausdruck für  $C$  ein; wir erhalten so

$$(32) \quad \begin{aligned} c_3 &= -c_1 - \frac{1}{2}k_1 + \frac{5}{2} \geq 0, \\ k_2 &= 2c_1 - 4c_2 + 2k_1 + 3 \geq 0, \\ C &= -20000c_1 + 20000c_2 - 12500k_1 + 62500 \end{aligned}$$

Die neuen Nebenbedingungen sind durch die Werte  $c_1 = c_2 = k_1 = 0, c_3 = 5/2, k_2 = 3$  erfüllt, für die  $C = 62500$  wird. Der Uebergang von den Beziehungen (28), (29) zu den Beziehungen (32) kann als Austausch zwischen  $c_3$  und  $k_1$  charakterisiert werden. In der Tat gingen wir von einer Lösung der Beziehungen (28) aus, für die  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  war, und sind nun zu einer Lösung der ersten zwei Bezie-

hungen (32) gelangt, für welche  $c_1$  und  $c_2$  immer noch null sind, aber  $k_1$  anstelle von  $c_3$  verschwindet.

Aus den Vorzeichen im neuen Ausdruck  $C$  ergibt sich infolge der Nichtnegativität von  $c_1$ ,  $c_2$  und  $k_1$ , dass eine weitere Vergrößerung von  $C$  nur durch einen  $c_2$  betreffenden Austausch bewirkt werden kann. Da die erste Beziehung (28) die Veränderliche  $c_2$  nicht enthält, kann dieser Austausch nur durch Auflösen der zweiten Beziehung (28) nach  $c_3$  erhalten werden. Indem man die so gefundene Beziehung zur unveränderten ersten Beziehung (28) hinzufügt, findet man die folgenden neuen Nebenbedingungen:

$$(33) \quad c_3 = -c_1 - \frac{1}{2}k_1 + \frac{5}{2} \geq 0, \\ c_2 = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4}k_2 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{3}{4} \geq 0.$$

Einsetzen von (33) in die dritte Beziehung (32) liefert

$$(34) \quad C = -10\,000c_1 - 5\,000k_2 - 2\,500k_1 + 77\,500$$

Da die Beiwerte der nichtnegativen Grössen  $c_1$ ,  $k_2$ ,  $k_1$  in (34) negativ sind, entspricht das Maximum von  $C$  den Werten  $c_1 = k_2 = k_1 = 0$  und beträgt somit  $C = 77\,500$ . Dieser Maximalwert von  $C$  ist aber der gesuchte Minimalwert des veränderlichen Anteils des Konstruktionspreises. Ueberdies ergibt die Beziehung (34) die Fliessmomente  $F_1$  und  $F_2$ , welche zu diesem Mindestpreis führen. Es zeigt sich nämlich, dass die negativ genommenen Beiwerte von  $k_1$  und  $k_2$  im endgültigen Ausdruck (34) für  $C$  mit den Fliessmomenten  $F_1$  und  $F_2$  der optimalen Bemessung übereinstimmen. In der Tat bestätigt man leicht, dass die so erhaltenen Werte

$$F_1 = 2\,500, \quad F_2 = 5\,000,$$

die als mkg zu deuten sind, die Nebenbedingungen der zur oben betrachteten linearen Optimierungsaufgabe dualen Aufgabe erfüllen und gleichfalls  $C = F_1h + F_2(h + 2l) = 77\,500$  liefern.

Wir haben hier das sogenannte Austauschverfahren der linearen Optimierung mit grosser Ausführlichkeit besprochen. Es versteht sich von selbst, dass man bei der praktischen Anwendung dieses Verfahrens nicht die verschiedenen Beziehungen ausführlich anschreiben, sondern unmittelbar das Koeffizientenschema umformen wird. Die Zeit erlaubt uns nicht, auf diese sehr einfache Umformung einzugehen. Eine besonders übersichtliche Darstellung der Umformung findet sich in Professor Stiefels vor kurzem erschienenen «Einführung in die numerische Mathematik» (B. G. Teubner Verlag, Stuttgart 1961).

Zum Schluss noch eine Bemerkung über den Arbeitsaufwand. Die Anzahl der notwendigen Austauschschritte, die bei

unserem einfachen Rahmen nur zwei betrug, wächst überaus rasch, wenn man zu mehrstöckigen, mehrfeldrigen Rahmen übergeht, so dass der Einsatz von Rechenautomaten unerlässlich wird. Die Programmbibliotheken grösserer automatischer Rechenanlagen enthalten fast immer erprobte Programme zur linearen Optimierung, die ohne weiteres zur Lösung der hier besprochenen Aufgaben verwandt werden können.

Adresse des Verfassers: Prof. W. Prager, Division of Applied Mechanics, Brown University, Providence 12, R. I., USA

## Gasturbinen der Fiatwerke

DK 621.438

Nach Mitteilungen der Fiat Stabilimento Grandi Motori in Turin

Die Fiatwerke stellen ausser Dieselmotoren<sup>1)</sup> neuerdings auch Gasturbinen für Energieerzeugung, Verdichtung von Luft oder Gasen, Schiffsantrieb und andere Zwecke her. Sie können sowohl mit flüssigen als auch mit gasförmigen Brennstoffen betrieben werden. Es wurden Einrichtungen geschaffen, die ein selbsttätiges Umschalten von einem Brennstoff auf den anderen gestatten. Der Leistungsbereich erstreckt sich von 4900 bis 50 000 PS. Die Anlagen für Leistungen bis etwa 35 000 PS bestehen in der Regel aus einer einfachen Maschinengruppe, bei der Turbine und Kompressor auf der gleichen Welle angeordnet sind. Sie arbeiten nach dem Verfahren mit offenem Kreislauf und werden mit oder ohne Wärmeaustauscher geliefert. Die Verbrennung erfolgt in mehreren Brennkammern, die sich coaxial zwischen Kompressor und Turbine befinden. Dadurch ergibt sich eine raumsparende Anordnung.

Bis Ende 1961 sind insgesamt 15 Gasturbinenanlagen von je 6400 kW teils bereits fertiggestellt worden, teils noch in Ausführung begriffen, wovon elf für Argentinien bestimmt sind und vier für Algerien. Von diesen zeigt Bild 1 eine Gruppe im thermischen Kraftwerk Haoud El Hamra in der algerischen Sahara. Sie dient der Energieversorgung des Erdölzentrums Hassi Messaud sowie der Hauptpumpenstationen der 670 km langen Oelleitung, die zum Mittelmeer führt. Die hohen Aussentemperaturen sowie die in dieser Gegend häufig auftretenden Sandstürme erschweren beträchtlich die Betriebsbedingungen und erforderten besondere Vorkehrungen. Die Anlage kam im April 1960 in Betrieb und hat von Anfang an zufriedenstellend gearbeitet.

<sup>1)</sup> Ueber Fiat-Grossmotoren wurde in SBZ 1961, Heft 39, S. 671 und Heft 42, S. 737 berichtet.

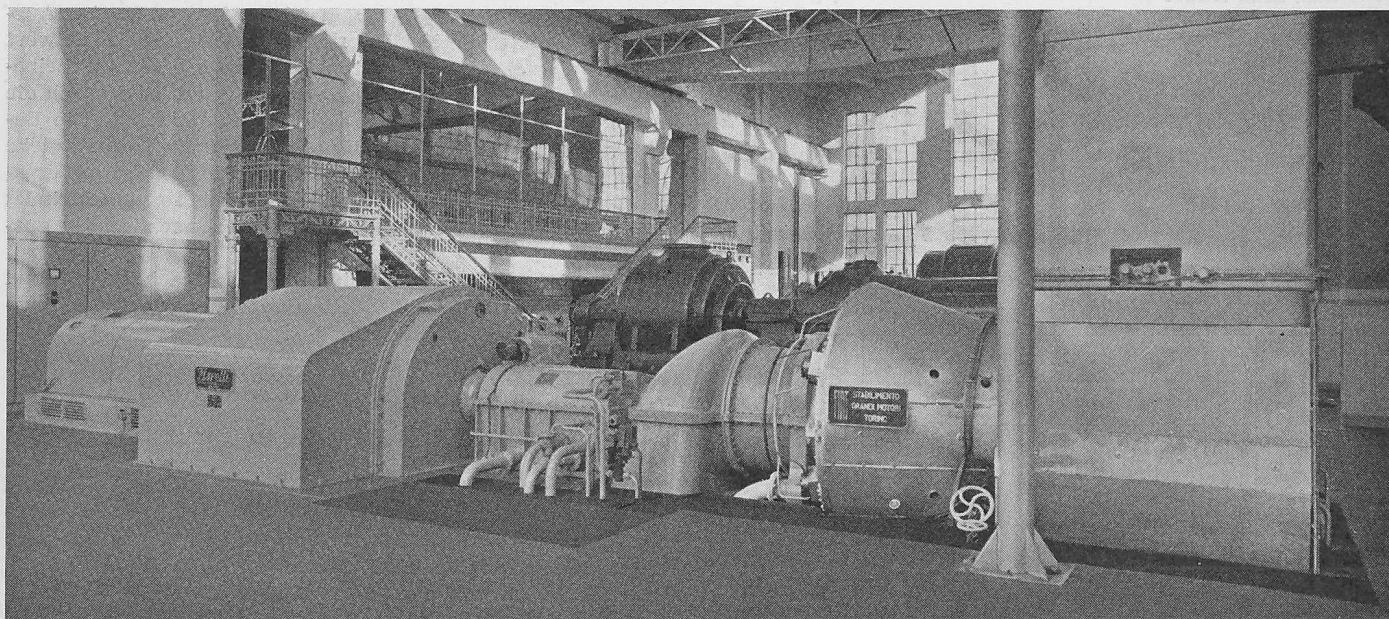


Bild 1. Gasturbinenanlage von 6400 kW im thermischen Kraftwerk Haoud El Hamra