

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 79 (1961)
Heft: 48

Artikel: Grundsätzliches zu den plastischen Berechnungsverfahren
Autor: Thürlmann, Bruno
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-65639>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 31.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Grundsätzliches zu den plastischen Berechnungsverfahren

Von Prof. Dr. Bruno Thürlmann, ETH, Zürich¹⁾

1. Einleitung

Die Aufgabe des Bauingenieurs ist es, brauchbare und ästhetisch befriedigende Bauwerke zu schaffen. Dabei ist es für den Ingenieur unerlässlich, zu wissen, unter welchen Umständen die Brauchbarkeit eines Bauwerkes beeinträchtigt wird oder ganz verloren geht. Schematisch können folgende Fälle des Versagens unterschieden werden:

1. Bruch, verursacht durch a) statische Belastung oder b) Ermüdung unter wiederholter Belastung.
2. Untolerierbare Verformungen, die als a) Durchbiegungen, b) Schwingungen, c) Risse, oder als Kombinationen dieser Zustände auftreten können.

Die statische Berechnung und die Überwachung der Bauausführung haben zum Ziel, eine genügende Sicherheit in das Tragwerk einzubauen, damit das Eintreten solcher Zustände nach menschlichem Ermessen vermieden wird. Es ist ganz klar, dass das Mass der Sicherheit durch Unsicherheiten bezüglich der Lastannahmen, Materialeigenschaften, Qualität der Ausführung, Vereinfachungen in der statischen Berechnung usw. wesentlich beeinflusst wird. Erfreulicherweise sind neuerdings Bestrebungen im Gange, diesen ganzen Fragenkomplex statistisch zu bearbeiten (siehe etwa [1], [2], [3]²⁾.

Einen ganz wesentlichen Faktor in der rechnerischen Bestimmung der Sicherheit bildet aber die Berechnung der statischen Tragfähigkeit einer Konstruktion. Leider muss festgestellt werden, dass gerade in dieser Beziehung unsere klassischen elastischen Methoden sehr wenig leistungsfähig sind. Es drängt sich ganz natürlich das Suchen nach einem neuen Verfahren auf, mit dem man auf einfache und zuverlässige Weise die Tragfähigkeit berechnen kann. Es sei hier deutlich betont, dass die anderen Kriterien bezüglich der Sicherheit keineswegs ausgeschaltet werden dürfen. Im Hochbau, für den Fall von ruhender Belastung, stellt aber die statische Tragfähigkeit sicher das wichtigste und meistens auch ausschlaggebende Kriterium dar.

Bevor auf eine Beschreibung dieser neuen Methode eingegangen wird, soll noch auf einige Fälle hingewiesen werden, für welche die elastischen Berechnungsmethoden keine befriedigende Antwort geben können.

2. Unzulänglichkeiten der elastischen Berechnungsmethoden

Als erstes Beispiel sei der Zweifeldträger mit konstanter

1) Vortrag, gehalten an der Fachtagung der S. I. A.-Fachgruppe für Brückenbau und Hochbau am 12. Nov. 1960.

2) Die Zahlen in eckiger Klammer beziehen sich auf die Literaturangaben am Ende des Aufsatzes.

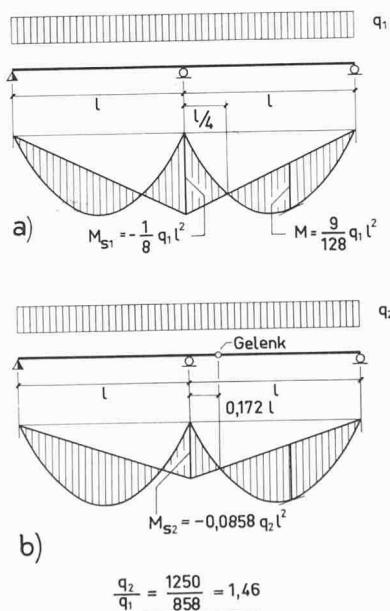


Bild 1. Vergleich eines Zweifeldträgers mit einem Gerber-Träger

Biegefestigkeit EI nach Bild 1 betrachtet *). Im Fall (a) verursacht die gleichmäigig verteilte Belastung q ein massgebendes Stützenmoment M_{S1} . Andererseits ist durch geschickte Wahl eines Gelenkes im Fall (b) ein natürlicher Momentenausgleich zwischen Stützenmoment M_{S2} und Feldmoment erreicht worden. Nach der elastischen Theorie ist die Beanspruchung eines Trägerwerkes durch das Eintreten von Fliesen in der höchst beanspruchten Faser begrenzt. Ist nun der Biegewiderstand der Träger in beiden Fällen gleich, d. h. $M_{S1} = M_{S2}$, so ergibt sich für den Fall (b) eine Erhöhung der rechnerischen Maximallast um nicht weniger als 46 %. Dieses Resultat widerspricht offensichtlich unserer unvoreingenommenen Erwartung. Erstens ist der Balken mit Gelenk weniger steif. Zweitens bedeutet das Zerschneiden des Trägers und Einsetzen eines Gelenkes doch unzweideutig eine Schwächung. Die elastische Berechnung führt uns daher zur paradoxen Antwort, dass eine Schwächung eines Trägerwerkes zu einer Erhöhung seiner Tragfähigkeit führen soll.

Als Gegenstück kann sofort ein Beispiel angeführt werden, für das eine Verstärkung des Trägerwerkes eine Herabsetzung der Tragfähigkeit verursachen soll. Bild 2 zeigt einen einfachen Rechteck-Rahmen. Für den Fall (a) sind die Steifigkeiten der Stützen und des Riegels so abgestimmt, dass Feld- und Eckmoment gleiche Grösse haben. Wird nun aus irgend einem Grund die Biegesteifigkeit der Stützen verdoppelt, Fall (b), so erhöht sich das elastisch errechnete Eckmoment. Der Vergleich der beiden Fälle führt zu einem Verhältnis der Lasten $q_1/q_2 = 0,875$, also zu einer vermeintlichen Verminderung der Tragfähigkeit. Sicher steht dieses Resultat ebenfalls im Widerspruch zu unserer Erwartung. Eine Verstärkung der Stützen sollte doch auf keinen Fall zu einer Verminderung der Tragfähigkeit des gesamten Rahmens führen.

Zwei folgende Beispiele sollen zeigen, dass bei der elastischen Berechnung von Trägerwerken sehr oft Annahmen getroffen werden, die dazu führen, dass die berechneten Schnittkräfte oder Spannungen keineswegs mehr den tatsächlich auftretenden Grössen entsprechen, sondern nur noch einen nominalen Wert haben können. Nach Bild 3 wird ein eingespannter Plattenbalken aus Stahlbeton untersucht. Entsprechend der allgemein üblichen Annahme wurde zur Berechnung der Schnittkräfte der volle Betonquerschnitt ohne Stahleinlagen berücksichtigt, d. h. mit der Biegesteifigkeit $EI = \text{konstant}$ gerechnet. Die angegebenen Armierungsgehalte gelten für volle Ausnutzung von Stahl und Beton im Stützenquerschnitt und Ausnutzung der Stahlspannung im Feldquerschnitt. Mit diesen Einlagen sind dann die Steifigkeiten der gerissenen Querschnitte (Stadium 4) gerechnet und die entsprechende Verteilung der Biegemomente bestimmt worden. Das Bild zeigt, dass die beiden Annahmen zu verschiedenen Resultaten mit nicht unbeträchtlichen Unterschieden führen. Damit sei festgehalten, dass die Benutzung der Biegesteifigkeit EI des Betonquerschnittes wohl zu einer möglichen, sicher aber nicht zur tatsächlichen Verteilung der Schnittkräfte führt.

In den meisten Fällen werden die Eigenspannungen im Spannungsnachweis unberücksichtigt gelassen. In Bild 4 sind gemessene Eigenspannungen in Axialrichtung eines Walzprofiles und einer geschweißten Stütze aufgetragen [4]. Sie dürfen als durchaus typisch für solche Querschnitte angesehen werden. Im Walzträger erreichen sie die Hälfte der Fließspannung, σ_F , im geschweißten Träger sogar die Fließgrenze. Sie entstehen in einem Walzprofil durch die schnelle

*) Entsprechend amerikanischer (und z. T. auch deutscher, s. Taschenbuch Schleicher) Gepflogenheit bezeichnen wir das axiale Trägheitsmoment mit I , sodass J der Bezeichnung des polaren Trägheitsmomentes vorbehalten bleibt.

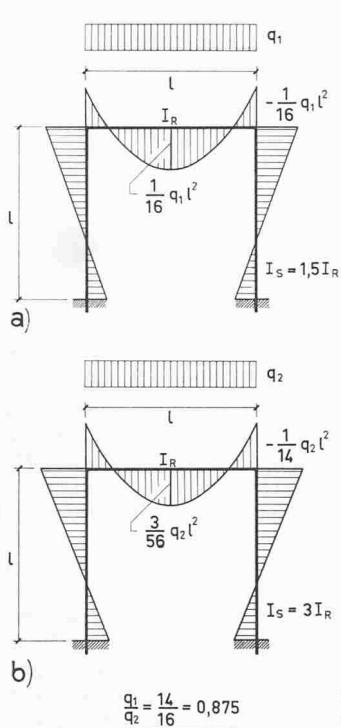


Bild 2 (links). Momentenverteilung in einem Rahmen für zwei verschiedene Stützensteifigkeiten

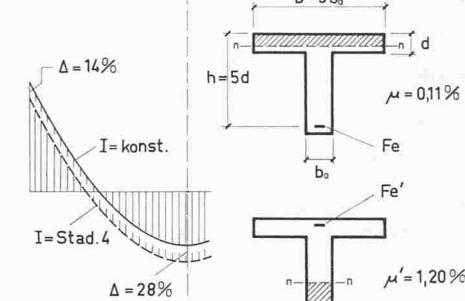
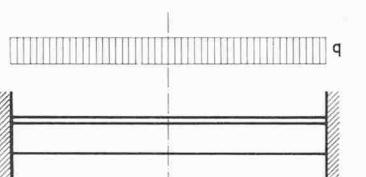
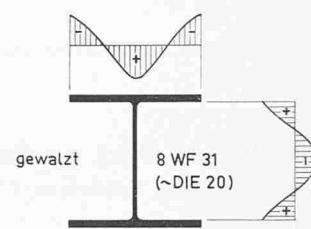


Bild 3. Beeinflussung der Momentenverteilung infolge verschiedener Steifigkeiten eines Stahlbetonbalkens



1 t/cm²

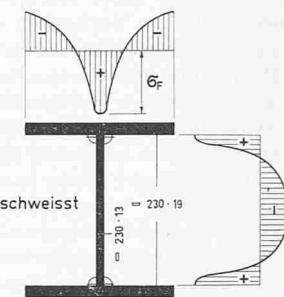


Bild 4. Eigenspannungen eines Walzprofils und einer geschweißten Stütze

Abkühlung der Flanschspitzen und des Steges gegenüber der massigen Verbindungszone dieser Teile. Die Schrumpfungen der Schweißnähte verursachen in zusammengesetzten Profilen noch höhere Eigenspannungen. In einem Spannungsnachweis werden nun diese Eigenspannungen ohne Zögern vernachlässigt. Die Erfahrung hat gezeigt, dass dieses Vorgehen durchaus gerechtfertigt ist bei Zug- und Biegeträgern. Im Fall von Druck beeinflussen sie aber die Knicklast ganz wesentlich im Übergangsbereich zwischen elastischem Knicken und Fliessen, wie erst kürzlich sowohl theoretisch als auch experimentell nachgewiesen wurde [4], [5].

Die zwei letzten Beispiele zeigen, dass erstens die errechneten Spannungen im allgemeinen nur einen nominellen Wert haben, der sehr oft von den tatsächlichen Spannungen abweicht. Zweitens bestätigt uns aber die Erfahrung, dass trotz dieser Diskrepanz meistens keine schädlichen Folgen an den so berechneten Tragwerken auftreten. Es drängt sich daher ganz natürlich die Suche nach einer logischen und einfachen Erklärung dieses Verhaltens auf.

Die praktischen Fälle, in denen die Elastizitätstheorie mehr oder weniger grob verletzt wird, sind viel häufiger, als allgemein angenommen wird. Zum Beispiel sind die zulässigen durchschnittlichen Spannungswerte von Niet-, Schrauben- und Schweißverbindungen aus Bruchversuchen hergeleitet. Schon unter Gebrauchslast können Spannungsspitzen auftreten, die die Fliessgrenze überschreiten. Weiter soll hier auf die Berechnung von Decken mit unregelmässigen Auflagerbedingungen und Aussparungen hingewiesen werden. Man darf wohl ruhig behaupten, dass solche Platten in den wenigsten Fällen nach der elastischen Plattentheorie gerechnet werden. In Fachwerkträgern werden die Nebenspannungen vernachlässigt, die sich aus der Formänderung des Systemnetzes ergeben. In allen diesen Fällen, für die die elastische Theorie keine oder eine unverantwortlich komplizierte Lösung liefert, wird sehr grosszügig die sogenannte «Selbsthilfe» des Materials angerufen. Auf Grund der Tatsache, dass praktisch alle Baumaterialien eine beträchtliche Zähigkeit aufweisen, wird mit Recht angenommen, dass durch plastische Verformungen die Spannungsspitzen abgebaut werden. Es ist das Ziel der «plastischen Methoden»³⁾, diese «Selbsthilfe» des Materials direkt in Rechnung zu stellen und sie nicht nur als notwendige Entschuldigung zu gebrauchen.

3. Biegewiderstand von Stahl- und Stahlbetonträgern

Im folgenden soll die Auswirkung der Berücksichtigung der plastischen Verformungen auf den Widerstand und die

Formänderungen von Biegeträgern dargestellt werden. In Bild 5 sind die Spannungs-Dehnungs-Kurven verschiedener Stahlsorten masstäblich aufgetragen und zwar für (1) normalen Baustahl ST 37, (2) naturharten, hochwertigen Bau- und Armierungsstahl ST 52, (3) kaltgereckten Armierungsstahl, (4) Sonderstahl USS T-1 amerikanischer Herkunft und (5) gezogenen patentierten Vorspanndraht. Zu beachten ist, dass alle diese Stähle eine sehr bedeutende plastische Dehnung zeigen. Dabei ist im Bild die Dehnung nur bis zu 2 % aufgetragen. Stahl (1) und (2) zeigen eine scharfe Fliessgrenze, σ_F , anschliessend einen ausgesprochenen Fliessbereich, wobei die Dehnung von der Fliessdehnung ϵ_F bis zum Verfestigungsbereich ϵ_V unter konstanter Fliessspannung um etwa das 10- bis 15fache zunimmt. Im Verfestigungsbereich nimmt die Spannung nochmals zu, wobei aber der anfängliche Tangentenmodul im Verfestigungsbereich, $E_V = d\sigma/d\epsilon$, etwa 30mal kleiner als der Elastizitätsmodul E ist. Schliesslich wird die Zerreissfestigkeit β_Z erreicht. Der Bruch erfolgt bei einer Dehnung von über 25 %, gemessen über eine Messlänge von 5mal dem Durchmesser des Probestückes.

3) Terminologisch ist der Ausdruck «plastische Methode» eine Abkürzung für «Methode, die das plastische Materialverhalten berücksichtigt». Im englischen Sprachgebrauch hat sich «Plastic Design» eingebürgert.

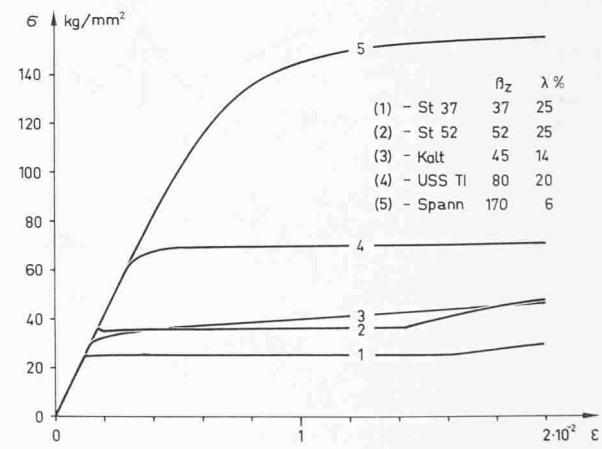


Bild 5. Spannung-Dehnungsdiagramme verschiedener Bau- und Armierungsstähle

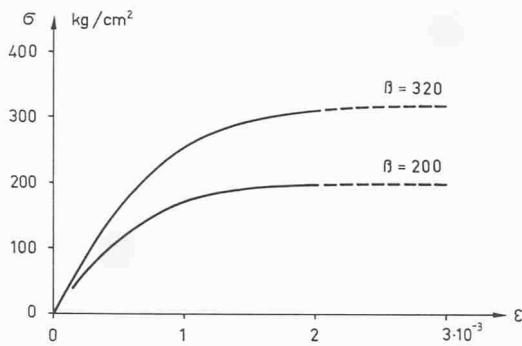
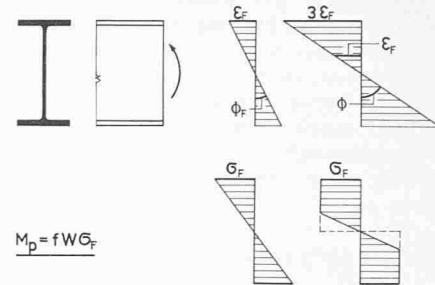


Bild 6 (links). Spannungsdehnungsdiagramm von Beton

Bild 7 (rechts). Plastisches Moment eines I-Profil



In den plastischen Berechnungsverfahren wird im allgemeinen nur der Fliessbereich berücksichtigt, dagegen der Verfestigungsbereich aus folgenden Gründen vernachlässigt:

1. Die Verformungen sind beim Erreichen des Verfestigungsbereiches schon recht gross.

2. Die Querschnittsbreitmessungen normaler Stahlprofile (im speziellen Flanschbreite zu Flanschdicke und Steghöhe zu Stehdicke) sind so, dass es nicht möglich ist, diese Profile wesentlich über ϵ_V hinaus zu beanspruchen, ohne dass lokales Ausbeulen oder Auskippen eintreten wird [5], [6].

3. In Stahlbeton-Querschnitten erfolgt bei den üblichen Armierungsgehalten die Stauchung der Betondruckzone, bevor der Verfestigungsbereich des Armierungsstahls erreicht ist.

Zur Interpretation von Versuchsergebnissen ist es hingegen oft nötig, den Verfestigungsbereich zu berücksichtigen, um eine befriedigende Erklärung des Verhaltens zu erzielen.

Beton zeigt unter Druck ein plastisches Verformungsvermögen, wie es in Bild 6 dargestellt ist. Die zwei Kurven für die beiden Prismafestigkeiten $\beta = 200 \text{ kg/cm}^2$ und $\beta = 320 \text{ kg/cm}^2$ sind in Kurzzeit-Versuchen bestimmt worden. Somit sind sie nicht durch Schwinden und Kriechen entstellt. Die maximale Bruchstauchung unter exzentrischem Druck beträgt etwa 3/1000. Für axialen Druck reduziert sich dieser Wert auf etwa 2/1000.

Es sollen nun der Biegwiderstand eines I-Querschnittes und eines Stahlbetonbalkens untersucht werden. Dabei werden die zwei Voraussetzungen getroffen, dass die Dehnungen proportional zum Abstand von der neutralen Axe sind (Hypothese von Navier-Bernoulli) und die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung gleich wie im Axialversuch ist, d. h. aus Bild 5 und 6 entnommen werden kann. In einem Walzprofil ohne Eigenspannungen verursacht ein Biegemoment kein Fliessen, bis das Fliessmoment $M_F = W\sigma_F$ erreicht ist (Bild 7). Die entsprechende Dehnung der Randfaser beträgt ϵ_F und die zugehörige Krümmung, d. h. der Verdrehungswinkel pro Längeneinheit, Φ_F . Wird die Beanspruchung weiter gesteigert, so wachsen wohl die Randdehnung und die Krümmung, die Randspannung σ_F hingegen bleibt konstant und Fliessen pflanzt sich vom Rand her gegen die neutrale Axe fort. Als Grenzwert wird schliesslich nahezu volles Fliessen sowohl der Druck- als auch der Zugzone erreicht, wenn man berücksichtigt, dass erst für $\epsilon_V \approx 15 \epsilon_F$ Verfestigung der Randzone eintritt. Das resul-

tierende Moment im Zustand der vollen Plastifizierung des Querschnittes ist gleich dem «Plastischen Moment» oder

$$(1) \quad M_p = fW\sigma_F = fM_F = Z\sigma_F$$

wobei: W = Widerstandsmoment, σ_F = Fliessspannung, f = Formfaktor, Z = plastisches Widerstandsmoment.

Der Formfaktor f hängt nur von der Querschnittsform ab. Er gibt direkt das Verhältnis M_p/M_F an. In Tabelle 1 ist der Wert von f für einige Querschnitte zusammengestellt.

Tabelle 1

Querschnitt:	I-Profil	Rohr	Rechteck, I-Profil	Kreis	Parallelogramm
Formfaktor f :	1,13	1,27	1,50	1,70	2,00

Bild 8 gibt den Zusammenhang zwischen Moment M und Krümmung Φ für einen I-Querschnitt in normierter Darstellung. Das Moment M ist durch das plastische Moment M_p und die Krümmung Φ durch die Bezugskrümmung $\Phi_p = M_p/EI$ dividiert. Der Vorteil dieser Darstellung ist offensichtlich, da er für beliebige I-Querschnitte und besonders auch für beliebige Fliessspannungen gilt. Hervorzuheben ist die Ausrundung der Kurve durch die Berücksichtigung der Eigenspannungen im Bereich von $\Phi/\Phi_p = 1$. Unelastisches Verhalten tritt ein, wenn die Summe der Lastspannung und der Eigenspannung gleich der Fliessspannung wird. Das entsprechende Moment ist im Bild mit M_E bezeichnet. Nach Erreichen des Verfestigungsbereiches, $\Phi_V \approx 15 \Phi_p$, wächst das Biegemoment wieder langsam an mit einer rund 30fach kleineren Steigung gegenüber dem elastischen Bereich. Die zwei Parameter k_1 und k_2 sind für die spätere Benutzung ebenfalls eingetragen. Dabei ist k_1 gleich der schraffierte Fläche, also ein Mass für die Ausrundung der $M - \Phi$ -Kurve infolge Eigenspannungen; k_2 dagegen ist der Schwerpunktsabstand dieser Fläche. Durchschnittliche Werte sind etwa $k_1 = 1/5$, $k_2 = 9/10$.

Die Verhältnisse für einen Stahlbetonquerschnitt sind in Bild 9 dargestellt. Wird die Beanspruchung über die Fliessdehnung σ_F des Stahles hinaus gesteigert, so bleibt die Stahlspannung konstant gleich σ_F . Gleichzeitig rückt aber

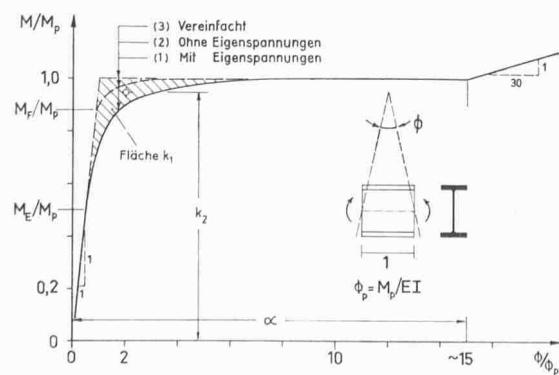


Bild 8 (links). Beziehung zwischen Moment und Krümmung eines I-Profil in normierter Darstellung

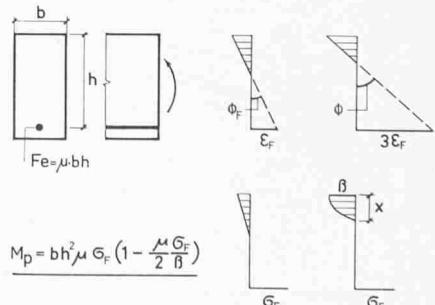


Bild 9 (rechts). Plastisches Moment eines Stahlbetonquerschnittes

die neutrale Axe näher an den Druckrand heran und die Verteilung der Betonspannungen bleibt nicht mehr linear. Als Grenzzustand bildet sich eine nahezu rechteckige Verteilung der Druckspannungen aus. Dass eine solche Annahme durchaus genügend genaue Resultate liefert, haben neulich noch einmal ausführliche statistische Untersuchungen von 1600 Versuchsresultaten gezeigt [7]. Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich der Wert des «plastischen Momentes»⁴⁾:

$$(2) \quad M_p = \mu b h^2 \sigma_F \left(1 - \frac{\mu \sigma_F}{2\beta} \right)$$

Die Beziehung zwischen Moment und Krümmung ist auch in diesem Fall sehr ähnlich zu jener eines Walzprofiles (Bild 8). Es bildet sich ebenfalls im Stahlbeton-Träger ein plastisches Gelenk aus, wenn keine übertriebene Armierung zu einer vorzeitigen Stauchung der Betondruckzone führt. Bild 10 zeigt eine normierte Darstellung der Durchbiegung verschiedener Versuchsträger. Dabei ist die Last P durch die maximale Versuchslast P_{max} und die Durchbiegung δ durch die Bezugsdurchbiegung δ' dividiert worden. Der Wert von δ' wurde aus dem Schnittpunkt zwischen Anfangstangente und Horizontale durch P_{max} bestimmt, wie aus dem Bild ersichtlich ist. Der Vorteil dieser Darstellungsart besteht wieder in der Möglichkeit, Resultate verschiedener Versuchsträger miteinander vergleichen zu können. Wie das Bild zeigt, nähert sich die Last asymptotisch der Maximallast. Vor allem ist die grosse plastische Verformbarkeit bis zum Bruch ersichtlich, was indirekt die progressive Ausbildung eines plastischen Gelenkes bestätigt.

Schliesslich soll noch etwas ausführlicher auf die Besonderheit im Falle der Belastung durch eine konzentrierte Einzellast hingewiesen werden. In Bild 11 ist angenommen, dass die Last P bereits einen Wert $P > P_p$ erreicht habe, so dass das entsprechende Moment in Feldmitte M_m grösser als das plastische Moment M_p ist. Um die Durchbiegung nach der Analogie von Mohr zu berechnen, sind unter dem Momentendiagramm die entsprechenden Krümmungen abgetragen worden. Diese Krümmungen können einer Darstellung wie etwa Bild 8 entnommen werden. Es werden folgende Beziehungen eingeführt:

$$\beta = M_m/M_p > 1$$

$$\Phi_p = M_p/EI$$

$$\Phi_v = \alpha \Phi_p$$

$$(M_m - M_p)/E_v I = (\beta - 1) \Phi_p E/E_v$$

$$E_v = \text{Verfestigungsmodul}$$

$$k_1 = \text{Ausrundungsfläche im } M\text{-}\Phi \text{ Diagramm} \\ \text{in normierter Darstellung (Bild 8)}$$

$$k_2 = \text{Schwerpunktsabstand von } k_1$$

4) Die als «EMPA-Formel» bekannte Gleichung (2) ist von G. v. Kazinczy auf Seite 1169 und von M. Roš auf Seite 1179 in [8] angeführt. F. Stüssi hat in [9] eine sehr allgemeine Darstellung der unelastischen Biegung gegeben.

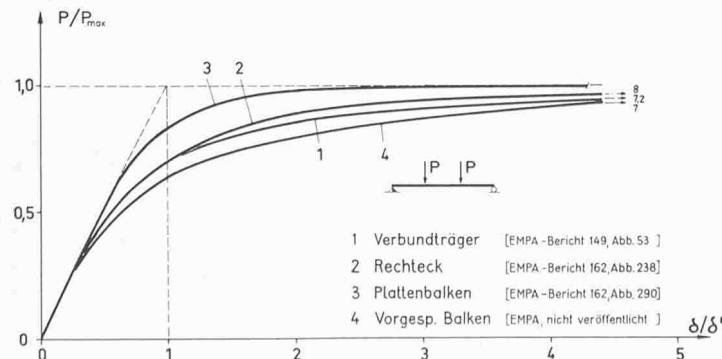


Bild 10. Last-Durchbiegungskurven verschiedener Träger in normierter Darstellung

$$a = \frac{l}{2} \cdot \frac{M_p}{M_m} = \frac{l}{2\beta}$$

$$b = \frac{l}{2} - a = \frac{l}{2\beta} (\beta - 1)$$

Diese Grössen sind ebenfalls in Bild 11 eingetragen. Die Krümmung im Verfestigungsbereich wurde durch die Beziehung $(M_m - M_p)/E_v I$ angenähert. Da die Kurve für Φ in Bild 11 ähnlich der Kurve in Bild 8 ist, wird entsprechend die Ausrundungsfläche $k_1 \alpha \Phi_p$ und der Abstand vom rechten Auflager $k_2 a$. Die Durchbiegung δ in Balkenmitte lässt sich etwas einfacher anschreiben, wenn der Balken als in der Mitte eingespannt (horizontale Tangente) betrachtet wird. Die Verschiebung des Auflagers ist dann nach der Mohrschen Analogie gleich dem statischen Moment der Φ -Fläche bezüglich dem Auflager. Für den dargestellten Fall $P > P_p$ wird:

$$(3) \quad \delta = \Phi_p \frac{a}{2} \frac{2}{3} a + \Phi_v b \left(a + \frac{b}{2} \right) + \\ + \frac{M_m - M_p}{E_v I} \frac{b}{2} \left(a + \frac{2}{3} b \right) + k_1 a \Phi_p k_2 a$$

Das letzte Glied stellte den Beitrag der Ausrundung des $M\text{-}\Phi$ -Diagramms dar. Je nach der Grösse der Eigenspannungen variiert seine Bedeutung. Mit den eingeführten Abkürzungen und der Beziehung

$$(4) \quad \delta_p = \frac{P_p l}{48 EI} = \frac{M_p l^2}{12 EI}$$

wird Gleichung (3) als Funktion von $\beta = M_m/M_p > 1$

$$(5) \quad \delta/\delta_p = \frac{1}{\beta^2} \left[1 + \frac{3}{2} \alpha (\beta^2 - 1) + \frac{1}{2} \frac{E}{E_v} (\beta - 1) (2\beta^2 - \beta - 1) + 3k_1 k_2 \right]$$

Die entsprechende Kurve ist in Bild 12 für die folgenden Zahlenwerte aufgetragen:

$$\begin{array}{ll} \alpha = \Phi_v/\Phi_p = 12 & k_1 = 1/5 \\ E/E_v = 30 & k_2 = 9/10 \\ M_E/M_p = 1/2 & \end{array}$$

Sie gelten angenähert für einen I-Träger aus Stahl 37 europäischer oder Stahl ASTM-A 7 amerikanischer Herkunft. Im wesentlichen zerfällt die Durchbiegungskurve in eine steile elastische Gerade und in eine wesentlich flachere Gerade für den Verfestigungsbereich. Im Gebiete von $M = M_p$ tritt eine Ausrundung als stetiger Übergang ein, die von der Grösse und Verteilung der Eigenspannungen im Profil beeinflusst

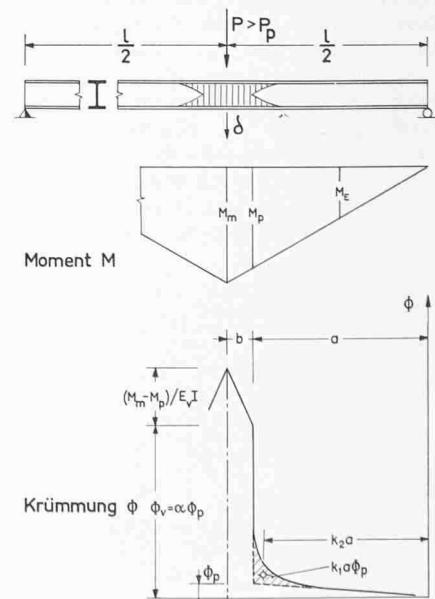


Bild 11. Krümmungsverlauf in einem einfachen Balken unter Einzellast

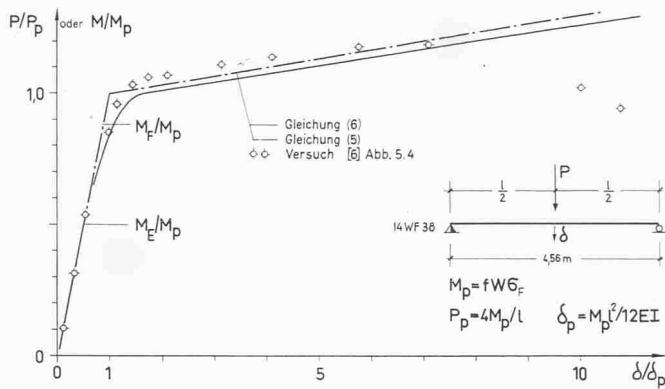


Bild 12. Last-Durchbiegungskurve eines einfachen Balkens unter Einzellast

ist. Da die komplizierte Gleichung (5), gültig für $\beta > 1$, praktisch auf eine Gerade führt, liegt es auf der Hand, dafür eine Näherung zu bestimmen.

Für die obigen Zahlenwerte gibt

$$(6) \quad \delta/\delta_p = 1 + \frac{E}{E_v} (\beta - 1)$$

recht gute Resultate, wie Bild 12 zeigt. Ebenfalls eingetragen ist das Resultat eines Versuches ([6], Fig. 5.4, Seite 24) an einem Walzprofil von 35 cm Höhe (amerikanische Profilzeichnung 14 WF 38). Anfänglich folgt der Versuch der theoretischen Kurve ziemlich gut. Bei einer Durchbiegung von $\delta/\delta_p = 6$ beginnt jedoch die Last langsam abzufallen, verursacht durch seitliches Auskippen des Trägers.

Es ist festzuhalten, dass im Fall von konzentrierter Belastung die Last P sowohl theoretisch wie praktisch über die errechnete Traglast P_p ansteigen kann. Jedoch ist die Zunahme relativ gering und von grossen Deformationen begleitet. Weiter ist sie praktisch beschränkt durch Kippen des Trägers oder lokales Beulen des Druckflansches. Daher wird in den plastischen Berechnungsmethoden dieser Anstieg vernachlässigt, da er praktisch nicht zur Auswirkung kommen kann (siehe Bilder 17 bis 20). Zur Interpretation von Versuchen mit Einzellasten muss jedoch der Verfestigungsbereich zur Klärung des Verhaltens herangezogen werden, insbesondere wenn die Versuche an kompakten und kurzen Trägern durchgeführt werden (siehe Bild 21).

4. Das plastische Berechnungsverfahren

Nach diesem Abriss über das unelastische Verhalten von Biegeträgern, insbesondere über den Zusammenhang zwischen Biegemoment und Krümmung, soll nun das plastische Berechnungsverfahren an Hand von einfachen Beispielen kurz beschrieben werden.

Im wesentlichen sind im Fall von auf Biegung beanspruchten Tragwerken vier Voraussetzungen notwendig:

1. Die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung folgt dem in Bild 13 (oder auch in Bild 8) dargestellten Verhalten, d. h. die Krümmung nähert sich asymptotisch dem plastischen Moment M_p . Praktisch ist ein Krümmungswert von $\Phi/\Phi_p = 4$ ausreichend, um einen vollen Momentenausgleich zu erreichen.

2. Die Verformungen des Tragwerkes sind klein gegenüber seinen Abmessungen. Folglich können die Gleichgewichtsbedingungen am undeformierten System formuliert werden. Es wird daher eine «Theorie erster Ordnung» gebraucht, wie sie ebenfalls in der elastischen Baustatik üblich ist.

3. Die Belastung erfolgt proportional, d. h. alle Lasten werden proportional bis zum Erreichen der Traglast P_p gesteigert.

4. Der Einfluss von Normal- und Schubkräften kann vernachlässigt werden. Eben-

so ist ein vorzeitiges Versagen infolge Knicken, Kippen oder Beulen ausgeschlossen.

Die letzten zwei, in vielen Fällen sehr einschränkenden Voraussetzungen, können jedoch gelockert werden. So ist es möglich, den Einfluss von Normal- und Schubkräften zu berücksichtigen. Durch konstruktive Massnahmen kann auch Instabilität vermieden werden. Die Klärung dieser Nebenbedingungen war sehr wesentlich, um den plastischen Methoden Anwendung in der Praxis zu verschaffen (siehe z. B. [6] für eine zusammenfassende Darstellung auf dem Gebiete des Stahlhochbaues).

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich nun verschiedene Typen von Tragkonstruktionen recht einfach berechnen.

Beispiel 1

Bild 14 zeigt einen über drei Felder durchlaufenden Balken. Der Wert des plastischen Biegewiderstandes sei konstant gleich M_p über die ganze Länge. Unter der Einzellast P werden sich in einer ersten elastischen Phase die beiden Stützenmomente M_2 und M_4 und das Feldmoment M_3 in einem ganz bestimmten Verhältnis ausbilden. Das Moment M_3 wird zuerst die elastische Grenze M_E (Fliessbeginn infolge Last plus Eigenspannung), dann das Fliessmoment $M_F = W \sigma_F$ und schliesslich das plastische Moment $M_p = fW \sigma_F$ erreichen. Es bildet sich also allmählich ein plastisches Gelenk aus (Plastifizierung des Querschnittes), so dass die Stützenmomente einen immer grösseren Anteil der Last zu tragen haben (Momentenausgleich). Schliesslich wird der Zustand erreicht, wo neben dem Feldmoment M_3 auch die Stützenmomente M_2 und M_4 den Wert M_p erreicht haben. Nach der einfachen plastischen Theorie (keine Verfestigung nach dem Fliessen) ist eine weitere Laststeigerung nicht mehr möglich. Somit führt die einfache Gleichgewichtsüberlegung, wie sie Bild 14 (b) zeigt, zur theoretischen Traglast P_p . Das Moment des einfachen Balkens $M = P_p l/4$ wird je zur Hälfte auf Feld- und Stützenmoment aufgeteilt:

$$(7) \quad P_p = 8 M_p/l$$

Neben dieser sehr anschaulichen «Gleichgewichtsmethode» wird die sogenannte «Mechanismus-Methode» verwendet. Sie bietet besonders für die Berechnung komplizierter Tragwerke bedeutende Vorteile. Betrachtet sei die Situation, wie sie nach der Ausbildung der plastischen Gelenke in den Punkten (2), (3) und (4) vorliegt. Theoretisch kann sich das Tragwerk ohne Steigerung der Last weiter durchbiegen. Es hat sich also ein «Mechanismus» mit einem Freiheitsgrad ausgebildet. Das Gleichgewicht des Systems kann sehr einfach durch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ausgedrückt werden. Dieses Prinzip sagt aus, dass die Arbeit eines Gleichgewichtssystems infolge einer virtuellen Verschiebung

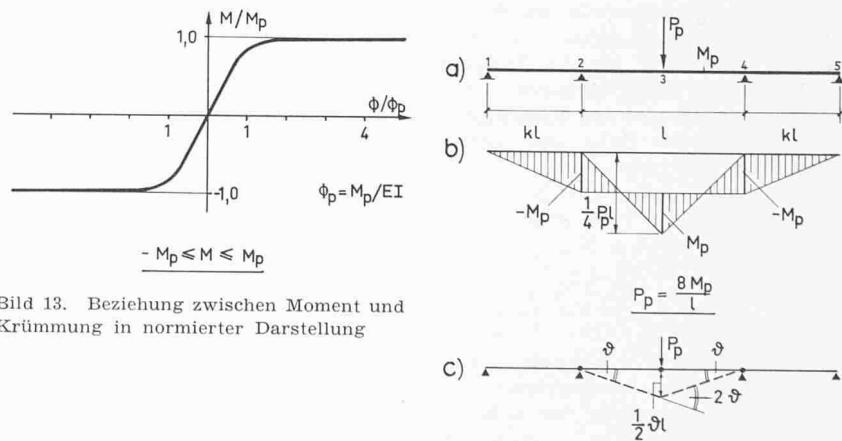


Bild 14 (rechts). Mechanismus und Traglast eines Dreifeldträgers unter Einzellast

$$P_p \frac{1}{2} \vartheta l = M_p (\vartheta + 2 \vartheta + \vartheta)$$

$$P_p = \frac{8 M_p}{l}$$

verschwinden muss. Wählt man nun die virtuelle Verschiebung bewusst so, dass innere Arbeit A ; nur an den Stellen geleistet wird, in denen sich plastische Gelenke ausgebildet haben, daher der Wert des Biegemomentes bekannt ist, dann liefert das Prinzip auf sehr einfache Weise die Grösse der Traglast P_p . Die virtuelle Verschiebung sei durch den strichlierten Linienzug dargestellt, so dass sich Rotationen in den Punkten (2) und (4) von der Grösse ϑ und an der Stelle (3) von 2ϑ ergeben. Die Einsenkung der Last P_p beträgt entsprechend $\vartheta l/2$. Somit ist die innere Arbeit:

$$(8) \quad A_i = -\vartheta M_p - 2\vartheta M_p - \vartheta M_p$$

Das negative Vorzeichen für die Glieder der rechten Seite von Gl. (8) röhrt davon her, dass die Rotation gegen den Wirkungssinn von M_p erfolgt. Die äussere Arbeit setzt sich zusammen aus dem Produkt der Last P_p und dem Weg $\vartheta l/2$ oder:

$$(9) \quad A_a = P_p \vartheta l/2$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebung folgt nun

$$(10) \quad A_a = -A_i$$

Somit: $P_p \vartheta l/2 = 4 \vartheta M_p$, schliesslich:

$$(11) \quad P_p = 8 M_p/l$$

Es ist zu beachten, dass wenn das Prinzip in Form der Gleichung (10) angeschrieben wird, alle Glieder der rechten Seite immer einen positiven Wert haben, solange die virtuelle Verschiebung so gewählt wird, dass innere Arbeit nur in den plastischen Gelenken geleistet wird.

Das Resultat (11) bestätigt den schon gefundenen Wert für die Traglast P_p . Es sei noch festgestellt, dass P_p unabhängig von der Grösse der Seitenöffnungen kl ist. Selbstverständlich hängt aber die Grösse der Durchbiegung direkt von diesem Verhältnis ab. Auf diesen Punkt wird später bei der Besprechung von Versuchsresultaten noch weiter eingegangen werden.

Zusammenfassend zeigt es sich, dass eine plastische Lösung folgende drei Bedingungen erfüllen muss:

1. Gleichgewicht

2. Plastizitätsbedingung, d. h. in keinem Schnitt darf das Biegemoment M den plastischen Biegewiderstand M_p überschreiten:

$$(12) \quad |M| \leq M_p$$

3. Mechanismusbedingung, d. h. es muss sich eine genügende Anzahl plastischer Gelenke aussgebildet haben, so dass das ganze Tragwerk oder nur ein Teil davon zu einem Mechanismus reduziert ist.

Zur dritten Bedingung sei noch bemerkt, dass früher oft die Forderung aufgestellt wurde, ein n -fach statisch unbestimmtes Tragwerk müsse $(n+1)$ plastische Gelenke aufweisen, bis die Traglast erreicht sei. Es ist aber leicht einzusehen, dass im eben behandelten Beispiel das Hinzufügen von weiteren Öffnungen links und rechts den Mechanismus (drei plastische Gelenke) und damit die Traglast nicht verändern wird. Es ist durchaus möglich, dass sich nur ein lokaler Mechanismus entwickelt.

Beispiel 2

Der Rahmen gemäss Bild 15 hat zwei Stützen mit einem Biegewiderstand M_p und einen Riegel mit dem Widerstand $3 M_p$. Es wird angenommen, dass die angebrachte horizontale und vertikale Belastung den in Bild 15 (b) gezeigten Mechanismus mit plastischen Gelenken in den Punkten (1), (3), (5) und (6) erzeugt. Zur Bestimmung der Traglast ist die virtuelle Verschiebung mit dem Parameter ϑ gewählt worden. Die entsprechenden Rotationswinkel und Verschiebungen sind im Bild eingetragen. Somit lässt sich sowohl die äussere wie innere Arbeit berechnen.

$$A_a = -A_i$$

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \frac{1}{2} P_p \vartheta l + P_p \vartheta l + P_p \frac{1}{2} \vartheta l + \frac{1}{2} P_p \vartheta l = \\
 \text{Last} \quad & (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \\
 & = M_p \vartheta + 3 M_p \frac{3}{2} \vartheta + M_p \frac{3}{2} \vartheta + M_p \vartheta \\
 \text{Gelenk} \quad & (1) \quad (3) \quad (5) \quad (6) .
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(14) \quad P_p = \frac{16}{5} \frac{M_p}{l}$$

Das zugehörige Momentendiagramm lässt sich leicht berechnen, da das System dank der Gelenke statisch bestimmt geworden ist. Wie Bild 15 (c) zeigt, sind alle Momente kleiner oder gleich dem Wert des plastischen Biege widerstandes, d. h. die Plastizitätsbedingung ist erfüllt. Da ferner auch das Gleichgewicht und die Mechanismusbedingung erfüllt sind, entspricht die angenommene Lösung der tatsächlichen Lösung. Wäre zum Beispiel anfänglich ein plastisches Gelenk im Schnitt (4) statt (3) gewählt worden, so hätte die Rechnung einen grösseren Wert für die Traglast geliefert. Anderseits hätte aber die Kontrolle des Biegemomentes im Schnitt (3) einen Wert grösser als $3 M_p$ ergeben. Somit wäre diese Annahme als Lösung ausgeschieden. Dieser Sachverhalt kann ganz allgemein formuliert werden und führt zu den sogenannten «Extremal-Sätzen» der plastischen Berechnungsmethoden, auf die hier nur hingewiesen sei ([10] und [6], Seite 6).

Beispiel 3

Zum Schluss sei noch die Anwendung der Methode auf die Berechnung einer Platte, Bild 16, angeführt. Die quadratische Platte ist eingespannt längs dem Rand AC , einfach gelagert längs AB und BD und frei längs CD . Der Wert des plastischen Momentes sei einheitlich über die ganze Platte m_p pro Einheitsbreite (mkg/m). Die gleichmässig verteilte Belastung q wird schliesslich eine Gelenklinien-Figur ausbilden, wie sie im Bild eingezeichnet ist. Es kann gezeigt werden, dass die Gelenklinien (oft auch «Bruchlinien» genannt) Gerade sind und in kinematischer Hinsicht noch weitere Bedingungen erfüllen müssen [11]. Die Lage der Linien ist durch die beiden Parameter ξ und η festgelegt. Nun können für die drei Plattenteile (1) bis (3) drei Gleichgewichtsbedingungen angeschrieben werden. Für Teil (1) wird AC als Bezugssaxe gewählt, damit die Auflagerreaktionen in der Momentengleichgewichtsbedingung nicht auftreten. Der Beitrag des plastischen Momentes längs AC ist $m_p a$, längs der Gelenklinie zwischen (1) und (2) $m_p \eta a$ unter Berücksichtigung der Projektion auf die Bezugssaxe AC , und längs der Linie zwischen (1) und (3) $m_p (1 - \eta) a$. Zusammen mit dem Moment aus dem Lastanteil auf Teil (1) ergibt sich:

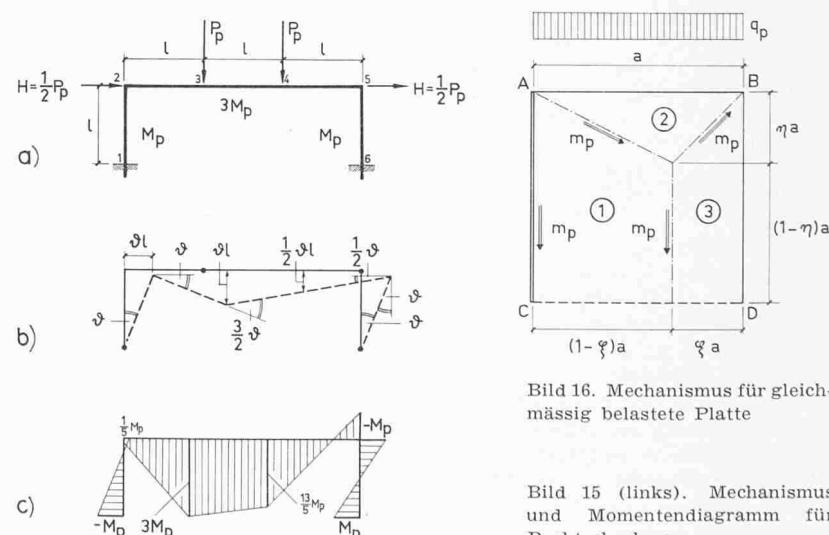


Bild 16. Mechanismus für gleichmäig belastete Platte

Bild 15 (links). Mechanismus und Momentendiagramm für Rechteckrahmen

$$(15) \quad m_p \left[a + \eta a + (1 - \eta) a \right] - \\ - q_p \left[\frac{1}{2} (1 - \xi)^2 a^2 - \frac{1}{3} (1 - \xi)^2 \eta a^2 \right] = 0$$

Analog folgen die beiden Momentengleichgewichtsbedingungen für die Teile (2) um Bezugsaxe *AB* und (3) um *BD*:

$$(16) \quad m_p a - \frac{1}{6} q_p a^3 \eta^2 = 0$$

$$(17) \quad m_p a - q_p a^3 \left[\frac{1}{2} \xi^2 (1 - \eta) + \frac{1}{6} \xi^2 \eta \right] = 0$$

Das System dieser drei Gleichungen mit den drei Unbekannten ξ , η und q_p lässt sich sehr einfach lösen. Daraus folgt der Wert für die Traglast

$$(18) \quad q_p = 18,7 \frac{m_p}{a^2}$$

Der Zweck dieser drei Beispiele war, die Einfachheit des plastischen Berechnungsverfahrens zu zeigen. Natürlich ist für das Verständnis und die richtige Anwendung ein Studium der Grundlagen unentbehrlich. Die Methode ist heute sauber fundiert und verschiedene Verfahren sind ausgearbeitet worden⁵⁾. Aus den angeführten Beispielen kann ersehen werden, dass die Methode durch ihre Einfachheit und anschaulichkeit das wesentliche Verhalten eines Tragwerkes direkt zeigt. Um ihre Leistungsfähigkeit zu beweisen, müssen natürlich die Resultate durch Versuchsergebnisse und Beobachtungen an ausgeführten Tragwerken belegt werden.

Schluss folgt

⁵⁾ Ein ausführliches Literaturverzeichnis findet sich in [6]. Appendix III.

Expressstrassen im Stadtorganismus DK 711.7

Die Diskussion um die Expressstrassen im Stadtorganismus ist nun allenthalben entbrannt. Wie nicht anders zu erwarten war, hat der Aufsatz von H. Marti in Heft 31 dieses Jahrganges unterschiedliche Reaktionen ausgelöst. Direktor Dr. Robert Ruckli verzichtet mit Brief vom 9. August 1961 auf eine Antwort in unserer Zeitschrift. Er verweist auf seinen im Rahmen der Staatsbürgerlichen Gesellschaft in Saas-Fee gehaltenen Vortrag, der nun in Heft 11 der Zeitschrift «Strasse und Verkehr» erschienen ist. In einem Punkte muss er H. Marti entschieden widersprechen: «Ich habe ihm nie das Recht abgesprochen, sich in der SBZ und in der Öffentlichkeit über Städtebau zu äussern, wie er auf Seite 541 am Ende des dritten Absatzes behauptet. Im Gegenteil, ich habe geschrieben: „Es steht ihm (Herrn Marti) frei, sich darüber seine Meinung zu bilden und sie auch öffentlich zu vertreten.“»

An der Tagung des Schweizerischen Autostrassenvereins vom 26. August in Solothurn wurde herumgeboten, Arch. H. Marti kenne Prof. O. Sill in Hamburg gar nicht. Dies gibt uns Anlass zur Veröffentlichung des nachstehenden Briefwechsels.

Hamburg, den 24. August 1961

Sehr geehrter Herr Jegher!

Von Kollegen aus der Schweiz werde ich auf eine Diskussion in Ihrer Zeitschrift unter dem Stichwort: «Machen Sie diesen Blödsinn nicht» aufmerksam gemacht. Ausgelöst wurde die Diskussion durch einen Aufsatz unter dieser Ueberschrift von Herrn Hans Marti, der im Heft 19 vom 11. Mai 1961 erschienen ist. In diesem Aufsatz wird mein Name genannt und mir u. a. der obengenannte Satz in den Mund gelegt. Ich sehe mich daher genötigt, hierzu wie folgt Stellung zu nehmen:

Wie ich inzwischen festgestellt habe, sass ich im April d. J. bei einem Essen aus Anlass des Besuches einer zürcherischen Gemeinderatskommission in Hamburg neben Herrn Hans Marti. Im Verlaufe des Tischgesprächs erzählte mir Herr Marti, in der Schweiz würde man die geplanten Auto-

bahnen, die unseren Bundesfernstrassen entsprächen, überall mitten durch die Städte planen, und fragte, ob ich mir eine solche Lösung vorstellen könne. Soweit ich mich bis jetzt erinnere, erwiederte ich hierauf, dass ich das schweizerische Nationalstrassenprogramm nicht kenne und deshalb dazu nichts zu sagen vermöchte; in Deutschland seien wir im Gegensatz zu den ersten Autobahnplanungen in der Vorkriegszeit (z. B. Berliner und Münchner Autobahnring) heute bestrebt, die Bundesautobahnen möglichst nahe an den Kern der grossen Städte heranzuführen. Es sei bei uns aber im Hinblick auf den schnellen Personenwagen- und den schweren Lastwagenverkehr auf den Bundesautobahnen nicht denkbar, diese Bundesfernstrassen mitten durch die Stadtkerne zu führen. Ich muss aber ausdrücklich erklären, dass ich weitere Ausführungen in der in diesem Aufsatz wiedergegebenen Form und Art über Verkehrspläne in der Schweiz, die ich überhaupt nicht kenne, niemals gemacht habe.

Aus diesem Anlass habe ich auch die Entgegnungen zu den Worten von Hans Marti über die Expressstrassen unter der selben Ueberschrift, erschienen im Heft 23 vom 8. Juni 1961, und die weitere Stellungnahme von Hans Marti unter der Ueberschrift «Expressstrassen im Stadtorganismus», erschienen im Heft 31 vom 3. August 1961, durchgesehen und daraus entnommen, dass bei Ihnen in der Schweiz die selbe heftige Auseinandersetzung im Gange ist, wie sie fast überall entbrennt, wenn es darum geht, die Lösung der schwierigen Verkehrsprobleme in unseren eng besiedelten Städten anzupacken. Das beweist aber nur wieder einmal, wie außerordentlich schwer es ist, den Stadtverkehr von heute oder gar von morgen vernünftig zu ordnen. Sicher ist, dass es dafür keine Patentlösung gibt, die für jede Stadt passen könnte, sondern es muss in jedem Einzelfall nach dem Abwagen aller Umstände eine optimale Lösung gesucht werden. Sicher ist auch, dass dabei gewisse Beeinträchtigungen an sich berechtigter Interessen nicht zu vermeiden sind. Für mich ist es aber auch ebenso sicher, dass wir keine Zeit mehr haben, die notwendigen verschiedenen Massnahmen nach einer Rang- und Reihenfolge *nacheinander* anzupacken. So wichtig zum Beispiel der öffentliche Personenverkehr für die Stadt, vor allem zur Bewältigung des Berufsverkehrs ist, so geht es dennoch nicht an, etwa den Ausbau des Strassennetzes solange zurückzustellen, bis der öffentliche Personenverkehr vielleicht eines Tages überall eigene Verkehrswege (z. B. Hoch- oder Untergrundbahnen) bekommen hat. Der gesamte Stadtverkehr, also auch der öffentliche Personenverkehr, würde sonst schon lange vorher völlig erliegen.

So sind wir z. B. in Hamburg gezwungen, *gleichzeitig* das Netz der Stadtstrassen nicht nur zu unterhalten und instandzusetzen, sondern auch durch Ausbau entscheidend zu verbessern, das Netz unserer Schnellbahnen für den öffentlichen Personenverkehr (S-Bahn und U-Bahn) planmäßig auszubauen und den Bau eines weitmaschigen Netzes von Stadtautobahnen und den Bau eines weitmaschigen Netzes von Expressstrassen) als Verbindung zu den Bundesfernstrassen und zur Entlastung unserer Stadtstrassen vom Binnenverkehr mit längeren Fahrwegen vorzubereiten und anzufangen.

Daneben gilt es, durch vernünftige städtebauliche Ordnung der Bebauung, und zwar sowohl in den Wohn-, Geschäfts- wie Arbeitsgebieten dafür zu sorgen, dass eine allzugrosse Ballung der Verkehrsströme auf einzelnen Verkehrswegen oder in einzelnen Stadtzentren vermieden wird. Dazu gehört vor allem auch eine Beschränkung der baulichen Ausnutzung von Grundstücken in den Baugebieten.

Wirtschaft und Verkehr einer Stadt können also auf die Dauer nur gewährleistet sein, wenn nicht nur ein neuzeitlicher Ausbau der Verkehrswege, sondern auch eine verkehrsgerechte Ordnung der Bebauung erfolgt.

Im Hinblick auf die Erwähnung meines Namens im eingangs genannten Aufsatz möchte ich Sie bitten, meine vorstehende Auseinandersetzung in Ihrer Zeitschrift zu veröffentlichen.

Mit freundlichen Grüissen

Otto Sill,

Erster Baudirektor der Freien
und Hansestadt Hamburg