

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 77 (1959)  
**Heft:** 31

**Artikel:** Spannungen in Zylinderschalen endlicher Länge  
**Autor:** Eberle, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84291>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Spannungen in Zylinderschalen endlicher Länge

DK 539.4.012.2:621.642.3

Von E. Eberle, dipl. Ing., Winterthur

### Analogie mit dem Träger auf elastischer Bettung

Infolge der gesteigerten Anforderungen an die Werkstoffe wird die Kenntnis der Spannungen in den Bauteilen immer bedeutungsvoller. Das hier behandelte Problem der Spannungen in Zylinderschalen stellt sich häufig und in mannigfacher Weise auf den verschiedensten Gebieten der Technik. Insbesondere erlaubt die Analogie mit dem Träger auf elastischer Bettung eine Anwendung im Bauwesen. Es wurde besonderer Wert auf die Untersuchung verhältnismässig kurzer Zylinder bzw. Träger gelegt, bei denen sich die Randeinflüsse über die ganze Länge der Schale bemerkbar machen. Wie gezeigt wird, ist damit keine Beschränkung auf einen engen Anwendungsbereich verbunden, da sich die Ergebnisse, dank einer typischen Eigenschaft von Schalen, leicht auf beliebig lange Zylinder übertragen lassen. Ein Beispiel am Schluss zeigt die Anwendung der Kurven.

### 1. Einleitung

Das Problem der Spannungen und Deformationen von zylindrischen Schalen unter radial wirkenden Belastungen ist mathematisch gleichbedeutend mit dem Problem des Balkens auf elastischer Bettung. Gerade dieses wurde sehr früh durch die Erfordernisse des Bauwesens aufgeworfen (Eisenbahnoberbau, Fundamentierungen usw.). Deshalb sind auch die meisten Arbeiten auf diesem Gebiet zu finden [1], [2], [3], [4], [5]<sup>1)</sup>. Grundsätzlich können alle komplizierten Belastungs- und Lagerungsfälle aus drei Grundfällen durch Superposition gebildet werden. Um den Umfang auf das Wesentliche zu beschränken, soll hier nur auf diese drei Grundfälle eingegangen werden. Eine vollständige Behandlung aller Fälle findet sich in [9]. Die graphische Darstellung des Spannungsverlaufes soll es erlauben, sich schnell ein Bild über den Einfluss von Einspannung, Zylinderlänge usw. machen zu können (siehe auch das Beispiel am Schluss).

### 2. Theorie

#### 21. Zylinder (Bild 1)

Ein Zylinder von konstanter Wandstärke  $h$ , dessen mittlerer Radius  $a$  betrage, ist durch eine Flächenlast  $p$  über die ganze Länge  $l$  belastet. Die Belastung  $p$  kann vom Innendruck oder von der Fliehkraft infolge Rotation des Zylinders herrühren. Das Verhältnis der Wanddicke  $h$  zum Radius  $a$  sei klein; dadurch wird der Einfluss der Schubspannungen auf die Deformationen vernachlässigbar. Ferner sei angenommen, dass sämtliche Belastungen kreissymmetrisch wirken und dass in axialer Richtung keine Kräfte auftreten. Von besonderem Interesse sind die Längs-Biegespannungen und die Tangentialspannungen, während die Quer-Biegespannungen, die Schubspannungen und besonders die Radialspannungen in ihrer Bedeutung zurücktreten.

Die Differentialgleichung des Problems sei als bekannt vorausgesetzt; man findet deren Ableitungen in [7] und [8]. Mit den am Schluss des Aufsatzes zusammengestellten Bezeichnungen lautet sie:

$$(1) \quad \frac{d^4y}{dx^4} + 4\lambda^4 y = \frac{p}{EI^*}$$

wobei die Abklingungszahl  $\lambda$  kennzeichnend ist für die Schnelligkeit, mit der die Wirkung einer Störung abklingt.

1) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss des Aufsatzes.

Dabei ist

$$(2a) \quad \lambda = \frac{1}{a} \sqrt[4]{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2}$$

Den Ausdruck  $I^*$  nennt man die Biegesteifigkeit einer Schale bzw. Platte.

$$(2b) \quad I^* = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Die Lösung der Differentialgleichung kann nach Einführung der Beziehungen

$$(3a) \quad n = \lambda l$$

$$(3b) \quad \eta = y/a$$

$$(3c) \quad \xi = x/l$$

in folgender Form dimensionslos geschrieben werden:

$$(4a) \quad \eta = \eta_p + \eta_h = \frac{p}{E} \frac{a}{h} + A \cosh n \xi \cos n \xi + \\ + B \cosh n \xi \sin n \xi + C \sinh n \xi \cos n \xi + D \sinh n \xi \sin n \xi$$

Die partikuläre Lösung  $\eta_p$  stellt die Dehnung des Zylinders durch die Belastung  $p$  dar, während die Lösung der homogenen Differential-Gleichung  $\eta_h$  mit den Integrationskonstanten  $A, B, C, D$  die Randeinflüsse wiedergibt.

$$(5a) \quad \eta_p = \frac{p}{E} \frac{a}{h}$$

$$(5b) \quad \eta_h = A \cosh n \xi \cos n \xi + B \cosh n \xi \sin n \xi + \\ + C \sinh n \xi \cos n \xi + D \sinh n \xi \sin n \xi$$

Mit den Koeffizienten

$$(6) \quad \alpha = \cosh n \xi \cos n \xi$$

$$\beta = \cosh n \xi \sin n \xi$$

$$\gamma = \sinh n \xi \cos n \xi$$

$$\delta = \sinh n \xi \sin n \xi$$

lassen sich die Formeln stark vereinfachen. So lässt sich die allgemeine Lösung in folgender Form darstellen:

$$(4b) \quad \eta = \eta_p + A \alpha + B \beta + C \gamma + D \delta$$

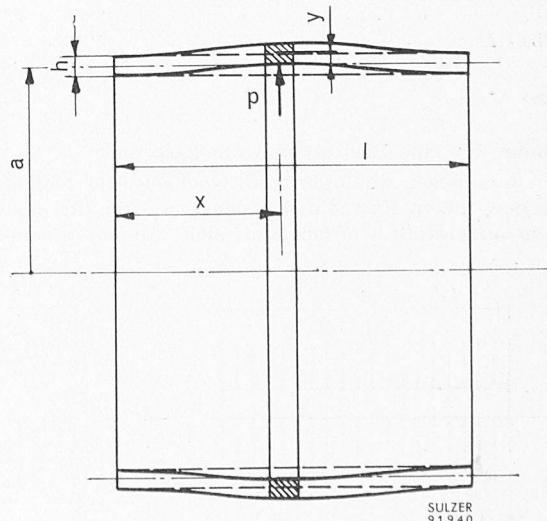


Bild 1. Schematische Darstellung des Problems

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Randbedingungen ist es notwendig, die Beziehungen zu kennen, durch welche die Randmomente und Randkräfte mit den Auslenkungen und deren Ableitungen zusammenhängen.

$$(7) \quad \text{Längs-Biegemoment } M = EI^* \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{l^2} EI^* \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = M^* \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$$

$$(8) \quad \text{Querkraft } Q = \frac{dM}{dx} = \frac{a}{l^3} EI^* \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = Q^* \frac{d^3\eta}{d\xi^3}$$

Der Aufbau der Formeln lässt die Ähnlichkeit mit der allgemein bekannten Biegetheorie des Balkens leicht erkennen. Es ist nur das Trägheitsmoment  $I$  durch die Biegesteifigkeit  $I^*$  zu ersetzen. Der Unterschied ist eine Folge der unterdrückten Querdehnung in Umfangsrichtung bei der Schale. Dies führt zum Aufbau einer Querbiegespannung

$$(9) \quad \bar{\sigma}_b = r \sigma_b$$

in Umfangsrichtung und schliesslich zu einer Versteifung, die im Verhältnis

$$(10) \quad \frac{I^*}{I} = \frac{1}{1 - r^2}$$

zum Ausdruck kommt.

Abschliessend zu diesem Kapitel seien noch die Formeln angegeben, die die Abhängigkeit der Spannungen von den Deformationen und deren Ableitungen wiedergeben:

$$(11a) \quad \text{Tangentialspannung } \sigma_t = E \eta$$

$$(11b) \quad \text{Längs-Biegespannung } \sigma_b = \frac{6M}{h^2} = \frac{6M^*}{h^2} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \sigma_b^* \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$$

$$(9) \quad \text{Querbiegespannung } \bar{\sigma}_b = r \sigma_b$$

$$(11c) \quad \text{Schubspannung } \tau = \frac{Q}{h} = \frac{Q^*}{h} \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = \tau^* \frac{d^3\eta}{d\xi^3}$$

## 22. Träger auf elastischer Bettung (Bild 2)

Unter Annahme einer ideal elastischen Bettung gilt die Beziehung  $\bar{p} = C y$  mit  $C$  als Bettungsziffer. Eine einfache Ableitung auf die hier verzichtet werden kann, führt zur Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{1}{CEI} y = \frac{p}{EI}$$

Die äussere Belastung  $p$  kann natürlich beliebig geartet sein, doch soll sie hier als konstant vorausgesetzt werden, was selbstverständlich an den prinzipiellen Erwägungen nichts ändert. Die Analogie zur Differentialgleichung des Zylinders ist sofort erkennbar. Aus den im Abschnitt 21 erwähnten Gründen tritt an die Stelle der Biegesteifigkeit  $I^*$  der Schale das Trägheitsmoment  $I$  des Balkens

$$(2b) \quad I^* = \frac{h^3}{12(1 - r^2)}$$

$$(2b) \quad I = \frac{h^3}{12}$$

immer für eine Breite von 1 cm gerechnet!

Aus dieser Analogie kann wechselseitig Nutzen gezogen werden, indem Formeln, Kurven usw., die für das eine Problem aufgestellt worden sind, sich mit entsprechenden Ab-

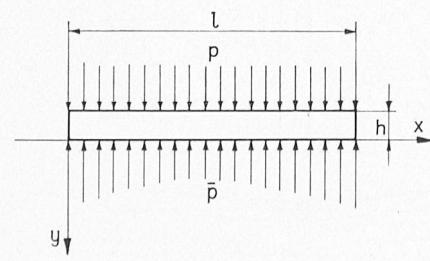


Bild 2. Träger auf elastischer Bettung

Tabelle 1

Fall	Diagramm			$A^*$	Integrationskonstanten		
	$S_b$	$S_t$	$B^*$		$C^*$	$D^*$	
I	1	2	1		$\cosh n \sinh n + \cos n \sin n$ $\sinh^2 n - \sin^2 n$	$-B^*$	$\sinh^2 n + \sin^2 n$ $\sinh^2 n - \sin^2 n$
II	3	4	0		$\frac{\sinh^2 n}{\sinh^2 n - \sin^2 n}$	$1 - B^*$	$\frac{\cosh n \sinh n - \cos n \sin n}{\sinh^2 n - \sin^2 n}$
III	5	6	-1		$\frac{\cosh n - \cos n}{\sinh n + \sin n}$	$B^*$	$\frac{\sinh n - \sin n}{\sinh n + \sin n}$

änderungen auch für das andere verwenden lassen. Die Bettungsziffer  $C$  gibt die elastischen Eigenschaften des Grundes wieder, und der Bettungsdruck  $\bar{p}$  übt auf den Balken denselben Einfluss aus, wie die Tangentialspannungen auf einen Längsstreifen des Zylinders. Diese Ueberlegung führt zur Einführung eines ideellen, äquivalenten Zylinders mit der Wandstärke  $h$  und dem Radius  $\bar{a}$ . Dieser Ersatzzyylinder hat die selben elastischen Eigenschaften wie ein Balken von der Höhe  $h$ , der auf einem Grund mit der Bettungsziffer  $C$  aufliegt.

Um dem fehlenden Einfluss der Querdehnung beim Träger auf elastischer Bettung gerecht zu werden, ist beim Ersatzzyylinder die Querdehnungszahl  $r = 0$  anzunehmen. Unter diesen Annahmen wird der Radius des äquivalenten Ersatzzyinders

$$\bar{a} = \sqrt{CEh}$$

und mit der Abklingungszahl

$$\bar{\lambda} = \sqrt[4]{(4CEI)^{-1}}$$

ergibt sich

$$(1) \quad \frac{d^4y}{dx^4} + 4\bar{\lambda}^4 y = \frac{p}{EI}$$

Damit ist vollkommene Analogie hergestellt, und der Träger auf elastischer Bettung kann ersetzt werden durch einen gleichwertigen Zylinder unter Beachtung von  $r = 0$ . Damit im Einklang steht auch, dass beim elastisch gestützten Balken keine Quer-Biegespannungen auftreten.

### 3. Ergebnisse

Da die Differentialgleichung linear ist, kann vom Superpositionsprinzip Gebrauch gemacht werden. Ferner erweist es sich als nützlich, die Deformationen und deren Ableitungen dimensionslos darzustellen. Folgende spezielle Belastungsfälle werden als Grundfälle benutzt:

I. Der linke Rand erfährt eine radiale Dehnung vom Betrage  $\eta_0^* = 1$ , während am rechten Rand  $\eta_1 = 0$  erzwungen wird ( $p = 0$ ).

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{linker Rand} \quad \eta_0^* &= 1; \varphi_0 = 0 \\ \text{rechter Rand} \quad \eta_1 &= 0; \varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

II. Der linke Rand erfährt eine Neigung gegenüber der Axrichtung vom Betrage  $\varphi_0^* = \eta_0$ , während am rechten Rand  $\eta_1 = 0$  erzwungen wird ( $p = 0$ ).

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{linker Rand} \quad \varphi_0^* &= \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{a}{l} \frac{d\eta}{d\xi} = n_0; \eta_0 = 0 \\ \text{rechter Rand} \quad \eta_1 &= 0; \varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

III. Der Zylinder wird auf seiner ganzen Länge durch eine Flächenlast  $p^* = E \cdot h/a$  belastet, während an beiden Rändern  $\eta = 0$  erzwungen wird.

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{linker Rand} \quad \eta_0 &= 0; \varphi_0 = 0 \\ \text{rechter Rand} \quad \eta_1 &= 0; \varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

In Tabelle 1 sind die Integrationskonstanten  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  für diese Grundfälle zusammengestellt. Mit deren Hilfe werden folgende Spannungskoeffizienten gebildet:

Fall I

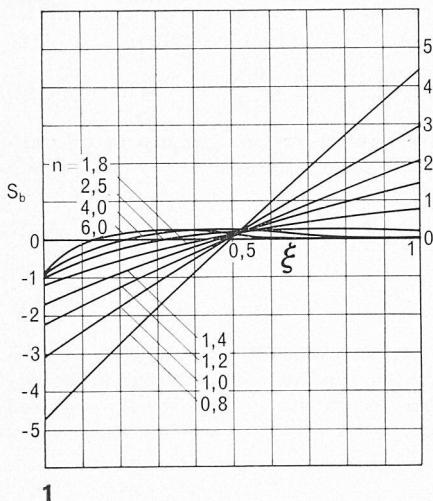
Fall II

Fall III

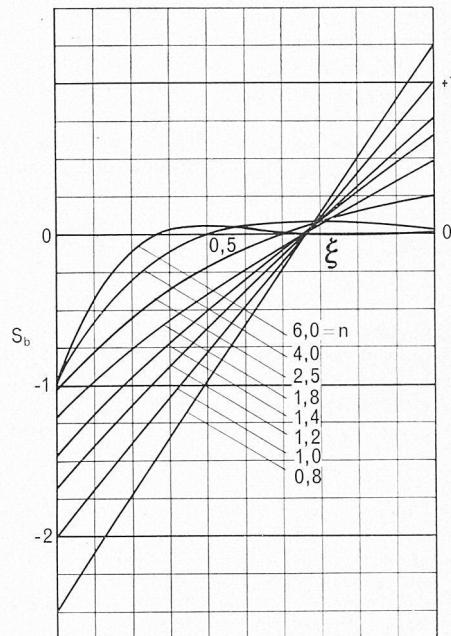
$$\eta_0^* = 1 \quad \eta_1 = 0 \\ \varphi_0 = 0 \quad \varphi_1 = 0$$

$$\eta_0 = 0 \quad \eta_1 = 0 \\ \varphi_0^* = \eta_0 \quad \varphi_1 = 0$$

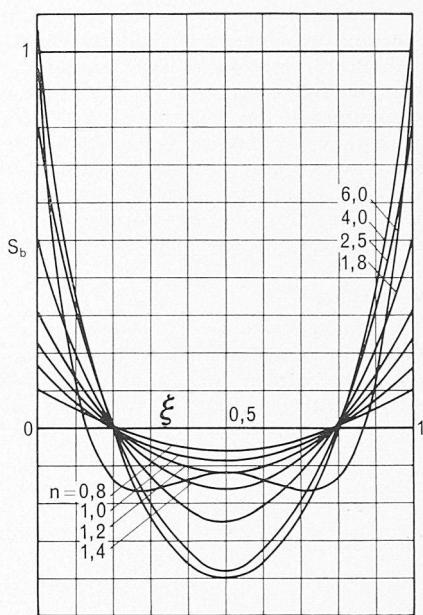
$$\eta_0 = 0 \quad \eta_1 = 0 \\ \varphi_0 = 0 \quad \varphi_1 = 0$$



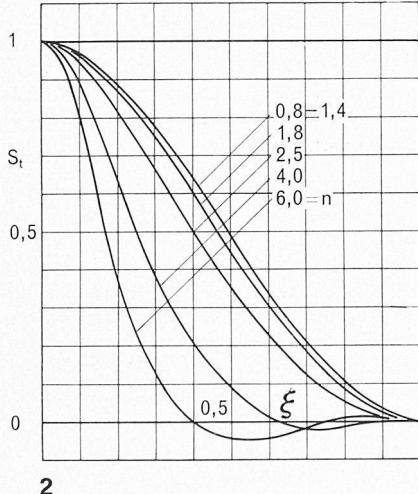
1



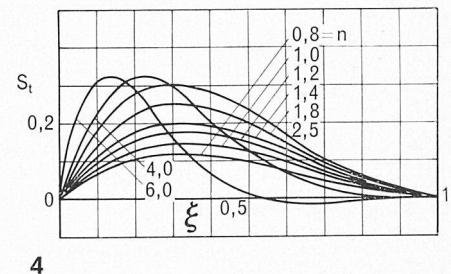
3



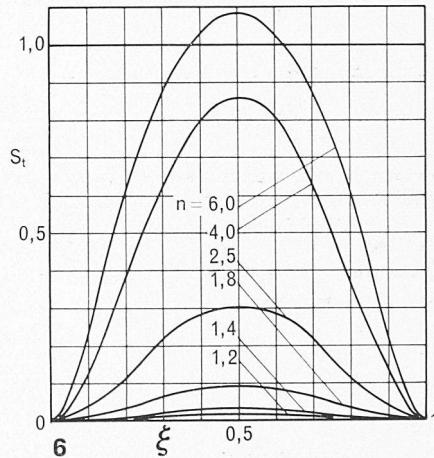
5



2



4



6

Bild 3. Diagramme der Spannungskoeffizienten, oben  $S_b$  unten  $S_t$  für die drei Grundfälle in Funktion der Verhältniszahl  $\xi = x/l$ 

(12a) für Tangentialspannungen

$$S_t = \eta_p^* + A^* \alpha + B^* \beta + C^* \gamma + D^* \delta$$

(12b) für Biegespannungen

$$S_b = -A^* \delta + B^* \gamma - C^* \beta + D^* \alpha$$

mit  $\eta_p^* = 0$  für Grundfall I und II und  $\eta_p^* = 1$  für Grundfall III. Diese Koeffizienten sind in den Diagrammen 1 bis 6 (Bild 3) in Funktion von  $\eta$  und  $\xi$  dargestellt. In Tabelle 2 sind die Formeln für die Spannungen zusammengestellt, wobei

$$\kappa = \sqrt{\frac{3}{1 - \nu^2}}$$

Unter Beachtung der Beziehungen

$$(14a) \quad \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{l} \frac{d\eta}{d\xi} = K_\varphi \frac{dS_t}{d\xi} \quad \text{und}$$

$$(14b) \quad Q = \frac{dM}{dx} = \frac{1}{l} \frac{dM}{d\xi} = K_Q \frac{dS_b}{d\xi}$$

können auch auf graphischem Wege Neigung und Querkraft gefunden werden. Die Ausdrücke für die Koeffizienten  $K_\varphi$  und  $K_Q$  sind in Tabelle 3 angegeben.

Tabelle 2

Spannung	Grundfall		
	I	II	III
(13a) Tangentialspannung $\sigma_t = \eta_0 E S_t$	$\frac{\varphi_0}{n_0} E S_t$	$p \frac{a}{h} S_t$	
(13b) Biegespannung $\sigma_b = \kappa \eta_0 E S_t$	$\kappa \frac{\varphi_0}{n_0} E S_t$	$\kappa p \frac{a}{h} S_t$	

Tabelle 3

Koeffizient	Grundfall		
	I	II	III
(15a) $K_\varphi = \frac{a}{l} \eta_0$		$\frac{\varphi_0}{n}$	$\frac{a}{l} \frac{p}{E} \frac{a}{h}$
(15b) $K_Q = 2 n^2 Q^* \eta_0$	$2 n^2 Q^* \frac{\varphi_0}{n_0}$	$2 n^2 Q^* \frac{p}{E} \frac{a}{h}$	

Im Maschinenbau tritt häufig das Problem auf, die Spannungen in rotierenden Trommeln zu bestimmen. In diesem Falle ist an die Stelle von  $p \cdot a/h$  die Spannung des frei rotierenden Ringes  $\sigma_u = pu^2$  zu setzen.

#### 4. Zusammenfassung

Bei der Betrachtung der Diagramme fällt auf, dass eine Störung in einer dimensionslosen Entfernung von  $n\xi = 3$  vom Störort (absolute Entfernung  $x = 3/\lambda$ ) praktisch abgeklungen ist. Damit erhält die Bezeichnung von  $\lambda$  als Abklingungszahl ihren Sinn. Es hat also keinen Sinn, die Diagramme für grössere Werte als  $n = 6$  zu bestimmen. (Jeder Rand wirkt ja praktisch nur bis zu einer Entfernung von  $n\xi = 3$ ). Damit ist auch die eingangs erwähnte Behauptung bewiesen, dass mit den vorhandenen Kurven beliebig lange Zylinder und Träger berechnet werden können.

#### 5. Beispiel

Um den Gebrauch der Kurven zu zeigen, sei folgendes Beispiel durchgerechnet: Ein einseitig vollkommen starr gelagerter Zylinder aus Stahl sei am anderen Ende frei und rotiere mit 3000 U/min. Für Stahl sind die Stoffwerte:

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 8 \cdot 10^{-6} \text{ kg s}^2/\text{cm}^4$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Die Abmessungen des Zylinders sind

$$h = 4 \text{ cm}$$

$$a = 41 \text{ cm}$$

$$l = 25 \text{ cm}$$

Hieraus ergeben sich

$$\lambda = \frac{1}{a} \sqrt{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2} = 0,1$$

$$n = \lambda l = 2,5$$

$$n_0 = \lambda a = 4,1$$

$$u = 128,6 \text{ m/s} = 1,286 \cdot 10^4 \text{ cm/s}$$

$$\sigma_u = \rho u^2 = 1320 \text{ kg/cm}^2$$

In Bild 4 ist dargestellt, wie der gesuchte Fall X durch Superposition der Fälle I, II und III gebildet wird.

Den Formeln (7) und (8) entnimmt man

$$M = M^* \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \quad \text{mit} \quad M^* = \frac{a}{l^2} EI^* \quad \text{und} \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 2n^2 S_b$$

$$Q = Q^* \frac{d^3\eta}{d\xi^3} \quad \text{mit} \quad Q^* = \frac{a}{l^3} EI^* \quad \text{und} \quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = 2n^2 \frac{dS_b}{d\xi}$$

Es ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten  $\eta_0$  und  $\varphi_0$ :

$$\begin{aligned} M_{x0} &= M_{III0} + M_{I0} + M_{II0} = \\ &= 2n^2 M^* \left( \frac{\sigma_u}{E} S_{bIII} + \eta_0 S_{bI} + \frac{\varphi_0}{n_0} S_{bII} \right) = 0 \\ Q_{x0} &= Q_{III0} + Q_{I0} + Q_{II0} = \\ &= 2n^2 Q^* \left( \frac{\sigma_u}{E} \frac{dS_{bIII}}{d\xi} + \eta_0 \frac{dS_{bI}}{d\xi} + \frac{\varphi_0}{n_0} \frac{dS_{bII}}{d\xi} \right) = 0 \end{aligned}$$

und die Unbekannten selbst zu:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\sigma_u}{E} \frac{D_I}{D} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_0}{n_0} = \frac{\sigma_u}{E} \frac{D_{II}}{D} \quad \text{mit} \\ D &= \begin{vmatrix} S_{bI} & S_{bII} \\ \frac{dS_{bI}}{d\xi} & \frac{dS_{bII}}{d\xi} \end{vmatrix}; \quad D_I = \begin{vmatrix} -S_{bIII} & S_{bII} \\ -\frac{dS_{bIII}}{d\xi} & \frac{dS_{bII}}{d\xi} \end{vmatrix}; \\ D_{II} &= \begin{vmatrix} S_{bI} & -S_{bIII} \\ \frac{dS_{bI}}{d\xi} & -\frac{dS_{bIII}}{d\xi} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Den Diagrammen 1, 3 und 5 von Bild 3 können nun die entsprechenden Spannungskoeffizienten  $S_b$  und die Werte von  $dS_b/d\xi$  entnommen werden, wobei bei der Neigung  $dS_b/d\xi$  auf den Massstab der Darstellung geachtet werden muss. Leider bedingt die Verkleinerung der Diagramme, dass die gesuchten Werte nur ungenau abgelesen werden können, weshalb neben den Werten aus den Diagrammen in Klammern die genau berechneten Zahlen stehen.

aus Diagramm 1

$$S_{bI} = -1,0 \quad (-1,020)$$

$$\frac{dS_{bI}}{d\xi} = + \frac{1}{0,2} = + 5,0 \quad (+5,050)$$

aus Diagramm 3

$$S_{bII} = -1,02 \quad (-1,037)$$

$$\frac{dS_{bII}}{d\xi} = + \frac{1,02}{0,4} = + 2,55 \quad (+2,549)$$

aus Diagramm 5

$$S_{bIII} = +0,8 \quad (+0,820)$$

$$\frac{dS_{bIII}}{d\xi} = - \frac{0,8}{0,15} = - 5,33 \quad (-5,214)$$

Setzt man diese Werte (auf 2 Stellen genau) in die entsprechenden Formeln ein, so erhält man

$$D = +2,64; \quad D_I = +3,31; \quad D_{II} = -1,18$$

und die Unbekannten  $\eta_0$  und  $\varphi_0/n_0$  werden

$$\eta_0 = \frac{\sigma_u}{E} \frac{D_I}{D} = 1,254 \frac{\sigma_u}{E}, \quad \frac{\varphi_0}{n_0} = \frac{\sigma_u}{E} \frac{D_{II}}{D} = -0,447 \frac{\sigma_u}{E}$$

Unter Benützung der Formeln (13a) und (13b) können die Spannungskoeffizienten für den Fall X durch Superposition gebildet werden, nachdem die Werte für  $\eta_0$  und  $\varphi_0/n_0$  bekannt sind. Man erhält

$$\begin{aligned} \sigma_{tx} &= \sigma_{tI} + \sigma_{tII} + \sigma_{tIII} = \\ &= \eta_0 E S_{tI} + \frac{\varphi_0}{n_0} E S_{tII} + \sigma_u S_{tIII} = \sigma_u \sigma_{tx} \end{aligned}$$

$$\sigma_{bx} = \sigma_{bI} + \sigma_{bII} + \sigma_{bIII} =$$

$$= \kappa \eta_0 E S_{bI} + \kappa \frac{\varphi_0}{n_0} E S_{bII} + \kappa \sigma_u S_{bIII} = \kappa \sigma_u S_{bx}$$

Damit ergeben sich für Tangentialspannungen

$$\sigma_{tx} = 1,254 S_{tI} - 0,447 S_{tII} + S_{tIII}$$

und für die Biegespannungen

$$\sigma_{bx} = 1,254 S_{bI} - 0,447 S_{bII} + S_{bIII}$$

Durch Einsetzen der Werte  $S_{tI}$ ,  $S_{tII}$  und  $S_{tIII}$  aus den Diagrammen 2, 4 und 6, sowie der Werte  $S_{bI}$ ,  $S_{bII}$  und  $S_{bIII}$  aus den Diagrammen 1, 3 und 5 (Bild 3) ergeben sich die Werte der Spannungskoeffizienten  $S_{tx}$  und  $S_{bx}$ , welche in Bild 5 dargestellt sind. Die zugehörigen Spannungen zeigt Bild 6. Die Bilder 5 und 6 veranschaulichen die interessante Tatsache, dass ein einseitig gestützter Zylinder ungünstiger beansprucht sein kann, als der frei rotierende Ring. In unserem Fall mit  $n = 2,5$  beträgt die Erhöhung der Tangentialspannung am freien Ende des Zylinders rd. 25 %!

#### 6. Bezeichnungen

$A, B, C, D$	Integrationskonstanten (allg.)	—
$A^*, B^*, C^*, D^*$	Integrationskonstanten (speziell)	—
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Koeffizienten	—
$a$	mittlerer Radius	cm
$\bar{a}$	mittlerer Radius (Ersatzzyylinder)	cm
$h$	Wandstärke (Balkendicke)	cm
$l$	Länge des Zylinders (Balkenlänge)	cm
$C$	Bettungsziffer	kg/cm <sup>3</sup>
$E$	Elastizitätsmodul	kg/cm <sup>2</sup>
$I$	Trägheitsmoment	cm <sup>4</sup>
$I^*$	Biegesteifigkeit	cm <sup>4</sup>
$\kappa$	Koeffizient	—
$\lambda$	Abklingungszahl	1/cm
$n$	dimensionslose Kennzahl	$n = \lambda l$
$n_0$	dimensionsloser Wert	$n_0 = \lambda a$
$\nu$	Querkontraktionszahl	—
$M$	Biegemoment (pro cm Umfang)	cm kg/cm
$M^*$	Biegemoment (speziell)	(pro cm Umfang) cm kg/cm
$p$	Flächenpressung	kg/cm <sup>2</sup>
$\bar{p}$	Bettungsdruck	kg/cm <sup>2</sup>
$\varphi$	Neigung	—
$Q$	Querkraft (pro cm Umfang)	kg/cm
$Q^*$	Querkraft (speziell)	(pro cm Umfang) kg/cm
$S_b$	Spannungskoeffizient	—

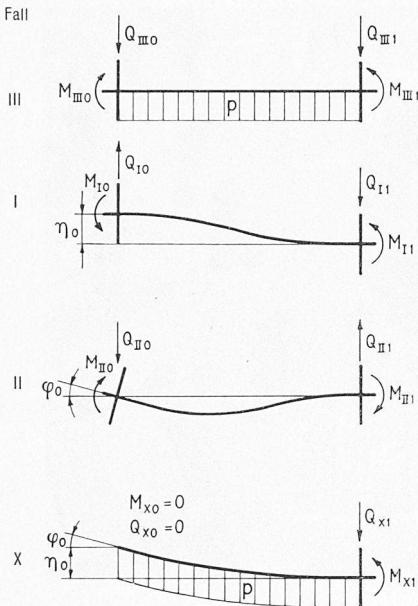


Bild 4. Symbolische Darstellung der Bildung des gesuchten Falles X durch Superposition der Fälle III, I und II mit den Unbekannten  $\eta_0$  und  $\varphi_0$ , welche aus den Randbedingungen  $M_{x0} = 0$  und  $Q_{x0} = 0$  bestimmt werden können

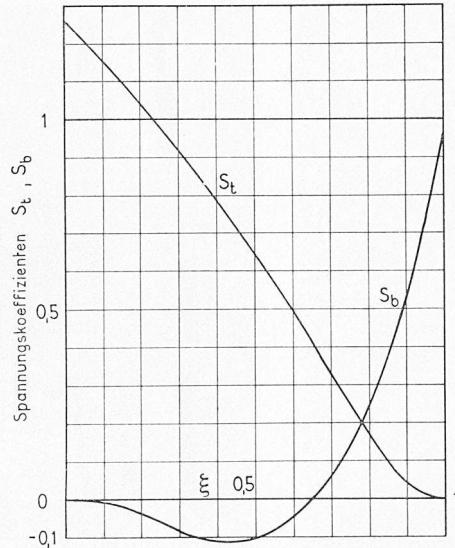


Bild 5. Spannungskoeffizienten zum Berechnungsbeispiel

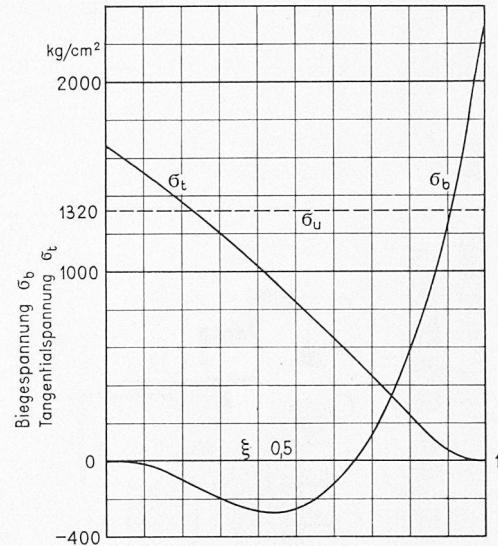


Bild 6. Spannungen zum Berechnungsbeispiel

$S_t$	Spannungskoeffizient
$\sigma_t$	Tangentialspannung
$\sigma_b$	Biegespannung (längs)
$\sigma_q$	Biegespannung (quer)
$\sigma_u$	Tangentialspannung des frei rotierenden Zylinders
$\rho$	spezifische Masse
$\tau$	Schubspannung
$u$	Umfangsgeschwindigkeit
$x$	laufende Abszisse
$\xi = x/l$	laufende Abszisse (dimensionslos)
$y$	Deformation
$\eta = y/a$	Deformation (dimensionslos)
$K_\varphi$	Koeffizient
$K_a$	Koeffizient

—	kg/cm²
—	kg · s²/cm⁴
—	kg/cm²
—	cm/s
—	cm
—	—
—	cm
—	—
—	—
—	kg/cm

Adresse des Verfassers: E. Eberle, dipl. Ing., Buelrainstr. 25, Winterthur.

#### Literaturverzeichnis

- [1] Zimmermann: Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin: Ernst & Sohn 1888.
- [2] Hayashi, K.: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin: Springer-Verlag 1921.
- [3] v. Sanden, K. und F. Schleicher.: Zur Theorie des Balkens auf elastischer Unterlage. «Beton und Eisen» (1926), Heft 5.
- [4] Pasternak, P.: Die baustatische Theorie biegefester Balken auf elastischer Bettung. «Beton und Eisen» (1926), Heft 9.
- [5] Swida, W.: Die Berechnung des Balkens auf elastischer Unterlage nach dem Verfahren der anfänglichen Parameter. «Beton und Stahlbetonbau» (1951), Heft 9.
- [6] McCalley, R. B. Jr., Kelly, R. G.: Tables of functions for short cylindrical shells. «ASME Fall Meet». 1956, Pap. 56-F-5.
- [7] Biezeno, C. B., und Grammel, R.: Technische Dynamik. Berlin, Springer-Verlag (1939).
- [8] Timoshenko, S.: Theory of Plates and Shells. Mc. Graw-Hill, New York, London (1940).
- [9] «Technische Rundschau Sulzer» 1959/1, S. 71.

## Projektierung der Ueberbauung am Helvetiaplatz in Zürich

DK 711.5

Der Stadtrat von Zürich hat zwölf Architekten eingeladen, auf dem Areal des Helvetiaplatzes (begrenzt durch Molken-, Lang-, Kanzlei und Ankerstrasse) eine Ueberbauung mit Bürohäusern, Kirchgemeindehaus, Schulhaus, Läden und unterirdischer Garage zu studieren. Jeder Teilnehmer erhielt eine feste Entschädigung von 4000 Franken. Die Beurteilung der Projekte erfolgte durch ein aus neun Mitgliedern bestehendes Expertenkollegium, worin neben den Vertretern des Bauamtes II, des Schulamtes und der Kirchenpflege Aussersihl drei unabhängige Fachleute mitwirkten. Hier ist nicht der Ort, das gewählte Verfahren zur Abklärung dieser wichtigen Bauaufgabe und die Durchführung dieser Veranstaltung unter die Lupe zu nehmen; wir wollen uns auch nicht mit der Verwirklichung des zur Ausführung empfohlenen Projektes befassen. Diese Fragen sind andernorts zu behandeln, weil sie den Rahmen unserer Zeitschrift sprengen. Hier wollen wir uns nur mit der Aufgabe selbst auseinandersetzen, denn diese ist, wie ein Blick ins Programm und schon die flüchtige Betrachtung der hier abgebildeten Projekte beweisen, von ausserordentlichem Reiz aber auch ganz besonders schwer.

Der Helvetiaplatz in Zürich liegt angrenzend an die Langstrasse, die sich im Laufe der Jahre zur Hauptgeschäftsstrasse der Stadt Kreise 4 und 5 entwickelt hat. Diese Strasse ist aber auch vom Verkehr sehr stark belegt. Die das Areal schräg durchschneidende Stauffacherstrasse

wird ebenfalls verkehrlich stark beansprucht, der Kreuzungspunkt beider Strassen zählt zu den wichtigen Nebenzentren der Stadt. Der Platz ist auch insofern städtebaulich interessant, als ihm im Zusammenhang mit dem Volkshaus eine gewisse politische Bedeutung zukommt. Seine Gestaltung oder, besser gesagt, sein raumkünstlerisch ansprechender Ausbau ist nicht nur ein architektonisches Anliegen einzelner weniger, sondern auch ein Gebot der Solidarität mit der Arbeiterklasse Zürichs, für die allein schon der Name Erinnerungen an die Kampfzeit wachruft; das Denkmal der Arbeit ist als Wahrzeichen dafür dort vorgesehen. Seit vielen Jahren hört man davon, dass der Platz einen würdigen Rahmen erhalten soll. Jetzt ist er noch trostlos anzusehen; Randbebauungen der Gründerjahre, die Hauptfassade des architektonisch nicht gerade ansprechenden Volkshauses, Nebenfassaden des Bezirksgebäudes und ein altes Schulhaus mit Turnhalle sind das Gebilde, das mit der leeren Fläche in der Mitte den stolzen Namen trägt.

Die Tatsache, dass die Kirchgemeinde Aussersihl am Helvetiaplatz ein Kirchgemeindehaus erstellen will (die Architekten dafür sind bereits auserkoren), mag den Ausschlag gegeben haben, das Problem anzupacken. Laut Programm standen den Projektverfassern zwei getrennte Bauplätze, einer von rund 1000 m² zwischen Helvetiaplatz und Molkenstrasse, der andere von rd. 6850 m² zwischen Stauffacher-, Lang-, Kanzlei- und Ankerstrasse zur Verfügung,