

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 79 (1961)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Cinématique des erreurs de profil dans les engrenages  
**Autor:** Tordion, Georges V.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65488>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Zellen sind zur Kontrolle begehbar. Die Pylonen werden 207,26 m über den mittleren Meeresspiegel ragen und 198,35 m ab Oberkante Fundament, welches aus Beton mit Granitverkleidung besteht.

Zur Abklärung der Tragfähigkeit, Art und Grösse der Fundamente wurde mit den ersten Studien im Jahre 1954 bei jedem Fundament eine Bohrung bis in den festen Felsen durchgeführt. Es zeigte sich, dass der Felshorizont 50 bis 100 m unter dem Meeresspiegel liegt. Gegen die Mitte der Spannweite fällt er dann steil in unbekannte Tiefen ab. Oberhalb dem angetroffenen Felsen (Gneis) fand man verschiedene Schichten von weichen bis festen Tonen, Sanden und Kies. Direkt oberhalb des gesunden Felsens lag eine Schicht von zersetztem Fels. Auf Grund dieser Ermittlungen wurden dann Vergleichsstudien und Kostenuntersuchungen zusammengestellt. Im Jahre 1956 hat man dann noch zusätzlich 28 Bohrungen und Bodenuntersuchungen durchgeführt, welche im allgemeinen die geologischen Befunde bestätigten und einen endgültigen Entwurf über Typ und Tiefe der Fundament zuließen.

Das Fundament des Staten-Island-Pylons besteht aus einem offenen Caisson  $70 \times 40$  m, welcher auf eine trag-

fähige Schicht von glazialen Ton rd. 40 m unter Meeresspiegel abgesenkt wird (Bild 6). Für den Brooklyn-Pylon wurden zwei verschiedene Fundationsarten entwickelt. Einerseits prüfte man einen analogen, offen ausgebagerten Caisson wie auf der Gegenseite, welcher auf eine Tiefe von 60 m unter dem Meeresspiegel auf tragfähige Schichten abgestellt werden konnte. Andererseits untersuchte man die Möglichkeit eines untiefen, offen ausgebagerten Caissons auf 36 Stahlpfählen, welche in den festen Fels gerammt wurden. Die Offerten ergaben, dass der tiefliegende Caisson wirtschaftlicher ist (Bild 7).

Die Hängeseile werden auf jeder Seite in dreieckig geformten, massiven Ankerblöcken verankert (Bild 8). Die Verankerung auf Staten Island wird relativ hoch zu liegen kommen, doch sind infolge der günstigen Bodenverhältnisse nur einfache gespreizte Fundamente in einer mittleren Tiefe von 23 m notwendig. Der Ankerblock auf Seite Brooklyn muss sogar nur auf 16 m Tiefe fundiert werden. Die Fundamentfläche der beiden Ankerblöcke beträgt rd.  $70 \times 100$  m.

Adresse des Verfassers: Urs Widmer, dipl. Ing., Turmstr. 39, Winterthur.

## Cinématique des erreurs de profil dans les engrenages

Par Georges V. Tordion, professeur à l'université Laval, Québec, Canada

DK 621.833

Les différents procédés de taille des engrenages à développante de cercle reproduisent le profil des dents avec plus ou moins de précision. L'erreur de la forme de la développante se mesure aisément sur des appareils spéciaux. Les enregistrements graphiques ainsi obtenus montrent l'erreur comme une déviation d'une ligne droite qui représente l'image de la développante parfaite. L'agrandissement est suffisant pour permettre de déceler des erreurs aussi petites qu'un micron. Les fig. 1a et 1b montrent des tracés de ce type. L'erreur est mesurée sur la normale à la développante (tangente au cercle de base  $R$ ) en fonction de l'angle de déroulement  $\gamma$ , ou plus rarement en fonction de la longueur d'arc  $s$  de la développante. Les deux sont reliés par l'expression

$$(1) \quad S = \frac{R}{2} \gamma^2$$

Quand deux profils imparfaits sont en contact, leur erreur empêche les engrenages de se trouver dans une position angulaire correcte. Quand le point de contact se déplace le long du profil, l'erreur angulaire de position varie en fonction de la distribution des erreurs sur le profil. L'angle de rotation de la roue n'est plus une fonction linéaire de l'angle de rotation du pignon. Ainsi le rapport de vitesse

$$(2) \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \rho(\varphi_1)$$

devient une fonction arbitraire de  $\varphi$ , au lieu d'être une constante (fig. 2). En dérivant (2) par rapport au temps on obtient

$$(3) \quad \ddot{\varphi}_2 = \rho(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1^2 \frac{d\rho}{d\varphi_1}$$

On remarque que même pour une vitesse constante du pignon  $\ddot{\varphi}_1 = 0$ , le terme  $\frac{d\rho}{d\varphi_1}$  subsiste. Avec les masses en rotation ce terme produit des forces additionnelles «dynamiques» sur les dents, accompagnées de vibrations, fatigue et usure prématurée. L'intervention de la déformation des dents sous charge et du contact simultané de deux paires de dents rend le calcul des forces dynamiques très difficile et des recher-

ches intensives dans plusieurs pays n'ont pas encore abouti à des résultats définitifs et concordants. Cependant, les engrenages qui ne transmettent pas de puissance et dans lesquels la déformation est négligeable, ont des applications de plus en plus nombreuses et variées. Les différents mécanismes de servos, calculateurs, instruments etc. demandent une précision de plus en plus poussée, et surtout une précision dans la position angulaire. Ce travail est consacré à ce type d'engrenages. Il établit la relation mathématique entre l'erreur de position d'un couple d'engrenages à denture droite en fonction de la distribution arbitraire des erreurs des profils. Ces distributions  $\varepsilon_1(\gamma_1)$  et  $\varepsilon_2(\gamma_2)$  sont données sur les enregistrements graphiques. Les calculs se limitent aux cas où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des fonctions continues, ayant les deux premières dérivées continues, la seconde dérivée ne changeant pas de signe. Cette limitation n'est pas très sévère, car les engrenages de qualité la satisfont généralement. Comme convention  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  seront positifs quand ils épaississent les dents.

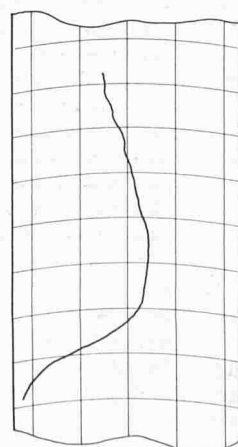


Fig. 1a

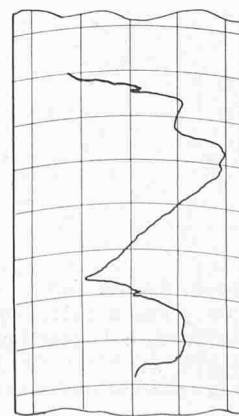


Fig. 1b

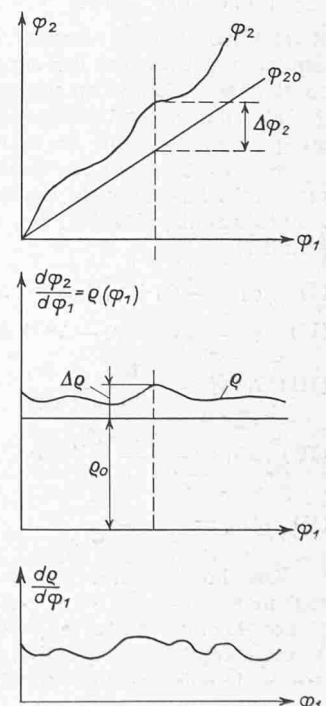


Fig. 2

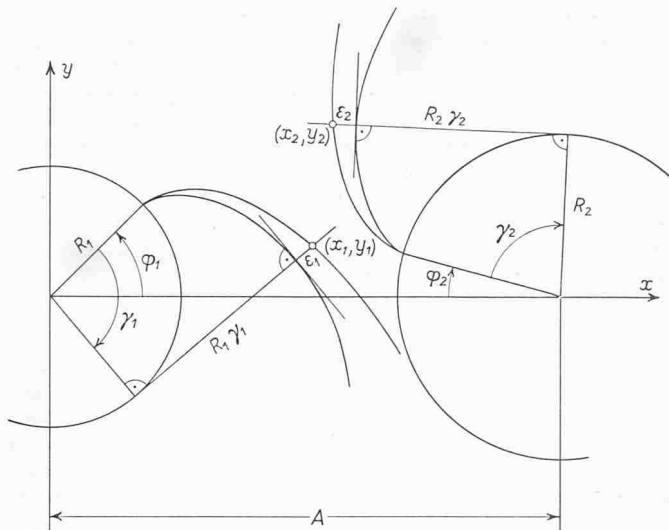


Fig. 3

Les coordonnées  $x_1$  et  $y_1$  d'un point sur le profil imparfait du pignon sont (fig. 3):

$$(4) \begin{cases} x_1 = R_1 \cos(\varphi_1 - \gamma_1) - (R_1 \gamma_1 + \varepsilon_1) \sin(\varphi_1 - \gamma_1) \\ y_1 = R_1 \sin(\varphi_1 - \gamma_1) + (R_1 \gamma_1 + \varepsilon_1) \cos(\varphi_1 - \gamma_1) \end{cases}$$

Les coordonnées  $x_2$  et  $y_2$  d'un point sur le profil imparfait de la roue sont:

$$(5) \begin{cases} x_2 = A - R_2 \cos(\varphi_2 + \gamma_2) - (R_2 \gamma_2 + \varepsilon_2) \sin(\varphi_2 + \gamma_2) \\ y_2 = R_2 \sin(\varphi_2 + \gamma_2) - (R_2 \gamma_2 + \varepsilon_2) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) \end{cases}$$

$\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les paramètres qui déterminent la position du point de contact sur les profils, et  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont les variables qui déterminent la position angulaire des engrenages. Dans ces formules  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des fonctions connues des  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Le problème mathématique se pose de la façon suivante: il faut trouver la fonction  $\varphi_2 = f(\varphi_1)$  en respectant les conditions de contact et d'une tangente commune:

$$(6) \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2 \\ \frac{\partial y_1}{\partial \gamma_1} : \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial y_2}{\partial \gamma_2} : \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_2} \end{cases}$$

Il est impossible de résoudre ce problème rigoureusement et explicitement à cause des expressions transcendentes qu'elles contiennent. Mais si on néglige systématiquement toutes les grandeurs de second ordre on arrive à un système d'équations qui permet le calcul de la fonction recherchée  $\varphi_2 = f(\varphi_1)$  même si  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des fonctions empiriques. Le développement très laborieux de ces équations est omis ici, seul les résultats sont présentés: ( $\theta_0$  angle de pression dans le point primitif)

$$(I) \quad \varphi_1 = -\theta_0 + \gamma_1 + \Delta\theta - \Delta\theta_1$$

$$(II) \quad \varphi_2 = \theta_0 - \gamma_2 - \Delta\theta + \Delta\theta_2$$

$$(III) \quad \Delta\theta = \frac{1}{A \sin \theta_0} \left[ \frac{d\varepsilon_1}{d\gamma_1} + \frac{d\varepsilon_2}{d\gamma_2} \right]$$

$$(IV) \quad \Delta\theta_1 = \frac{1}{R_1 \gamma_1} \frac{d\varepsilon_1}{d\gamma_1}$$

$$(V) \quad \Delta\theta_2 = \frac{1}{R_2 \gamma_2} \frac{d\varepsilon_2}{d\gamma_2}$$

On choisit comme variable indépendante l'angle de déroulement  $\gamma_1 = \gamma_{10}$ , c'est-à-dire un point sur le profil du pignon. L'index «0» se rapporte aux valeurs du profil parfait. Avant d'appliquer le système des équations (I) ÷ (V) il faut trouver le point  $\gamma_2$  sur le profil de la roue qui sera en contact avec le point choisi  $\gamma_{10}$ . Si la développante était parfaite le contact se ferait dans un point  $\gamma_{20}$  donné par

$$(VI) \quad \gamma_{20} = (1 + \rho) \operatorname{tg} \theta_0 - \rho_0 \gamma_{10}$$

Le point de contact  $\gamma_2$  de la développante imparfaite sera très voisin de  $\gamma_{20}$  et se calcule comme

$$(VII) \quad \gamma_2 = \gamma_{20} + \Delta\gamma_2$$

$\Delta\gamma_2$  étant l'accroissement donné par

$$(VIII) \quad \Delta\gamma_2 = -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{R_2}$$

où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont des abréviations pour les expressions suivantes:

$$(IX) \quad \Gamma_1 = \varepsilon_1 + \left[ \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_0} - \frac{1}{\gamma_{10}} \right] \frac{d\varepsilon_1}{d\gamma_{10}}$$

$$(X) \quad \Gamma_2 = \varepsilon_2 + \left[ \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_0} - \frac{1}{\gamma_{20}} \right] \frac{d\varepsilon_2}{d\gamma_{20}}$$

En connaissant  $\gamma_2$  pour chaque  $\gamma_{10}$ , on peut calculer toutes les grandeurs entrant dans les équations (I) ÷ (V), autrement dit, on trouve  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . L'angle  $\varphi_1$  n'est pas identique à  $\varphi_{10}$ , car le point de départ du calcul n'est pas la position du pignon mais un point sur son profil, et il est clair que pour le même point le pignon aura des positions différentes suivant s'il y a erreur ou non. Vu que pour les engrenages parfaits les relations entre les angles de position et les angles de déroulement s'expriment par

$$(XI) \quad \begin{cases} \varphi_{10} = -\theta_0 + \gamma_{10} \\ \varphi_{20} = \theta_0 - \gamma_{20} \end{cases}$$

on obtient les erreurs de position comme la différence entre la position réelle et celle des engrenages parfaits

$$(XII) \quad \begin{cases} \Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_{10} \\ \Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_{20} \end{cases}$$

L'erreur relative  $\Delta\varphi$  se trouve finalement comme étant égale à

$$(XIII) \quad \Delta\varphi = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$$

Le système de formules qui vient d'être discuté peut être linéarisé davantage et on obtient des formules très simplifiées, triviales même:

$$(XIV) \quad \Delta\varphi = \frac{\varepsilon_1(\gamma_{10}) + \varepsilon_2(\gamma_{20})}{R_2}$$

$$(XV) \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{R_1} \frac{d\varepsilon_1}{d\gamma_{10}} - \frac{1}{R_2} \frac{d\varepsilon_2}{d\gamma_{20}}$$

Ici on peut prendre les valeurs de  $\gamma_{10}$  et  $\gamma_{20}$  qui se correspondent suivant la relation valable pour les profils parfaits [eq. (VI)]. La formule triviale escamote complètement la géométrie réelle du contact entre deux profils imparfaits: elle ne donne ni le déplacement du point de contact sur le profil de la roue ni l'influence de la dérivée de la fonction des erreurs. De là l'intérêt des formules complètes. De nombreux cas numériques calculés par l'auteur ont cependant montré, que les résultats obtenus avec les formules triviales ne diffèrent que de quelques pourcents des valeurs exactes, ce qui justifie pleinement leur emploi dans la pratique courante.

La nouvelle théorie établie permet de tirer des conclusions quantitatives exactes en partant des enregistrements graphiques des erreurs de profil. Généralement dans les indications des tolérances pour l'erreur de profil, on trouve seulement l'erreur maximum à ne pas dépasser. Il serait hautement recommandable d'y inclure aussi la valeur maximum de la pente (première dérivée), car cette grandeur influence le rapport de vitesse instantané. Pour obtenir des engrenages de qualité, il serait également recommandable d'exiger un graphique d'erreurs sans points d'inflexions ni «bosses» multiples. Ces dernières rendent la fonction  $\varphi_2 = f(\varphi_1)$  discontinue, ce qui doit être évité dans les engrenages de précision.

Adresse de l'auteur: G. V. Tordion, Directeur, Département de Génie Mécanique, Université Laval, Faculté des Sciences, Québec, Canada.