Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 78 (1960)

Heft: 47

Artikel: Die Grundlagen der dreidimensionalen Photoelastizität: Antrittsvorlesung

Autor: Schumann, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64991

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ORGAN DES SCHWEIZERISCHEN INGENIEUR- UND ARCHITEKTEN-VEREINS S.I.A. UND DER GESELLSCHAFT EHEMALIGER STUDIERENDER DER EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE G.E.P.

Die Grundlagen der dreidimensionalen Photoelastizität

Antrittsvorlesung, gehalten am 18. Juni 1960 an der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich

Von **Walter Schumann,** Laboratorium für Photoelastizität der Eidg. Technischen Hochschule, Zürich

DK 620.171.5

Die Photoelastizität umfasst eine Reihe experimenteller Verfahren zur Bestimmung der Tragfähigkeit von Bau- oder Maschinenteilen, die durch irgendwelche Kräfte beansprucht sind. Um zunächst ihre Bedeutung für das Ingenieurwesen zu zeigen, seien zur Einführung einige elementare Tatsachen aus der Statik kurz erwähnt.

Die Tragfähigkeit einer Konstruktion hängt bekanntlich einerseits von der Festigkeit des verwendeten Materials, anderseits von der Grösse und der Verteilung der inneren Spannungen ab, welche durch die von aussen wirkenden Kräfte entstehen. Diese Spannungen, die in Form von Druck, Zug oder Schub auftreten können, sind dabei definiert als diejenigen Kräfte pro Flächeneinheit, die im Innern von benachbarten Teilchen infolge des Zusammenhangs des Materials aufeinander ausgeübt werden. Fordert man etwa wie üblich, das nirgends eine bleibende Veränderung infolge plastischen Fliessens eintritt, so müssen in jedem Punkt die Spannungen, beziehungsweise gewisse Kombinationen von ihnen, unterhalb eines bestimmten kritischen Wertes bleiben. Der Ingenieur muss also den gesamten elastischen Spannungszustand ermitteln, wozu ihm eine Anzahl rechnerischer Methoden zur Verfügung stehen, die entweder auf der gewöhnlichen Festigkeitslehre oder auf der Elastizitätstheorie beruhen.

Die Festigkeitslehre ist relativ leicht zu handhaben, darf aber genau genommen nur auf Systeme von dünnen, höchstens schwach gekrümmten Stäben angewandt werden, wie sie zum Beispiel in Fachwerken auftreten, und bei denen also zwei Dimensionen klein sind gegenüber der dritten. Der einfache Aufbau der Festigkeitslehre rührt von diesen Voraussetzungen her; denn an Stelle der im allgemeinen Fall notwendigen Betrachtung des Gleichgewichtes und der Verformung jedes einzelnen Elementes genügt es, jeden Querschnitt als Ganzes zu untersuchen und mit den globalen Grössen wie Momenten, Quer- und Normalkräften zu operieren. Dieses Vorgehen sowie der nachher zu vollziehende Uebergang zu den Spannungen am einzelnen Element wird durch die vereinfachende Hypothese von *Bernoulli-Navier* über den linearen Verlauf der Formänderungen in jedem Querschnitt ermöglicht, weshalb man mit einem ganz einfachen System von Gleichungen auskommt. Wegen dieses Vorteils wird die im Grunde genommen eindimensionale Theorie auch gelegentlich dort verwendet, wo die Voraussetzungen der Dimensionsverhältnisse nur teilweise erfüllt sind, dann allerdings mit dem Nachteil einer mehr oder weniger schlechten Annäherung. Für kleine Tragwerke, bei denen der Materialaufwand eine sekundäre, der Zeitaufwand dagegen eine primäre Rolle spielt, wo es also gleichgültig ist, wenn die Tragfähigkeit etwas unterschätzt wird, mag man sich damit begnügen. Handelt es sich aber um grosse Bauwerke von ausgedehnter Spannweite oder um Leichtkonstruktionen, wie sie etwa bei Flugzeugen vorkommen, bei denen jedes überflüssige Gewicht eine entsprechende Herabsetzung des Aktionsradius zur Folge hat, wird man der genauen Spannungsbestimmung besondere Aufmerksamkeit schenken.

In solchen Fällen ist dann neben den allgemeinen wichtigen Methoden der Baustatik die Elastizitätstheorie am Platz, die an keine einschränkenden Voraussetzungen bezüglich Dimensionsverhältnissen gebunden ist. Dieser Theorie liegt aber ein viel komplizierteres System von Beziehungen zu Grunde als bei der Festigkeitslehre, nämlich eine Anzahl partieller Differentialgleichungen mit entsprechenden Randbedingungen, die durch die Form der betreffenden Teile und die Lage der äusseren Kräfte gegeben werden. Strenge Lösungen in Form mathematisch geschlossener Ausdrücke sind jedoch für solche Randwertprobleme nur in ganz wenigen Fällen gefunden worden.

Um nun doch allgemeinere Probleme lösen zu können, wie sie in der Praxis vorkommen, wurden einerseits systematisch numerische, nicht an spezielle Beispiele gebundene Methoden im Rahmen der angewandten Mathematik entwickelt, bei denen die modernen Rechenautomaten wegen der praktisch beliebig erreichbaren Genauigkeit unter gleichzeitiger Zeitersparnis mit Erfolg verwendet werden können, anderseits sind Verfahren aufgestellt worden, bei denen die Spannungen mit einem Experiment an einem verkleinerten Modell gemessen werden. Ein wichtiger Vorteil von Experimenten gegenüber dem Aufsuchen von exakten Lösungen — Aehnliches gilt übrigens auch für allgemeine numerische Verfahren — liegt darin, dass die Schwierigkeiten für alle Aufgaben mit geringen Unterschieden die selben sind, wenn wir von der Frage der Modellherstellung absehen. Hat man daher einmal die Anfangsschwierigkeiten einer Messmethode überwunden, so kann grundsätzlich jeder Fall erfasst werden, wie kompliziert auch immer die Berandung sein mag.

Neben dieser Aufgabe dient aber die experimentelle Spannungsbestimmung auch noch dazu, Anregungen für neue Theorien ausserhalb des elastischen Bereiches zu geben und bestehende Theorien in allen möglichen Fällen zu überprüfen, da diese ja stets nur eine mehr oder weniger gute Annäherung an die Wirklichkeit darstellen.

Für diese experimentelle Spannungsanalyse gibt es nun eine ganze Anzahl verschiedener Methoden, je nach den dabei verwendeten physikalischen Effekten. Im Grunde genommen handelt es sich dabei um Messverfahren, die in erster Linie die Formänderungen — also Dehnungen und Schiebungen — oder Verschiebungen liefern, sei es mit mechanischen, optischen oder elektrischen Mitteln. Bei einem elastischen Körper — mit welchem Typus wir uns von jetzt an ausschliesslich befassen wollen — hängen aber die Formänderungen linear mit den Spannungen durch das verallgemeinerte *Hookesche* Gesetz zusammen, so dass sich auch eine entsprechende Abhängigkeit zwischen den Messgrössen und den Spannungen ergibt.

Bevor von gemessenen Spannungen in einem Modell auf die gesuchten Spannungen in der Hauptausführung geschlossen werden darf, muss man sich überlegen, ob mit genügender Genauigkeit eine Aehnlichkeit zwischen dem kleinen und dem grossen Zustand vorhanden ist, die diese Uebertragung ermöglicht. Wir würden zunächst eigentlich vermuten, die Spannungszustände im Modell und in der Hauptausführung seien wesentlich verschieden voneinander, da ja im allgemeinen das Modell nicht aus dem gleichen Material hergestellt werden kann wie die wirkliche Ausführung. Es kann aber gezeigt werden, dass unter der Voraussetzung linearer Elastizität, kleiner Verformungen und bei homogenem, isotropem Werkstoff die Unterschiede der beiden Zustände geringfügig sind, da das einzige hiefür massgebende Aehnlichkeitsgesetz

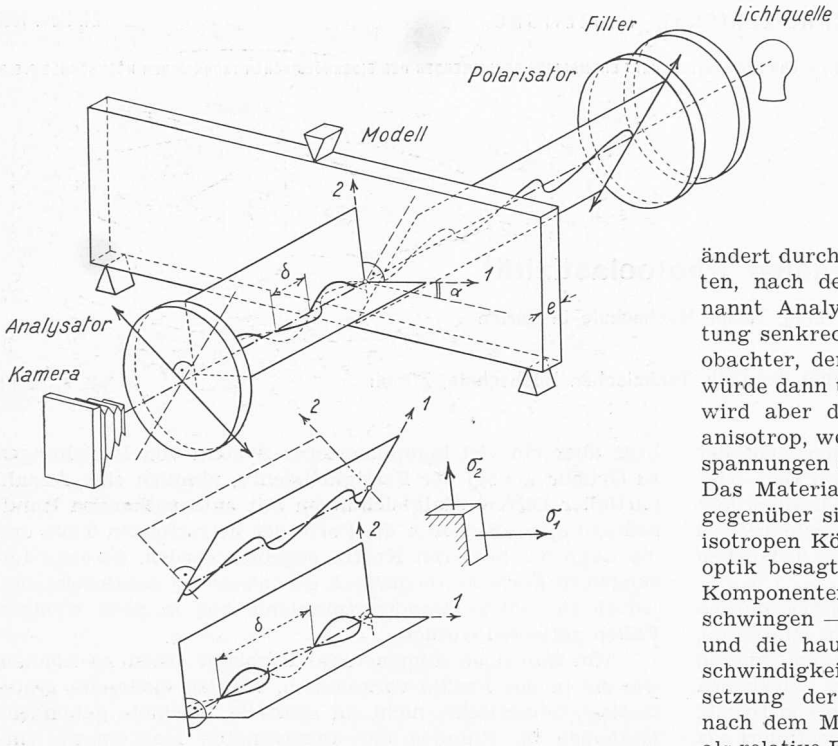

Bild 1. Schema des Strahlenganges für einen ebenen spannungsoptischen Versuch

annähernd erfüllt ist. Bei den in der Praxis oft auftretenden Fällen von inhomogenen Bauwerken, wie etwa im grossen bei einer Staumauer, die sich zum Beispiel auf einen Fels von niedrigerem Elastizitätsmodul abstützt, oder im kleinen bei armiertem Beton, müssen selbstverständlich die gleichen Elastizitätsverhältnisse im Modell reproduziert werden, soll auch dann noch die mechanische Aehnlichkeit bestehen.

Nach dieser Einleitung über die Modellversuche wollen wir uns jetzt ausschliesslich mit denjenigen Messmethoden befassen, bei denen durchsichtige Modelle mit polarisiertem Licht durchstrahlt werden. Diese Methoden reiht man unter den Begriffen Spannungsoptik oder Photoelastizität ein, da es sich hierbei um die Ausnützung eines Effektes zwischen optischen Grössen und Spannungen handelt. Bild 1 zeigt am Beispiel eines dünnen Balkens, den wir uns aus einem homogenen, isotropen und durchsichtigen Stoff hergestellt denken, wie der spannungsoptische Effekt entsteht. Der scheibenförmige Balken sei durch Kräfte am schmalen Rand belastet, die sämtlich in der Mittelebene der Scheibe wirken sollen. Dann liegen auch alle massgebenden inneren Spannungen parallel zu dieser Ebene; es handelt sich daher um den Spezialfall eines ebenen Spannungszustandes. Die Beanspruchung in jedem Punkt eines solchen Zustandes wird bekanntlich durch die zwei Hauptspannungen σ_1, σ_2 und deren Richtungen charakterisiert, die senkrecht aufeinander stehen. Diese beiden Grössen beschreiben zusammen mit dem Winkel α, den etwa σ_1 mit einer festen Richtung bildet, den Zustand vollständig, weil aus ihnen alle übrigen Spannungen im betreffenden Punkt für anders orientierte Flächenelemente berechnet werden können, so dass also der Spannungszustand durch drei Grössen gegeben wird. Anschaulich versteht man übrigens die Bedeutung von σ_1, σ_2 sehr leicht, wenn man beachtet, dass sie dem Betrag und der Richtung nach die extremale Beanspruchung geben, denn die absolut grössere von beiden ist die maximale Spannung an dieser Stelle. Ausserdem kommen beide in der Fliessbedingung vor, die ja für die Festigkeit massgebend ist.

Stellen wir uns jetzt weiter vor, ein monochromatischer und polarisierter Lichtstrahl durchquere die Scheibe senkrecht an der Stelle, wo wir die Spannungen messen wollen. Monochromatisches oder einfarbiges Licht erhält man etwa aus Quecksilberlicht, indem man dieses ein Farbfilter passieren lässt, das vom gesamten Spektrum nur die gewünschte Farbe, zum Beispiel grün, durchgehen lässt, während der Rest vernichtet wird. Das Licht werde ferner durch ein entsprechendes Filter polarisiert, das wir hier Polarisator nennen, und das von allen transversalen Lichtschwingungen nur eine, für eine bevorzugte Richtung, durchtreten lässt, wogegen der übrige Teil absorbiert wird. Wäre nun das Modell unbelastet, so würde das so präparierte Licht unverändert durch die Scheibe hindurchgehen und von einem zweiten, nach dem Modell aufgestellten Polarisationsfilter, genannt Analysator, gelöscht, wenn dessen bevorzugte Richtung senkrecht zu derjenigen des Polarisators steht. Ein Beobachter, der vom Analysator her gegen das Modell schaut, würde dann überhaupt kein Licht sehen. Durch die Belastung wird aber der ursprünglich isotrope Stoff im allgemeinen anisotrop, weil infolge der Verschiedenheit der beiden Hauptspannungen eine Bevorzugung gewisser Richtungen entsteht. Das Material wird zu einer Art künstlichem Kristall, demgegenüber sich polarisiertes Licht ganz anders als bei einem isotropen Körper verhält. Der Fundamentalsatz der Kristalloptik besagt nämlich, dass das auftreffende Licht in zwei Komponenten zerlegt wird, die längs den Hauptrichtungen schwingen — das sind hier die Richtungen von σ_1 und σ_2 — und die hauptsächlich den Kristall mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchqueren. Die Folge davon ist eine Versetzung der Knoten der beiden Schwingungskomponenten nach dem Modell gegeneinander um eine Grösse δ, die man als relative Phasenverschiebung bezeichnet. Dieses Phänomen heisst Doppelbrechung, ein Begriff, der von Experimenten mit schief einfallendem Licht herrührt, weil dort die beiden Komponenten infolge der Brechung nicht nur verschiedene Geschwindigkeiten, sondern auch noch verschiedene Strahlrichtungen besitzen, so dass ein Gegenstand schräg durch einen Kristall beobachtet doppelt erscheint. Im vorliegenden Fall des senkrechten Durchlaufens wird die Doppelbrechung nur durch eine Aufhellung nach dem Analysator sichtbar, da das Licht nach dem Modell nicht mehr linear polarisiert ist, und somit auch nicht vom Analysator gelöscht werden kann.

Die künstliche Doppelbrechung bei belasteten, ursprünglich isotropen Körpern wurde von *D. Brewster* im Jahre 1816 entdeckt, womit der Grundstein zur Spannungsoptik gelegt worden war *). Allerdings dauerte es noch fast hundert Jahre, bis dieses Verhalten mit Erfolg praktisch ausgenützt werden konnte, denn zuerst handelte es sich nur um die Feststellung eines optischen Effektes qualitativer Art als Folge der Belastung, während doch für die Spannungsoptik die quantitative Umkehrung, also die praktische Ausnützung des optischen Effektes zur Ermittlung der unbekannten inneren Spannungen massgebend ist. Für uns, die wir heute gewöhnt sind, stets sofort die praktische Seite eines physikalischen Phänomens zu suchen, scheint es daher schwer verständlich, dass es noch so lange gedauert hat, bis die eigentliche Entwicklung der Photoelastizität einsetzte. Man darf aber nicht vergessen, dass das industrielle Zeitalter nur etwa 50 bis 100 Jahre vor 1816 begonnen hatte, und in den Laboratorien noch mehr der Wunsch nach naturwissenschaftlicher Erkenntnis als das Bedürfnis für technische Anwendungen wach war. Ausserdem findet man häufig vor der eigentlichen Blütezeit einer Disziplin eine längere Periode der Pionierarbeit, wie sie tatsächlich auch auf dem Gebiete der Photoelastizität zu finden ist. Bevor nämlich *A. Mesnager* um 1900 in einer fundamentalen Schrift die vollständige Bestimmung eines ebenen Spannungszustandes gab, stellte *F. E. Neumann* schon 1841 eine allgemeine Theorie auf, welche die Abhängigkeit der optisch messbaren Grössen von den Formänderungen auf phänomenalogische Art erklärte. Elf Jahre später veröffentlichte *C. Maxwell* eine entsprechende spannungsoptische Theorie. Die ersten systematischen Messungen und quantitativen Untersuchungen verdanken wir aber *G. Wertheim*, der 1854 zahlreiche Versuche publizierte, und mit dessen Namen wir heute noch das Grundgesetz der Spannungs-

*) Allgemeine Literatur über die Photoelastizität findet der Leser am Ende dieses Aufsatzes.

optik verknüpfen. Dieses Gesetz lässt sich anschaulich sehr leicht aufstellen, wenn man beachtet, dass doch offenbar der optische Effekt um so grösser sein muss, je ausgeprägter die Anisotropie des Materials ist, das heisst je grösser der Unterschied zwischen den beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_2 ausfällt. Der einfachste Zusammenhang zwischen der relativen Phasenverschiebung und der Differenz der Hauptspannungen ist aber der lineare, und daher dürfen wir etwa schreiben

$$\delta = c\,e\,(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{1}$$

wo vor der Klammer als Faktor die Dicke e des Modells steht, da natürlich der Effekt um so grösser ist, je dicker die Scheibe gewählt wird. Schliesslich kommt noch eine Konstante c vor, die von dem gewählten Material und der Wellenlänge des Lichtes abhängt, und die man jeweils an einem Eichstab, in dem die Spannungen bekannt sind, ermittelt.

Fragen wir uns jetzt, wie der spannungsoptische Effekt auf zweckmässige und einfache Weise zur Bestimmung der Hauptspannungsrichtungen und -differenzen im gesamten Modell, und nicht nur an einem Punkt desselben, ausgenützt werden kann. Die Aufhellung nach dem Analysator deutet, wie wir vorher gesehen haben, auf die Anwesenheit von Spannungen, genauer von Spannungsdifferenzen, hin. Nun liegen aber umgekehrt nicht unbedingt keine Spannungen vor, wenn Dunkelheit herrscht. Das Licht kann nämlich auch dann gelöscht werden, wenn zum Beispiel zufälligerweise die Hauptrichtungen mit den ausgezeichneten Richtungen von Polarisator und Analysator zusammenfallen, denn dann bleibt nach dem Modell nur eine der beiden Komponenten des aufgeteilten Lichtstrahles übrig, und das Licht ist somit auch nach der Scheibe linear polarisiert (Bild 1, unten). Es kann aber weiter auch noch Dunkelheit eintreten, wenn zufälligerweise die relative Phasenverschiebung ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge des Lichtes beträgt, weil dann die Knoten der beiden Schwingungskomponenten zusammenfallen, so dass diese wieder zu linear polarisiertem Licht zusammengesetzt gedacht werden können. Ein Spezialfall tritt übrigens auf, wenn die beiden Hauptspannungen gleich gross sind. Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass die Dunkelheit ein Kriterium entweder für das Eintreten gewisser Hauptspannungsrichtungen oder für das Eintreten ganzzahliger Phasenverschiebungen pro Wellenlänge und damit bestimmter Werte der Hauptspannungsdifferenzen ist.

Stellen wir uns jetzt vor, das gesamte Modell werde flächenhaft mit monochromatischem und polarisiertem Licht durchstrahlt, und man erzeuge mit einer Kamera ein Bild des Modells jenseits des Analysators, wie es schematisch in Bild 1 angedeutet worden ist, so werden auf diesem Bild je nach Eintreten der vorher erwähnten Fälle helle und dunkle Stellen erscheinen, die wegen der Kontinuität in Form von Streifen auftreten. Das Feld dieser Streifen liefert uns zwei Sorten von Linien minimaler Lichtintensität (Dunkelheit), erstens solche, auf denen die Hauptspannungsrichtungen parallel und senkrecht zur ausgezeichneten Richtung des Polarisators sind, sie heissen Linien gleicher Neigung oder *Isoklinen*, und zweitens solche, die einen Ort konstanter Hauptspannungsdifferenz darstellen, sie heissen Farbgleichen oder *Isochromaten*. Der Begriff «Farbgleiche» rührt davon her, dass die Streifen bei Verwendung von weissem, also mehrfarbigem Licht infolge der Dispersion in den Komplementärfarben des Spektrums erscheinen. Bild 2a zeigt das Feld der Isochromaten und eine traversierende Isokline für den Fall des Balkens nach Bild 1.

Es bestehen nun eine Reihe optischer und photographischer Kunstgriffe, mit Hilfe derer Isoklinen und Isochromaten getrennt und besser als in Bild 2a dargestellt werden können. Zum Beispiel erhält man bei niedriger Belastung eines Modells aus einem Stoff mit kleiner optischer Doppelbrechung nur die Isoklinen allein, weil dann in keinem Punkt eine Phasenverschiebung erzeugt wird, die grösser als eine Wellenlänge ist, so dass gar keine Isochromate vorkommt (Bild 2b). Solche Isoklinenaufnahmen hat man zur Vollständigkeit für alle möglichen Polarisatorrichtungen auszuführen, um das gesamte Feld der Hauptspannungsrichtungen zu erhalten. Schliesslich gewinnt man das Feld der Isochromaten allein aus einem stark doppelbrechenden Modell, aber unter Verwendung von zirkular polarisiertem Licht, bei dem der Lichtvektor auf einer Schraubenfläche um den Strahl herumdreht. Wie Bild 2c zeigt, erzeugt dieses Licht genau das gleiche Isochromatenbild wie linear polarisiertes, nur dass gar keine Isokline darin vorkommt, weil keine Richtung ausgezeichnet ist. Dies kann auch tatsächlich durch eine genauere optische Betrachtung bewiesen werden.

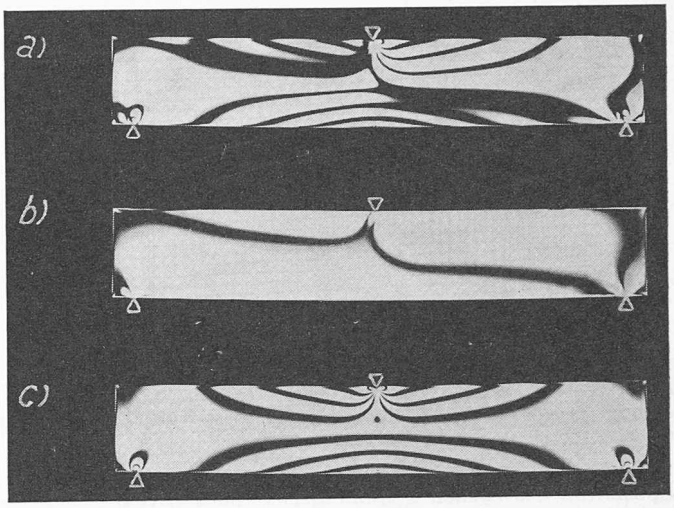

Bild 2. Biegebalken mit zentrischer Einzellast; *a)* Isochromaten und Isokline, *b)* Isokline allein, *c)* Isochromaten allein

Die Aufnahmen veranschaulichen übrigens deutlich, was für ein zweckmässiges Mittel die flächenweise Erfassung des Spannungszustandes mit Hilfe einer Photographie darstellt, denn man erhält schon vor einer genaueren Auswertung eine Uebersicht des Zustandes. Zum Beispiel erscheinen in Bild 2 deutlich Spannungskonzentrationen an den Stellen, wo die äusseren Kräfte wirken, weil in ihrer Umgebung eine Häufung von Isochromaten hoher Ordnung stattfindet. Allerdings darf nicht vergessen werden, dass alle diese Bilder nur Spannungsdifferenzen und Hauptrichtungen, nicht aber die Hauptspannungen selbst geben, so dass also für die drei gesuchten Grössen nur zwei Informationen vorliegen. Diese Tatsache hat auch schon seit Beginn dieses Jahrhunderts Anlass zum Aufsuchen von ergänzenden Messmethoden gegeben, welche die fehlende dritte Information zur Trennung der beiden Hauptspannungen liefern sollen. Heute sind so zahlreiche Verfahren hierfür bekannt, dass ein ebener Spannungszustand eines homogenen isotropen Körpers praktisch kein Problem mehr darstellt.

Immer mehr aber meldete sich aus der Praxis der Wunsch, die Spezialisierung auf zweidimensionale Zustände fallen lassen zu können, aber erst mit *A. G. Solakian* (1935) und *G. Oppel* (1936) wurden die Grundlagen zur dreidimensionalen oder räumlichen Spannungsoptik durch Entdecken des Erstarrungsverfahrens gegeben. Es ist leicht zu verstehen, warum die Photoelastizität so lange auf ebene Zustände beschränkt blieb. Würde man nämlich für ein dreidimensionales Modell die selbe optische Anordnung wie vorher wählen, so würde jeder Lichtstrahl eine endliche Strecke im Innern des Modells durchlaufen, in deren Punkten im allgemeinen ganz verschiedene Spannungen vorliegen. Man erhielte alsdann einen resultierenden optischen Effekt als Summe aller Phasenverschiebungen in den einzelnen Stellen, der keinen Rückschluss auf die Spannungsdifferenzen in jedem Punkt erlauben würde. Da sich nicht nur die Beträge der Spannungen, sondern auch deren Richtungen von Punkt zu Punkt verändern, so dreht sich sogar die Polarisationsebene jedes Lichtstrahles, so dass in Wirklichkeit sehr komplizierte spannungsoptische Gesetze im Globalen vorliegen, die heute noch ein teilweise ungelöstes Problem der theoretischen Untersuchungen im Rahmen der Lichtausbreitung in anisotropen, heterogenen Zuständen darstellen. Im

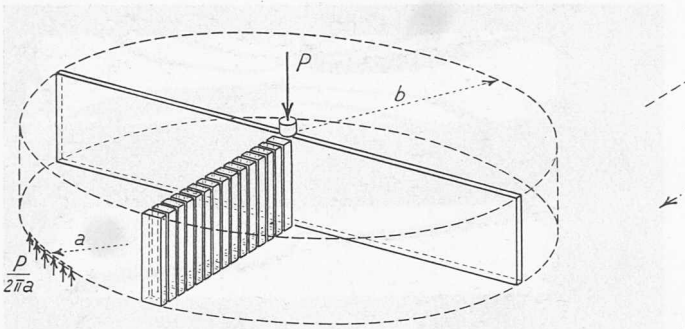

Bild 3. Zerlegung einer zentrisch belasteten, am Rand drehbar gelagerten Kreisplatte nach dem Erstarrungsversuch

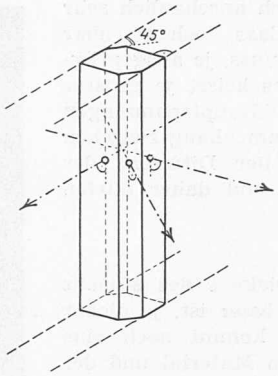

Bild 4. Herstellung eines hexagonalen Schnittes

Spezialfall des ebenen Spannungszustandes tritt dieses Problem nicht auf, da der Lichtstrahl nur auf einer kurzen Strecke mit konstanten Spannungen die Scheibe durchquert. Um dreidimensionale Zustände erfassen zu können, musste daher neben anderen Möglichkeiten ein Verfahren gefunden werden, mit Hilfe dessen jede Stelle im Innern, wo Spannungen gemessen werden sollen, vom Rest des Körpers getrennt werden kann. Nun gibt es heute Kunststoffe, die erlauben, einen durch äussere Lasten verformten, aus ihnen hergestellten Körper zum Erstarren zu bringen, so dass nach Wegnahme dieser Lasten der Körper in ebene Scheiben zersägt werden kann, ohne dass die Verformungen in den Teilstücken verschwinden. Jede Scheibe kann auf diese Weise mit den vorher skizzierten Methoden der ebenen Spannungsoptik untersucht werden, wobei sich das *Wertheim*sche Gesetz auf die *sekundären Hauptspannungen* in der Schnittebene anwenden lässt. Das Festhalten der Verformungen und der damit verknüpften Doppelbrechungseigenschaften kann auf verschiedene Weise geschehen, am einfachsten durch Erwärmung und nachfolgende Abkühlung des Modells unter Belastung. Oberhalb der sogenannten Erweichungstemperatur (etwa 80 °C bei Araldit) wird der Stoff nämlich viel elastischer als bei Zimmertemperatur und daher zu grossen Verformungen fähig, die bei der Abkühlung erstarren und nicht zurückgehen, auch wenn die Lasten nachher weggenommen werden. Anschaulich lässt sich dieses Phänomen mit einem Zweistoffsystem in der Art eines Schwammes erklären, in dessen Innern ein Stoff liegt, der oberhalb der Erweichungstemperatur flüssig, bei Zimmertemperatur aber fest ist. Bei der erhöhten Temperatur trägt der Schwamm allein die Lasten, während nach Abkühlung die erstarrte Flüssigkeit ein Zurückgehen des elastisch verformten Schwammes verhindert. Der Vollständigkeit halber muss allerdings erwähnt werden, dass dieses Bild nicht genau der Wirklichkeit entspricht. In Wahrheit besteht ein Kunstharz nicht aus zwei Stoffen, sondern aus fadenförmigen Makromolekülen, die einerseits durch stabile Bindungen, anderseits durch Bindungen verknüpft sind, die nur bei Zimmertemperatur, nicht aber oberhalb der Erweichungstemperatur wirksam bleiben.

Um jetzt zu verstehen, wie man in einem konkreten Fall vorgeht, wollen wir den in Bild 3 skizzierten Spezialfall einer am Rand drehbar gelagerten, dicken Kreisplatte betrachten, die durch eine zentrische Kraft P belastet ist. Wäre diese Platte dünn verglichen mit ihrem Radius, so könnte man den Spannungszustand mit der *Kirchhoff*schen Theorie der Biegung dünner Platten leicht berechnen. Im vorliegenden Fall darf aber diese Theorie nicht angewandt werden, denn es handelt sich um einen allgemeineren räumlichen Zustand, wenn auch nicht um den allgemeinsten dreidimensionalen Fall, da sowohl der Körper als auch die angebrachten Kräfte rotationssymmetrisch sind.

Der Spannungszustand wird in jedem Punkt durch vier Grössen beschrieben, durch die drei Normalspannungen in drei Richtungen, hier zweckmässig in radialer, tangentialer und vertikaler Richtung, und eine in der Meridianebene gelegene Schubspannung. Es müssten also vier Informationen aus optischen Messungen gewonnen werden. Bei dem vorher beschriebenen Erstarrungsverfahren wird man hier natürlich zweckmässig die Meridianebenen als Schnittebenen wählen und kann daher zunächst dem Körper einen Meridianschnitt entnehmen, dessen Verformungszustand wegen der Rotationssymmetrie alles enthält, was zur Bestimmung des Verformungszustandes des ganzen Körpers erforderlich ist. Dieser Meridianschnitt liefert bei senkrechter Durchleuchtung zwei Informationen, da wie vorher bei der ebenen Spannungsoptik ein Isochromatenfeld (Bild 5) und eine Reihe Isoklinen erzeugt werden können. Bild 5 zeigt übrigens deutlich den Einfluss der zentrischen Last durch eine Häufung der Isochromaten in der Umgebung ihres Angriffspunktes, so wie wir es schon im ebenen Fall festgestellt haben. In einem gewissen Sinn darf dieser Fall übrigens als räumliches Analogon zum einfachen Balken von vorher aufgefasst werden; der Vergleich beider Bilder verdeutlicht den Unterschied zwischen ebener und räumlicher Singularität. Schliesslich sei noch auf die relativ grossen Verformungen hingewiesen, die unter Umständen einen störenden Einfluss im Rahmen des Erstarrungsverfahrens bilden können, und die vom hochelastischen Zustand oberhalb der Erweichungstemperatur herrühren. Natürlich wird man danach trachten, diese Verformungen möglichst klein zu halten, etwa durch Anbringen entsprechend kleiner Lasten, was natürlich mit einem geringen optischen Effekt erkauft werden muss.

Die Isochromaten- und Isoklinenbilder des Meridianschnittes genügen nun aber nicht zur vollständigen Bestimmung des Spannungszustandes, da vier Informationen gebraucht werden. Zwar enthält der Meridianschnitt — wie schon erwähnt — alles Nötige für den Verformungszustand, der Lichtdurchgang wurde aber zu speziell gewählt. Es muss eben jede Stelle im Innern eines dreidimensionalen Modells in verschiedenen Richtungen durchleuchtet werden, um die maximale Anzahl von Informationen zu bekommen, und dies kann bei den herausgesägten Schnitten entweder nach *D. C. Drucker* (1940) durch schief einfallendes Licht, oder mit einem in jüngster Zeit viel verwendeten verfeinerten Unterteilungsprozess erreicht werden. Das letztgenannte Verfahren möge hier noch besonders erwähnt sein, da es verhältnismässig einfach zu handhaben ist. Im vorliegenden Fall besteht es darin, dass der Meridianschnitt weiter in prismatische Stäbchen zerlegt wird, die zunächst wie vorher in tangentialer, dazu aber noch in radialer Richtung mit polarisiertem Licht durchstrahlt werden können. Auf diese Weise erhält man die beiden in den Bildern 6b und 6c gezeigten Isochromatenfelder. Aus Bild 6a geht übrigens hervor, dass die Zerlegung keine Störung des eingeprägten Verformungszustandes bewirkt hat. Selbstverständlich muss beim Zersägen dafür gesorgt werden, dass die Temperatur infolge der Reibung der Sägezähne nicht über die Erweichungstemperatur steigt.

Im allgemeinen, nicht rotationssymmetrischen Fall, bei dem der Spannungszustand in jedem Punkt

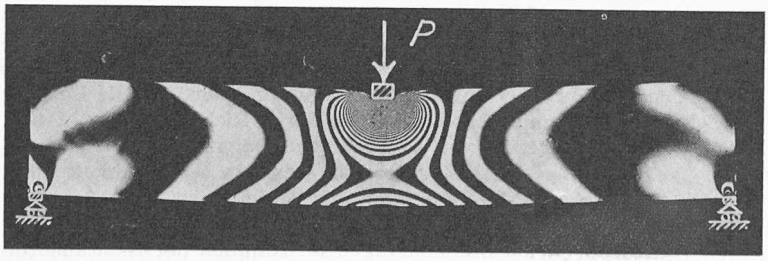

Bild 5. Isochromaten eines Meridianschnittes der Kreisplatte von Bild 3

durch sechs Grössen, drei Normalspannungen und drei Schubspannungen, charakterisiert wird, genügt auch eine solche Unterteilung nicht, um alle möglichen Informationen zu gewinnen. Man kann aber jedes der prismatischen Stäbchen durch Abschrägen zweier gegenüberliegender Kanten in ein hexagonales Prisma verwandeln, das in drei verschiedenen Richtungen durchleuchtet werden kann (Bild 4), so dass man im ganzen, da es für jede Richtung Isochromaten und Isoklinen gibt, sechs Informationen erhält. Es scheint also, als ob damit der gesamte Spannungszustand ermittelt werden könnte; in Wirklichkeit sind aber diese sechs Informationen — und übrigens auch irgendwelche sechs anderen, mit anderer Zerlegung erhaltenen — nicht linear unabhängig voneinander. Vielmehr kann bewiesen werden, dass höchstens fünf voneinander unabhängige Grössen gemessen werden können, wie wir sehen werden. Es liegt also eine gewisse Unbestimmtheit vor. Anschaulich versteht man dies sehr leicht, wenn man sich etwa vorstellt, dass solche Lasten angebracht werden, die in irgend einem Punkt einen isotropen Spannungszustand erzeugen, wie er zum Beispiel bei einer reibungslosen Flüssigkeit vorkommt, und für den alle Normalspannungen gleich einem Wert σ_0 sind, während überhaupt keine Schubspannungen auftreten. Eine Photographie würde in diesem Punkt für jede beliebige Zerlegung stets die Isochromate Null, also keinen optischen Effekt liefern, weil wegen der Gleichheit der Normalspannungen keine Differenzen vorliegen. Da aber σ_0 vollkommen beliebig sein kann, so ist der Spannungszustand in diesem Punkt unbestimmbar. Es stellt sich daher jetzt die grundsätzliche Frage, ob überhaupt mit optischen Messungen allein ein räumlicher Zustand vollständig ermittelt werden kann, und welches die allgemeinsten räumlichen spannungsoptischen Beziehungen sind.

Hierzu möge man sich, dem Gedankengang *F. E. Neumanns* folgend, vergegenwärtigen, dass der spannungsoptische Effekt in erster Linie von den Formänderungen und nur indirekt durch Vermittlung dieser von den Spannungen herrührt. Wir müssen daher die allgemeinsten Beziehungen zwischen den optischen Grössen, das sind Phasenverschiebungen oder Lichtgeschwindigkeitsänderungen infolge der Belastung, und den Formänderungen einerseits, sowie die Gleichungen zwischen den letztgenannten und den Spannungen anderseits aufstellen. Alle diese Grössen seien in irgend einem cartesischen Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) durch entsprechende Komponenten dargestellt. Wir bezeichnen die drei Normalspannungen mit σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} und die sechs paarweise gleichen Schubspannungen mit $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$. Die Gesamtheit der σ_{ij} nennt man bekanntlich den Spannungstensor, wobei das Wort Tensor im allgemeinen für ein System von Grössen gebraucht wird, die sich bei Koordinatenänderungen in einer bestimmten Weise transformieren, wie das insbesondere für die Spannungen der Fall ist. Wir wählen für das folgende diese abstrakte, kurze Darstellung mit veränderlichen Indizes i, j, weil dann die Grundgleichungen in besonders durchsichtiger und am leichtesten diskutierbarer Form erscheinen. Analog zu den Spannungen können die Formänderungen, das heisst die drei Dehnungen und die drei Schiebungen, durch den sogenannten Verzerrungstensor ε_{ij} angeschrieben werden, und schliesslich kann man auch die messbaren optischen Grössen durch einen Tensor π_{ij} charakterisieren. Das letztere will besagen, dass jede optische Messung, sei es mit polarisiertem Licht wie vorher, oder zum Beispiel mit Interferenzerscheinungen, in Funktion der sechs voneinander unabhängigen Komponenten π_{ij} (es gilt wie bei den Spannungen $\pi_{ij} = \pi_{ji}$) ausgedrückt werden kann. Die π_{ij} sind die Koeffizienten in der quadratischen Gleichung, welche die optische Indikatrix von *A. Fresnel* definiert, an der die Geschwindigkeiten aller möglichen, in beliebiger Richtung laufenden Lichtstrahlen abgelesen werden können. Fallen die Axen des cartesischen Koordinatensystems mit den Hauptrichtungen zusammen, so erlauben die π_{ij} eine anschauliche Erklärung, denn π_{11}, π_{22} und π_{33} bedeuten dann die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten der in diesen speziellen Richtungen schwingenden polarisierten Lichtstrahlen, während die gemischten Komponenten verschwinden.

Die dehnungsoptischen Grundgleichungen drücken sich so durch eine lineare Beziehung zwischen den Tensoren π_{ij}

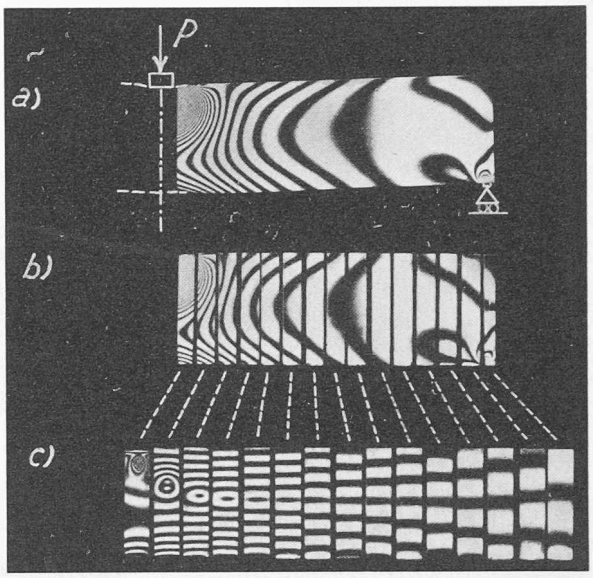

Bild 6. Isochromaten eines Meridianschnittes; *a)* vor einer verfeinerten Unterteilung, *b)* nach der Zerlegung tangential durchleuchtet, *c)* Stäbchen radial durchstrahlt

und ε_{ij} aus; genauer gesagt müssen die Verzerrungen linear vom Unterschied $\pi_{ij} - v^2 \delta_{ij}$ der beiden optischen Tensoren des verformten und des unverformten Zustandes abhängen. Hierbei bedeutet v die Lichtgeschwindigkeit im unverformten Material und δ_{ij} den Einheitstensor, dessen Komponenten 1 oder 0 sind, je nachdem $i = j$ oder $i \neq j$ ist, und der daher die Isotropie des unverformten Zustandes beschreibt. Man kann nun weiter zeigen, dass die allgemeinste lineare Beziehung zwischen den Tensoren $\pi_{ij} - v^2 \delta_{ij}$ und ε_{ij} im Fall eines isotropen Materials nur zwei optische Materialkonstanten C_1

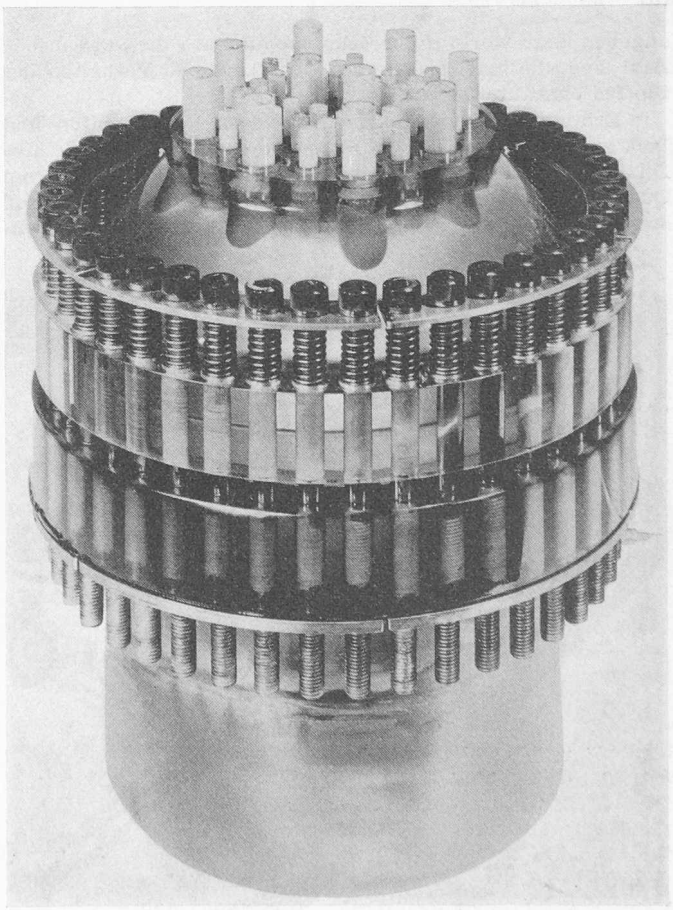

Bild 7. Reaktormodell, Westinghouse Research Laboratories, Pittsburgh, USA, Aufnahmen der Bilder 7 bis 10 von Dr. Leven und Dr. Sampson freundlicherweise überlassen

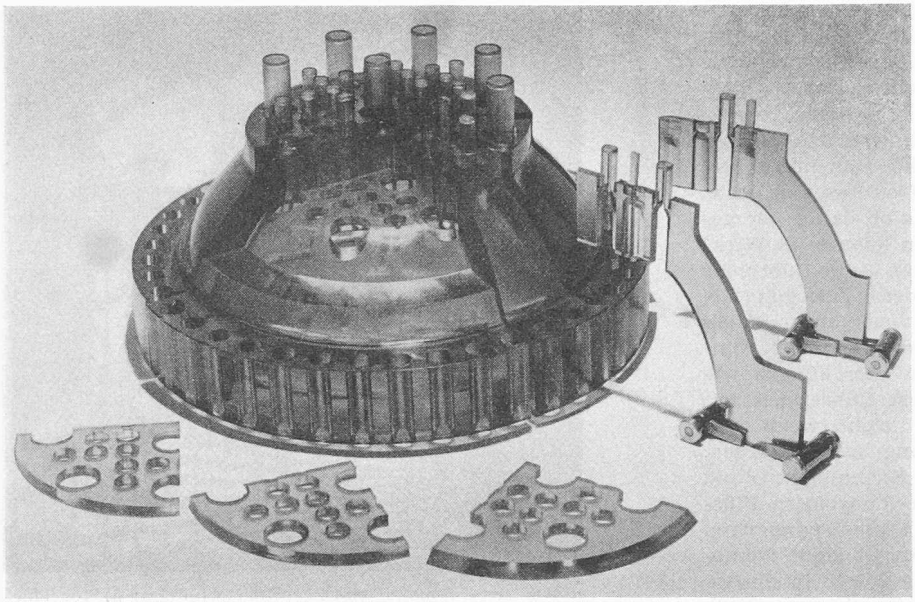

Bild 8. Zerlegung des Reaktormodells (*Leven* und *Sampson*)

und C_2 enthalten kann und dass sie von der folgenden Form sein muss:

(2) $\pi_{ij} - v^2 \delta_{ij} = C_1 \varepsilon_{ij} + C_2 \varepsilon \, \delta_{ij}$,

wo ε die erste Invariante $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ des Verzerrungstensors bedeutet.

Analog zu dieser Beziehung gelten im elastischen Bereich lineare Gleichungen zwischen Spannungen und Verzerrungen, nämlich das schon erwähnte verallgemeinerte *Hooksche* Gesetz, das sich in dieser abgekürzten Schreibweise durch die Gleichung

(3) $\sigma_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu \varepsilon}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \right]$

angeben lässt, worin G der Schubmodul und ν die Poissonsche Zahl sind, die beide zusammen das elastische Verhalten des Stoffes charakterisieren.

Erinnern wir uns jetzt daran, dass Isochromaten und Isoklinenbilder nur relative Phasenverschiebungen, oder also Differenzen von Lichtgeschwindigkeiten bzw. von deren Quadraten einerseits und Hauptrichtungen anderseits liefern, so schliessen wir, dass mit solchen Aufnahmen nur Differenzen zwischen π_{11}, π_{22} und π_{33} gemessen werden können, niemals aber diese selbst. Setzt man jetzt $i = j$, schreibt die beiden Gleichungen (2) und (3) für verschiedene Indizes an und subtrahiert korrespondierende Gleichungen, so entstehen sowohl links als auch rechts Differenzen von Tensorkomponenten. Daraus folgt aber, dass mit polarisiertem Licht auch nur Differenzen der Normalspannungen, nicht aber diese selbst bestimmt werden können, womit die vorherige Vermutung bewiesen ist.

Allerdings sind damit nicht alle Möglichkeiten erschöpft, denn mit Interferenzerscheinungen oder Brechungsindizesmessungen kann man nicht nur Differenzen von Lichtgeschwindigkeitsquadraten, sondern auch diese selbst ermitteln. Diese Verfahren lassen sich gewissermassen unter eine Art höherer Photoelastizität einordnen, da sie schwierig und nur mit besonderen Mitteln möglich sind. Man würde erwarten, dass mit ihnen vermöge (2) und (3) der Spannungszustand vollständig bestimmt werden könnte. Im Fall des Erstarrungsverfahrens scheitert das aber unter anderem an der Volumbeständigkeit der Kunstharze bei erhöhter Temperatur, wenn diese belastet werden. Zum Beispiel erzeugt ein isotroper Spannungszustand überhaupt keine Formänderung, so dass sich hier auch kein Schluss von Formänderungen auf die gesuchte Spannung σ_0 ausführen lässt. Die Volumbeständig-

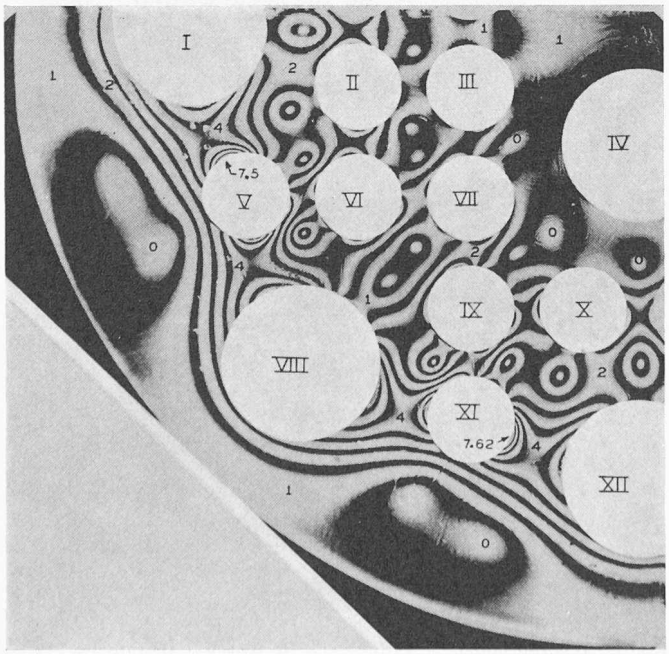

Bild 9. Isochromaten der Horizontalschnitte aus Bild 8 (*Leven* und *Sampson*)

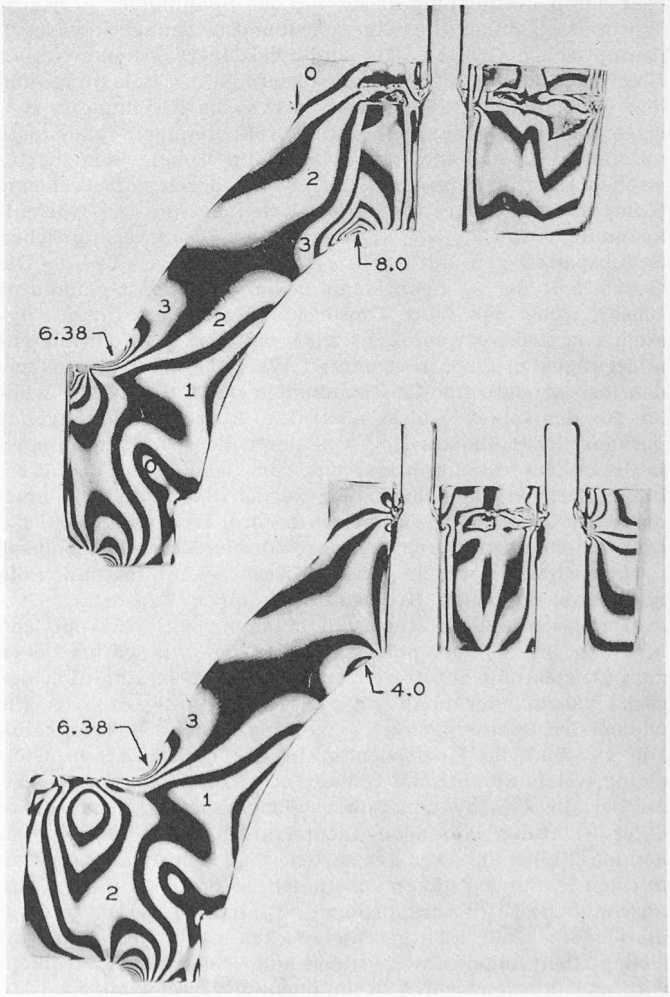

Bild 10. Isochromaten der Vertikalschnitte aus Bild 8 (*Leven* und *Sampson*)

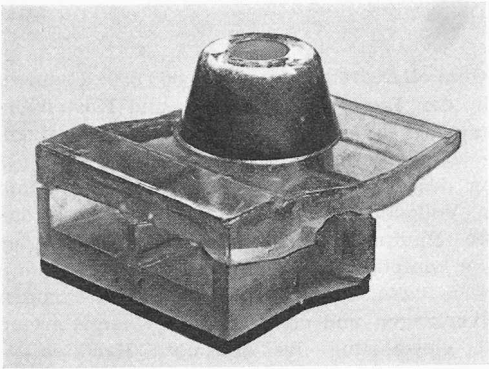

Bild 11. Modell eines Blockes des Donaukraftwerkes Jochenstein

Die Aufnahmen 11 bis 13 sind von Dr. *Kufner*, Technische Hochschule Münch., freundlicherweise überlassen

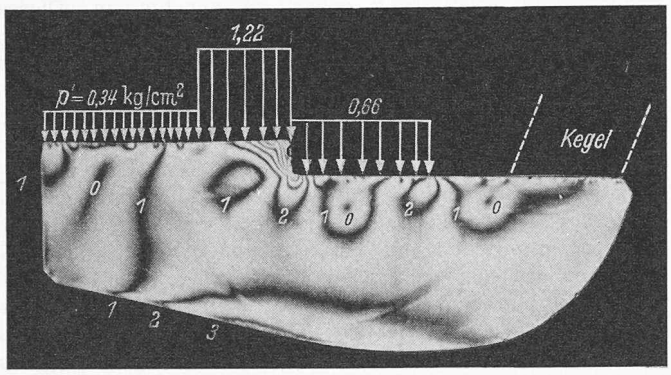

Bild 13. Isochromaten in einer Parallelebene zur Symmetrieebene (*Kufner*)

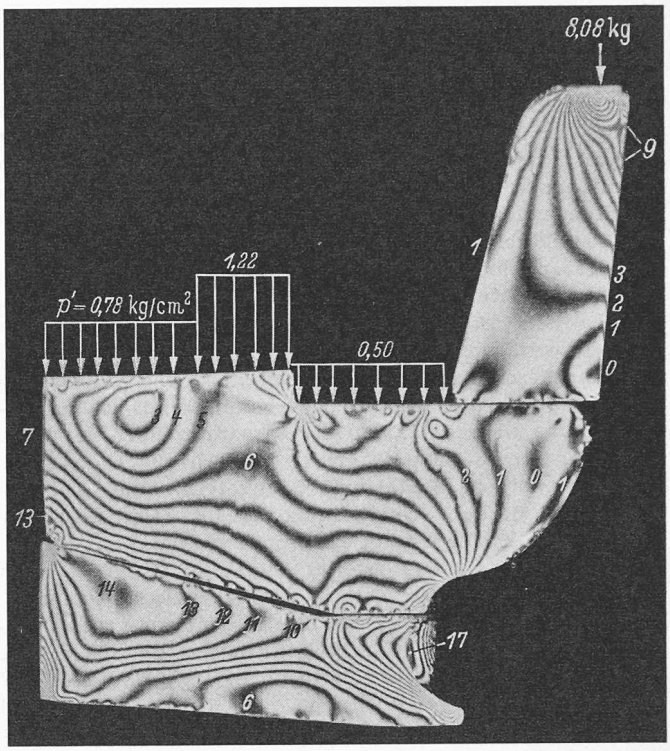

Bild 12. Isochromaten der Symmetrieebene des Modells von Bild 11 (*Kufner*)

keit der Kunstharze bedeutet eben, dass die *Poissonsche* Zahl ν gleich 0,5 ist, oder jedenfalls in der Nähe dieses Wertes liegt, so dass die Gleichung (3) unbestimmt wird. Diese Bemerkung zeigt übrigens, dass auch keine mechanische Messung die fehlende optische Messung zu ersetzen vermag.

Obwohl also hier eine prinzipielle Unvollständigkeit der Spannungsoptik vorliegt, wird sie zum Glück in praktischen Fällen nur selten eine Rolle spielen, da meistens die Spannungen bloss an der Oberfläche eines Bauteils gewünscht werden, weil erfahrungsgemäss auch dort die grössten Spannungen auftreten. An der Oberfläche sind aber schon zum vorneherein drei Spannungskomponenten bekannt, weshalb die optischen Messungen durchaus genügen.

Falls aber doch auch im Innern die Spannungen gewünscht werden, so kann man mit zusätzlicher numerischer Integration vom Rand her ins Innere vordringen. Das wichtigste von *M. M. Frocht* und seinen Mitarbeitern seit 1952 ausgebaute Verfahren beruht auf der Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

und erfordert daher die Bildung von Differentialquotienten aus empirischen Funktionen, die durch Messwerte gegeben werden. Dieser Prozess stellt bekanntlich in bezug auf die Verschlechterung der Genauigkeit ein heikles Verfahren dar, so dass die ursprünglichen optischen Messungen in diesem Fall besonders genau ausgeführt werden müssen, was man heute auch immer mehr durch Verwendung von photoelektrischen Mitteln zu tun bestrebt ist.

Zusammenfassend darf immerhin gesagt werden, dass die wichtigste Methode der räumlichen Spannungsoptik, das Erstarrungsverfahren, ohne besondere Schwierigkeit die Spannungen vollständig an der Oberfläche und fünf Informationen im Innern gibt, das heisst zwei Normalspannungsdifferenzen und drei Schubspannungen. Unter Verwendung besonders exakter Methoden und mit einem Integrationsverfahren kann auch im Innern eines homogenen, isotropen, oder mindestens stückweise homogenen, isotropen Körpers der Spannungszustand vollständig gefunden werden, wodurch die fragliche Kontrolle der Festigkeit gesichert ist.

Nach diesen prinzipiellen Betrachtungen soll noch zum Schluss gezeigt werden, dass das Erstarrungsverfahren tatsächlich auf praktische Probleme angewandt worden ist. Bild 7 zeigt das Modell eines Reaktors, der unter Innendruck stand, und dessen Spannungszustand in der Schale bestimmt werden sollte. Diese Aufgabe wurde an verschiedenen Laboratorien behandelt; die vorliegende Aufnahme stammt aus einer von *M. M. Leven* und *R. C. Sampson* in den Westinghouse Research Laboratories, Pittsburgh, USA durchgeführten Versuchsreihe. Bild 8 gibt das zerlegte Modell mit vertikalen und horizontalen Schnitten, während die dazugehörenden Isochromaten in den Bildern 9 und 10 dargestellt sind. Diese Bilder veranschaulichen deutlich den verwickelten und daher durch Rechnung schwierig zu erfassenden Verlauf der Spannungen. Schliesslich sei noch auf eine in München von *M. Kufner* ausgeführte Untersuchung hingewiesen, wo es sich um den Spannungszustand in der Saugrohrdecke eines Blockes des Donaukraftwerkes Jochenstein handelte (Bild 11). Die Bilder 12 und 13 geben dabei die Isochromaten für die Symmetrieebene und einen dazu parallel gelegten Schnitt. Diese Beispiele mögen zeigen, dass selbst schwierige Aufgaben mit der Photoelastizität behandelt werden können.

Allgemeine Literatur über Photoelastizität (ohne Anspruch auf Vollständigkeit)

[1] *Coker, E. G. and Filon, L. N. G.:* A Treatise on Photoelasticity, Cambridge University Press 1931 (Beschreibung der historischen Entwicklung bis 1931).

[2] *Frocht, M. M.:* Photoelasticity, Vol. I, 1946, Vol. II, 1948, John Wiley and Sons Inc., New York, Chapman and Hall Limited, London (enthält eine grosse Anzahl sorgfältig ausgeführter Beispiele).

[3] *Pirard, A.:* La Photoélasticité, Dunod, Paris 1947.

[4] *Handbook of Experimental Stress Analysis* (edited by *H. Hetényi*), John Wiley and Sons Inc., New York, Chapman and Hall Limited, London 1954 (Aufsatz von *D. C. Drucker* über Threedimensional Photoelasticity).

[5] *Handbuch der Physik* (herausgegeben von *S. Flügge*), Vol. VI, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1958 (Aufsatz von *H. T. Jessop* über Photoelasticity).

[6] *Föppl L.* und *Mönch E.:* Praktische Spannungsoptik. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959 (für praktische Anwendungen des Erstarrungsverfahrens geeignet).

[7] *Kuske A.:* Einführung in die Spannungsoptik. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1959.