Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 76 (1958)

Heft: 22

Artikel: Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen und Versuche an solchen aus Tonhohlsteinen

Autor: Gmür, Oskar

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63986

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

dition ergibt die funktionale Abhängigkeit gleicher physikalischen Grössen mit Gl. 6.

Im Bild 3 ist die Lüfterkonstruktion dargestellt mit nachgeschaltetem Leitrad. Wenn sie auch im Lüfterbau nicht die Vorteile der im Bild 2 geschilderten Konstruktion aufweist, wird sie hier vollständigkeitshalber erwähnt.

Weil sich die Bewegung in den sich erweiternden Leitradkanälen in der verzögerten Phase befindet, ist die Strömung verlustreich. Eine quantitative Erfassung des Vorganges ist leider wegen der Idealisierung dieser Anordnung nicht möglich. Die Einbusse an Druckleistung ist aus den Geschwindigkeitsdreiecken insofern ersichtlich, als eine Verkleinerung der relativen Anströmgeschwindigkeit w_∞ eintritt und diese wiederum wegen ihrer linearen Abhängigkeit die Zirkulation um den Flügel herabmindert. Darüber hinaus ist diese Anordnung gegenüber jener nach Bild 2 insofern empfindlicher, als die geringsten Schwankungen des Betriebspunktes unvermeidlich Stossverluste zur Folge haben.

Auch hier wurde die funktionale Abhängigkeit der gleichen physikalischen Grössen mittels der Bernoullischen Gleichungen in den Kontrollebenen erhalten. Eine einfache Addition ergibt die Gl. 7.

Um eine weitere Drucksteigerung im Lüfterbau erreichen zu können, bedient man sich auch einer Anordnung, wie sie im Bild 4 dargestellt ist. Es handelt sich hier um zwei sich gegeneinanderdrehende Axialgitter. Sie stellt eine bauliche Ueberlagerung der beiden mittleren Anordnungen und infolge des Wegfalles der beiden stationären Gitter eine wesentliche konstruktive Vereinfachung dar.

Durch einfache Addition der in den Kontrollebenen aufgestellten Bernoullischen Gleichungen erhält man die Gleichung 8. Sie ergibt, wie ersichtlich, bei sonst gleichen Verhältnissen die doppelte Drucksteigerung.

Die oben geschilderten vier Anordnungen, wie sie heute im Lüfterbau möglich sind, werden im folgenden an Hand eines Beispieles qualitativ und quantitativ analysiert. Dazu wurde ein Lüftertyp mit einem Aussendurchmesser von 600 mm und einem Nabenverhältnis von 0,6 gewählt. Es handelt sich um eine normale Serienausführung der Ventilator AG., Stäfa. Die Laufradnaben sind mit im Stillstand verstellbaren Flügeln ausgerüstet. Das Ergebnis dieser experimentellen Untersuchung ist in den Bildern 5 bis 8 wiedergegeben.

Als Ordinate wurde jeweilen der Gesamtdruck aufgetragen, als Abszisse die Luftmenge in m^3/s. Die Luftleistung wurde als geschlossenes Feld ohne Angabe des Gitteranstellwinkels aufgenommen. Die Bilder weisen noch die Wirkungsgradkurven auf, wobei die Luftleistung auf den Gesamtdruck bezogen wurde. Ein Vergleich der in den Bildern 5 bis 8 dargestellten Ergebnisse mit der Berechnung nach den Gleichungen 5 bis 8 ergibt eine gute Uebereinstimmung der erzielten Gesamtdrücke. Auffallend ist die bedeutend höhere Luftmenge in der Anordnung Leitrad-Laufrad und derjenigen mit zwei gegenläufigen Laufrädern, als bei den beiden andern Anordnungen. Wenn auch der abgehende Luftstrahl der Anordnung Leitrad-Laufrad nicht immer drallfrei sein kann, bedingt durch die Verstellbarkeit des Laufgitters allein, so ist der Wirkungsgrad bei dieser Anordnung wegen der grösseren Unempfindlichkeit in bezug auf die Stossverluste auf der Saugseite gegenüber der Anordnung Laufrad-Leitrad bedeutend besser. Die Anordnung Laufrad-Leitrad hat hingegen in jedem beliebigen Betriebspunkt und für alle Anstellwinkel des Laufrades stets einen axialen Abgang des Luftstrahles.

Es werden zum Schluss noch einige Bilder der verschiedenen Lüfterbauarten wiedergegeben. Im Bild 9 ist ein Lüfter der Anordnung gemäss Bild 1 dargestellt. Für einen Generator-Umluftkühler von Brown, Boveri & Cie. werden vier gegenläufige Lüfter der Anordnung gemäss Bild 4 verwendet. Sie sind in Bild 10 als vertikale Rohrstücke ersichtlich. Ihrer hohen Druckziffer wegen werden diese Apparate oft im Stollenbau angewandt, wie es im Bild 11 gezeigt wird. Ihres geringen Platzbedarfes wegen eignen sich die Axiallüfter besonders bei gedrungenen Bauverhältnissen, wie aus Bild 12 ersichtlich, wo drei Ventilatoren übereinander angeordnet sind. Das Bild 13 zeigt die Anwendung des Axiallüfters im elektrischen Apparatebau. Es handelt sich hierbei um einen Mutator von Brown, Boveri & Cie. Der sehr geringe Raumbedarf dieses Axiallüfters gestattet eine gedrungene Bauweise des Mutators.

Zusammenfassung

Es wurde ein Versuch unternommen, das Axialgitter als Bauelement im Lüfterbau in bezug auf seine bauliche Anordnung zu untersuchen. Nach der Darstellung ihrer gemeinsamen Merkmale durch die bekannten spezifischen Kennzahlen wurden im Anschluss vier verschiedene Anordnungen im Lüfterbau besprochen. Die Untersuchung erstreckte sich auf das rotierende Gitter allein, ferner auf solche in Zusammenarbeit mit vor- und nachgeschaltetem Leitrad sowie schliesslich in der Anordnung zweier gegenläufig rotierenden Gitter. Auf eine quantitative Betrachtung wurde im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Ein Lüftertyp wurde in allen vier Anordnungen gemessen und seine Leistungsdaten graphisch dargestellt. Der Vorteil der zweiten Anordnung Leitrad-Laufrad (in der Luftrichtung gesehen) wird gedeutet. An Hand einiger Anwendungsbeispiele wird auf verschiedene Verwendungsmöglichkeiten der Axiallüfter verwiesen.

Adresse des Verfassers: D.-Ing. *C. S. Vasiljevic*, in Ventilator AG., Stäfa.

Literaturverzeichnis

[1] *R. C. Tolmann:* Principle of similitude. «Phys Rev.» (2) Bd. 3, S. 244, 1914. Ferner Bd. 6, S. 219, 1915 und Bd. 8, S. 8, 1916.
[2] *E. Buckingham:* On physically similar systems. «Phys. Rev.» (2) Bd. 4, S. 345, 1914.
[3] *F. Eisner:* Ueber Aehnlichkeitsmechanik und ihre Anwendung auf Modellversuche. «Z. Schiffbau» (26), 1925.
[4] *B. Eck:* Ventilatoren, Dritte Auflage 1957.
[5] *Dr. C. Keller:* Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie, Zch. 1934, Gebr. Lehmann.
[6] *W. Birnbaum:* «Zeitschrift für angew. Math. und Mech.» 1923.

Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen und Versuche an solchen aus Tonhohlsteinen

Von Dr. **Oskar Gmür,** dipl. Bauingenieur S. I. A., St. Gallen

DK 624.074.4

Translationsschalen, die sich besonders gut zur Bedeckung rechteckiger Grundrisse eignen und der Einfachheit ihrer Ausführung wegen immer mehr Anwendung finden, entstehen durch Translation einer Kurve, die in einer vertikalen Ebene liegt, auf einer andern festen Leitkurve in einer vertikalen Ebene (Bild 1). Die senkrechten Schnitte durch eine Translationsschale parallel zu einer dieser Ebenen sind deshalb alle gleich, was zur Einfachheit der Ausführung beiträgt. Als feste und bewegliche Kurven werden aus leicht ersichtlichen Gründen mit Vorteil Kreisbögen verwendet.

Aus der allgemeinen Theorie von Ing. Dr. A. Pucher [1, 2] [1]) ist nachfolgend behandelte Analyse zur Ermittlung des Membranspannungszustandes in solchen Translationsschalen, die seitlich auf bogenartige Scheiben aufgelagert sind, entwickelt worden. Die Membranspannungen können bis zur gewünschten Genauigkeit mit der Differenzenrechnung ermittelt werden. Damit lässt sich der Spannungszustand für die ganze Schale, ausgenommen für die Randzonen, darstellen.

Die Ergebnisse der im 2. Teil dieses Berichtes beschriebenen Versuche zeigen, dass sich die Unregelmässigkeiten nur auf geringe Randzonen ausdehnen. Der rechnerische Arbeitsgang für annehmbare und genügend genaue Lösungen der Spannungswerte ist einfach und der Zeitaufwand verhältnismässig gering.

Grundlagen der Berechnung

Die Mittelfläche der Schale folge der Gleichung $z = z(x, y)$. Diese bezieht sich auf ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem mit dem Nullpunkt im Scheitel, z-Axe positiv nach unten und die Axen x und y parallel zu den Seiten L und l des von der Schale gedeckten Rechteckes gerichtet (Bild 2). Das Flächenelement mit den Seiten ds_1 und

[1]) Siehe Literaturverzeichnis am Schluss.

ds_2 wird durch zwei den Ebenen xz und xy parallele Ebenen so begrenzt, dass dessen Normalprojektion auf die xy-Ebene ein Rechteck mit den Seiten dx und dy ergibt. Die Neigungen der Seiten ds_1 und ds_2 gegenüber der xy-Ebene seien tg φ und tg Θ. Die Seitenlängen des Flächenelementes sind also:

$$ds_1 = \frac{dx}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad ds_2 = \frac{dy}{\cos\Theta}$$

Wenn α der Winkel zwischen ds_1 und ds_2 ist, ergibt sich mit:

$$(1) \quad \operatorname{tg}\varphi = z_x \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\Theta = z_y$$

$$(2) \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2}}; \quad \cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{1+z_y^2}}$$

$$(3) \quad \cos\alpha = \frac{z_x z_y}{\sqrt{(1+z_x^2)(1+z_y^2)}}$$

in welchen

$$(4) \quad z_x = \frac{\partial}{\partial x} \text{ und } z_y = \frac{\partial}{\partial y} \text{ bedeuten.}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen:

Es sei (Bild 3):

N_x die Kraft pro Längeneinheit, die am Element ds_2 parallel zur xz-Ebene wirkt (positiv, wenn Zugkraft).

N_y die Kraft pro Längeneinheit, die am Element ds_1 parallel zur yz-Ebene wirkt (positiv, wenn Zugkraft).

T die Kraft pro Längeneinheit, die am Element ds_1 parallel zur xz-Ebene und deshalb gleichzeitig am Element ds_2 parallel zur yz-Ebene wirkt.

m die Komponente von N_x auf der Ebene xy.

n die Komponente von N_y auf der Ebene xy.

t die Komponente von T auf der Ebene xy.

q die gleichmässig verteilte Belastung pro Flächeneinheit der Ebene xy.

N_x, N_y und T sind nicht die Kraftkomponenten parallel und senkrecht zum Linienelement ds, da das Flächenelement kein Rechteck, sondern ein Parallelogramm ist.

Die Spannungskomponenten in der xy-Ebene stehen mit den Schnittkräften an der Schale in folgenden Beziehungen:

$$(5) \quad m = \frac{N_x \cos\varphi}{\cos\Theta}$$

$$(6) \quad n = \frac{N_y \cos\Theta}{\cos\varphi}$$

$$(7) \quad t = T$$

Die Zerlegung der äussern Kräfte und der Spannungen nach den drei ausgewählten kartesischen Axen ergibt folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$(8) \quad m_x + t_y = 0$$

$$(9) \quad n_y + t_x = 0$$

$$(10) \quad (m \operatorname{tg}\varphi)_x + (n \operatorname{tg}\Theta)_y + (t \operatorname{tg}\varphi)_y + (t \operatorname{tg}\Theta)_x + q = 0$$

in welchen die Ausdrücke $(\ )_x$ und $(\ )_y$ in Uebereinstimmung mit Gl. (4) $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ bedeuten.

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die Werte m, n und t und mit den Gl. (5), (6) und (7) N_x, N_y und T. Die entsprechenden Membranspannungen erhält man durch Division dieser Kräfte, bezogen auf die Längeneinheit, durch die Stärke der Schale, die als konstant angenommen wird.

Die Schale sei am Rande auf in der Vertikalebene unendlich steife Bogenscheiben aufgelagert, so dass keine Setzungen möglich sind. Die Seitensteifigkeit sei gleich Null, um das Auftreten von horizontalen Reaktionen zu verhindern. Deshalb sind die Randbedingungen im Zusammenhang mit den Gleichgewichtsgleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} m = 0 & \text{bei } x = \pm \dfrac{L}{2} \\ n = 0 & \text{bei } y = \pm \dfrac{l}{2} \end{cases}$$

Die Funktion von Airy

Die Gleichgewichtsbedingungen (8) und (9) sind auch erfüllt, wenn m, n und t die zweiten Ableitungen einer Funktion $F(x, y)$ (Funktion von Airy) sind:

$$(12) \quad m = F_{yy}; \; n = F_{xx}; \; t = -F_{xy}$$

Setzt man diese Ausdrücke für m, n und t in Gl. (10) und (11) ein, so ergibt dies:

$$(13) \quad F_{xx} z_{yy} - 2 F_{xy} z_{xy} + F_{yy} z_{xx} = -q$$

$$(14) \quad F_{yy} = 0 \quad \text{für } x = \pm \frac{L}{2}$$

$$F_{xx} = 0 \quad \text{für } y = \pm \frac{l}{2}$$

Nach Gl. (14) ist F am Rande eine Linearfunktion von x und y. Da die Bestimmung der Spannungen nur die Berechnung der zweiten Ableitung von $F(x, y)$ verlangt, kann man am Rande $F = 0$ annehmen und deshalb die Randbedingungen in folgender Form anschreiben:

$$(15) \quad F = 0 \text{ für } x = \pm \frac{L}{2} \text{ und für } y = \pm \frac{l}{2}$$

Berechnung einer Translationsschale aus Kreisbögen

Die von einem Kreisbogen mit dem Radius a, der zur xz-Ebene parallel längs eines Kreisbogens mit dem Radius b in der yz-Ebene läuft, erzeugte Fläche ist durch folgende Gleichung charakterisiert:

$$(16) \quad z = a + b - \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{b^2 - y^2}$$

Mit

$$(17) \quad u = \frac{x}{a} \quad \text{und} \quad v = \frac{y}{b}$$

ergeben die Gl. (1) bis (4) für diese besondere Fläche folgende Ausdrücke:

$$(18) \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}; \quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$(19) \quad \cos\varphi = \sqrt{1-u^2}; \quad \cos\Theta = \sqrt{1-v^2}$$

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{\cos\varphi}{\cos\Theta} = \sqrt{\dfrac{1-u^2}{1-v^2}}; & \sin\varphi = u \\ \dfrac{\cos\Theta}{\cos\varphi} = \sqrt{\dfrac{1-v^2}{1-u^2}}; & \sin\Theta = v \end{cases}$$

$$(21) \quad \cos\alpha = u\,v$$

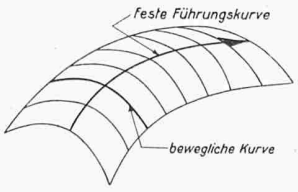


Bild 1. Translationsschale

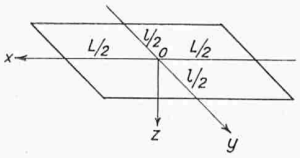


Bild 2. Schalengrundriss mit Koordinatensystem

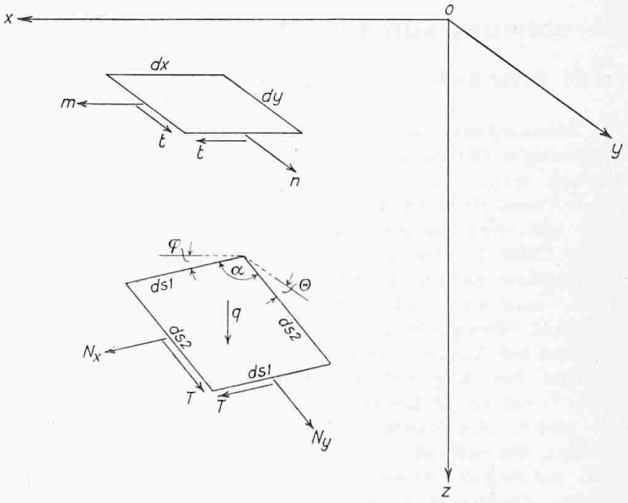


Bild 3. Spannungen am Flächenelement und ihre Projektionen auf die xy-Ebene

$$(22)\quad \begin{cases} z_{xx} = \dfrac{1}{a\,(1-u^2)^{3/2}} \\ z_{yy} = \dfrac{1}{b\,(1-v^2)^{3/2}} \\ z_{xy} = 0 \end{cases}$$

Laut Gl. (17) ist nun:

$$(23)\quad F_{xx} = \frac{1}{a^2} F_{uu};\; F_{yy} = \frac{1}{b^2} F_{vv};\; F_{xy} = \frac{1}{a\,b} F_{uv}$$

und setzt man Gl. (22) in Gl. (13) ein, so entsteht die Differenzialgleichung für eine Kreisbogen-Translationsschale in der Form:

$$(24)\quad \frac{F_{uu}}{b\,a^2\,(1-v^2)^{3/2}} + \frac{F_{vv}}{a\,b^2\,(1-u^2)^{3/2}} = -\,q$$

und mit dem Verhältnis der beiden Radien

$$(25)\quad r = \frac{a}{b}$$

in der Form

$$(26)\quad \frac{r\,F_{uu}}{(1-v^2)^{3/2}} + \frac{r^2\,F_{vv}}{(1-u^2)^{3/2}} = -\,q\,a^3$$

Ist $F\,(u, v)$ bestimmt, so sind die Spannungen durch die Gl. (23), (20), (5), (6) und (7)

$$(27)\quad m = \left(\frac{r}{a}\right)^2 F_{vv};\quad n = \left(\frac{1}{a}\right)^2 F_{uu};\quad t = -\left(\frac{r}{a^2}\right) F_{uv}$$

$$(28)\quad \begin{cases} N_x = \dfrac{\cos\Theta}{\cos\varphi}\, m = \sqrt{\dfrac{1-v^2}{1-u^2}}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 F_{vv} \\ N_y = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\Theta}\, n = \sqrt{\dfrac{1-u^2}{1-v^2}}\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 F_{uu} \\ T = t = -\left(\dfrac{r}{a^2}\right) F_{uv} \end{cases}$$

Die Spannungen im Flächenelement in der Richtung ψ (Bild 4) sind:

$$(29)\quad \begin{cases} N_\psi \sin\alpha = N_x \sin^2\psi + 2\,T \sin\psi \sin(\alpha+\psi) + \\ \quad + N_y \sin^2(\alpha+\psi) \\ T_\psi \sin\alpha = N_x \sin\psi \cos\psi + T \sin(\alpha + 2\,\psi) + \\ \quad + N_y \sin(\alpha+\psi)\cos(\alpha+\psi) \end{cases}$$

Die Werte der Hauptspannung von N_ψ bekommt man mit:

$$(30)\quad \operatorname{tg} 2\,\psi = \frac{2\,T \sin\alpha + N_y \sin 2\,\alpha}{N_x + 2\,T\cos\alpha + N_y \cos 2\,\alpha}$$

Handelt es sich um Schalen mit kleinem Stich, so ist die Ermittlung der Hauptspannungen nicht notwendig, da die Hauptrichtungen im Scheitel der Schale mit den Richtungen x und y und mit den Winkelhalbierenden übereinstimmen.

Die Differenzengleichung für die Spannungsfunktion

Eine Näherungslösung der Gl. (26) ist dadurch zu erhalten, dass man die Ableitungen von F durch Differenzen ersetzt. Die Seiten L und l des Rechteckes werden in N gleiche Teile mit den Längen L/N und l/N eingeteilt. Es sei:

$$(31)\quad h = \frac{L}{a\,N};\quad k = \frac{l}{b\,N} = \left(\frac{r}{R}\right) h$$

und

$$(32)\quad R = \frac{L}{l}$$

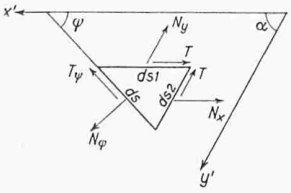


Bild 4. Spannungen am Flächenelement in der ψ-Richtung

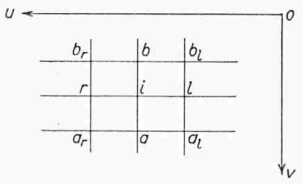


Bild 5. Bezeichnung der Knotenpunkte

Die Knotenpunkte des rechtwinkligen Netzes mit den Seitenlängen h und k sind in Bild 5 bezeichnet. Die zweiten Ableitungen von F können näherungsweise mit folgenden Ausdrücken dargestellt werden, die die Werte von F in den Knotenpunkten des Netzes enthalten:

$$(33)\quad \begin{cases} F_{uu} = \dfrac{1}{h^2}\,(F_r - 2\,F_i + F_l) \\ F_{vv} = \left(\dfrac{R}{r\,h}\right)^2 (F_a - 2\,F_i + F_b) \\ F_{uv} = \dfrac{R}{4\,r\,h^2}\,(F_{ar} - F_{al} - F_{br} + F_{bl}) \end{cases}$$

Diese Ausdrücke sind mit Fehlern behaftet, die mit $h^2 \longrightarrow 0$ unendlich klein werden. Durch Einsetzen der Gl. (33) in der Gl. (26) erhält man:

$$(34)\quad \frac{r\,(F_r - 2\,F_i + F_l)}{(1-v_i^2)^{3/2}} + \frac{R^2\,(F_a - 2\,F_i + F_b)}{(1-u_i^2)^{3/2}} = -\,q\,a^3\,h^2$$

Die Anwendung der Gl. (34) in allen innern Knotenpunkten, unter Berücksichtigung, dass am Rande $F = 0$ ist, ergibt so viele lineare Gleichungen wie unbekannte Werte von F. Mit den Wurzeln dieses Gleichungssystems und mit den Gl. (33) und (28) lassen sich die Spannungen zu

$$(35)\quad \begin{cases} N_x = \sqrt{\dfrac{1-v_i^2}{1-u_i^2}}\left(\dfrac{R}{a\,h}\right)^2 (F_a - 2\,F_i + F_b) \\ N_y = \sqrt{\dfrac{1-u_i^2}{1-v_i^2}}\left(\dfrac{1}{a\,h}\right)^2 (F_r - 2\,F_i + F_l) \\ T = -\,\dfrac{R}{4a^2h^2}\,(F_{ar} - F_{al} - F_{br} + F_{bl}) \end{cases}$$

berechnen.

Die Genauigkeit der Ergebnisse wird mit kleineren h und k, d. h. mit der Vermehrung der Gleichungen für die F-Werte, immer besser. Bild 6 enthält die Koeffizienten von F in den Knotenpunkten a, b, l, r und i, womit die Gleichungen sofort angeschrieben werden können.

Das Gleichungssystem kann mit $-\,q\,a^3\,h^2 = 1$ gelöst werden. Die Wurzeln

$$(36)\quad f_i = -\,\frac{F_i}{q\,a^3\,h^2}$$

sind dann mit dem Multiplikator $M = -\,q\,a^3\,h^2$ zu multiplizieren.

Bestimmung von T am Rande

Durch die letzte der Gl. (35) kann der T-Wert am Rande nicht berechnet werden, da die Existenz von Knotenpunkten ausserhalb des Rechteckes mit den Seiten L und l vorauszusetzen wäre. Diese Schwierigkeit ist für alle Randknotenpunkte leicht zu überwinden, ausgenommen für die vier Ecken des Rechteckes.

Da auf den Seiten $x = \pm\,\dfrac{L}{2}$ $N_x = 0$ ist (d. h. der Schalenrand bleibe den Annahmen entsprechend vollkommen frei von Kräften), ergibt sich aus den Gl. (27) und (28): $F_{vv} = 0$. Gl. (26) wird für diesen Teil des Umfanges

$$(37)\quad F_{uu} = -\,(1-v^2)^{3/2}\,\frac{q\,a^3}{r}$$

oder mit Gl. (33)

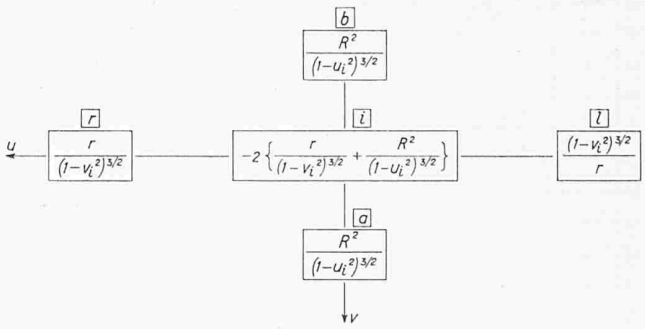


Bild 6. Berechnungsschema für Translationsschalen aus Kreisbögen

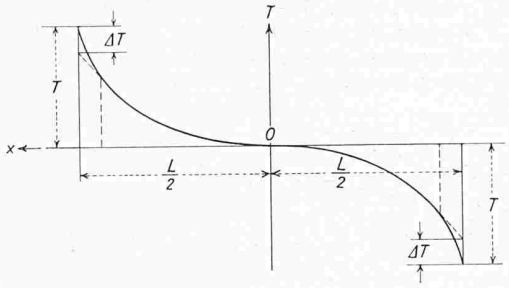


Bild 7. Verteilung der Schubkräfte am Schalenrand

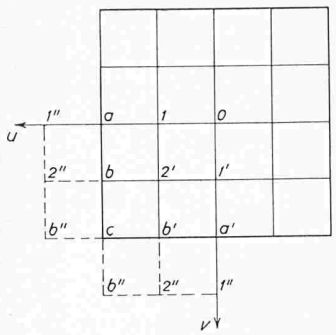


Bild 8. Knotenpunkte für eine Aufteilung der Seiten in vier gleiche Teile

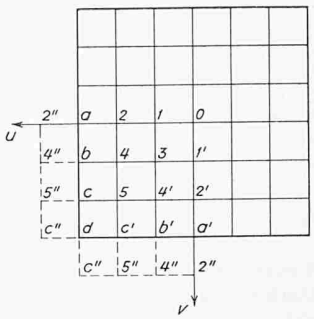


Bild 9. Knotenpunkte für eine Aufteilung der Seiten in sechs gleiche Teile

(37a) $F_r - 2F_i + F_l = -(1 - v_i^2)^{3/2} \dfrac{q a^3 h^2}{r}$

Am Rande ist aber $F_i = 0$, somit lautet Gl. (37a):

(38) $F_r + F_l = -(1 - v_i^2)^{3/2} \dfrac{q a^3 h^2}{r}$

Gl. (38) liefert F_r für $x = +\dfrac{L}{2}$, da für diesen Teil F_l bekannt ist, oder F_l für $x = -\dfrac{L}{2}$, wenn F_r gegeben ist. Analog erhält man F_a aus F_b und F_b aus F_a auf den Seiten $y = \pm \dfrac{l}{2}$ in der Gleichung

(38a) $F_a + F_b = -(1 - u_i^2)^{3/2} \dfrac{q a^3 h^2}{R^2}$

In den Ecken des Rechteckes kann nicht gleichzeitig $N_x = N_y = 0$ sein und die Gl. (26) erfüllt werden, mit andern Worten: in diesen Punkten ist die Belastung q nicht im Gleichgewicht mit den Spannungen N, und die Membranspannung T wird theoretisch unendlich. Ein annehmbarer T-Wert in den Ecken wird durch die Gleichgewichtsbedingung der ganzen Schale in vertikaler Richtung erreicht. Zu diesem Zwecke rechnet man mit Hilfe der numerischen Integration (Simpsonregel) und mit unbekannten T-Werten in den Ecken die Komponente in der z-Richtung der Resultierenden der T-Spannungen am Rande und setzt diese Komponente von T gleich der gesamten Last Q, durch die die Schale belastet wird. Man erhält so die Gleichung, die die T-Werte in den Rechteckecken ergibt, die von der Steifigkeit der seitlichen Bogenscheiben abhängen.

Da in den Ecken die Bogenscheiben gegenseitig senkrecht zur eigenen Ebene stehen, ist es nicht streng richtig, dass N_x und $N_y = 0$ sind. Bei einer Schale auf quadratischem Grundriss ist z. B. der Symmetrie wegen $F_{uu} = F_{vv}$ und mit $r = 1$ nach Gl. 26

$$F_{vv} = F_{uu} = -(1 - u^2)^{3/2} \frac{q a^3}{2}$$

und die Gl. (28) wird mit $\varphi = \Theta$

(39) $N_x = N_y = -(1 - u^2)^{3/2} \dfrac{q a}{2}$ (in den Ecken)

Da in den Schalenecken auf quadratischem Grundriss $N_x = m$ ist, so entspricht nach Gl. (8) das Intervall des Wer-

Tabelle 2. Knotenpunktwerte zu Bild 9

Punkte	f_i	N_x/qa	N_y/qa	T/qa
0	— 2,4858	— 0,5000	— 0,5000	0
1	— 2,2358	— 0,4519	— 0,5274	0
2	— 1,4509	— 0,2970	— 0,6279	0
3	— 2,0130	— 0,4793	— 0,4793	— 0,1123
4	— 1,3109	— 0,3199	— 0,5821	— 0,2312
5	— 0,8650	— 0,4191	— 0,4191	— 0,5033
a	0	0	— 0,8660	0
b	0	0	— 0,8420	— 0,2978
c	0	0	— 0,7345	— 0,8951
d	0	0	0	— 1,5902

Tabelle 1. Knotenpunktwerte zu Bild 8

Punkte	N_x/qa	N_y/qa	T/qa
0	— 0,5000	— 0,5000	0
1	— 0,3912	— 0,5642	0
2	— 0,4539	— 0,4539	— 0,2707
a	0	— 0,8660	0
b	0	— 0,8120	— 0,6664
c	0	— 0,0000	— 1,3424

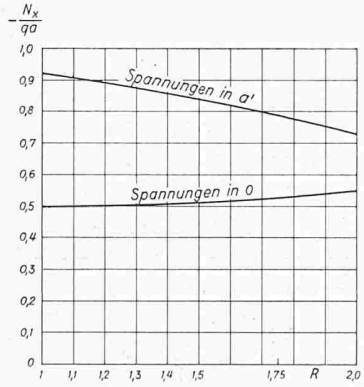


Bild 10

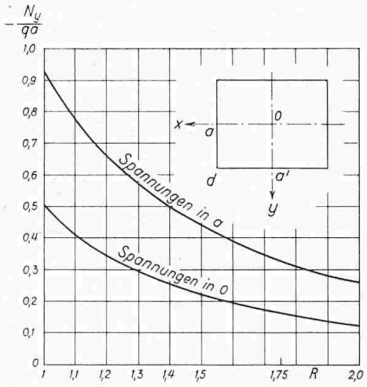


Bild 11

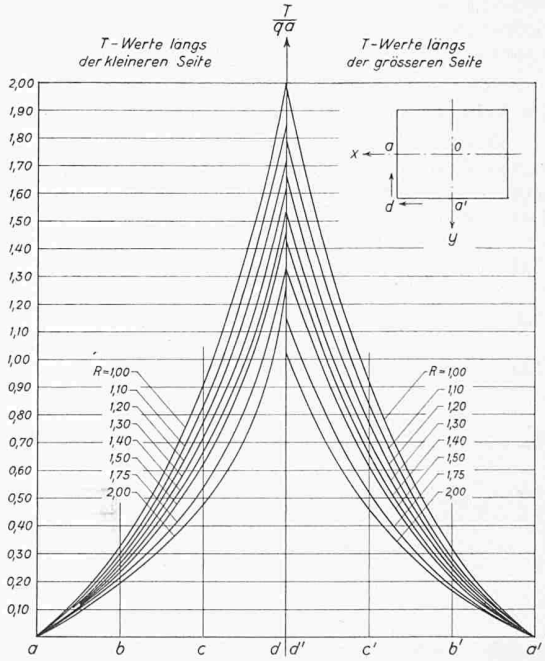


Bild 12

tes $N_x = m$ zwischen Null und dem Wert, den die Gl. (39) ergibt, einem Intervall ΔT in der Grösse des N_x-Wertes (in den Ecken) und entgegengesetzt dem T-Wert. Dann erhält man den T-Wert, indem man dem Ergebnis aus der Gleichgewichtsbedingung für die ganze Schale den Wert

$$(40) \quad \Delta T = + (1 - u^2)^{3/2} \frac{q a}{2}$$

hinzufügt.

Gleichartige Verbesserungen kann man für den Fall einer Schale über rechteckigem Grundriss schätzen, indem man die Belastung q in den Ecken auf N_x und N_y im Verhältnis der Quersteifigkeit der Bogenscheiben verteilt.

Da ΔT positiv ist, wenn T negativ ist und umgekehrt, sind die mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung für die ganze Schale in der z-Richtung ermittelten absoluten Werte grösser als die wirklichen Werte von T. In Wirklichkeit verkleinert sich die Steifigkeit der Bogenscheiben in der horizontalen Richtung vom Kämpfer zum Scheitel. Deshalb können die T-Werte in den Ecken durch eine Gerade an die kontinuierliche Verteilung der T-Werte am Rande erhalten werden. Der Berührungspunkt zwischen Tangente und Kurve ist dort anzunehmen, wo die Bogenscheibe ihre Fähigkeit, sich in horizontaler Richtung zu widersetzen, aufgibt (Bild 7). Dieser so ermittelte Wert ist für die Praxis genügend genau, wobei aber nicht zu vergessen ist, dass für die strenge Lösung des Eckenproblems die Biegesteifigkeit der Schale in Rechnung gesetzt werden muss.

Numerisches Beispiel für eine Schale mit quadratischem Grundriss

Um die vorliegende Theorie besser zu erläutern, werden im folgenden die Membranspannungen infolge gleichmässiger Belastung in einem numerischen Beispiel ermittelt.

Die Schale habe folgende charakteristische Eigenschaften:

$$R = \frac{L}{l} = 1; \quad r = \frac{a}{b} = 1; \quad \frac{L}{2a} = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$L = a; \quad \frac{L}{f} = \frac{1}{1 - \cos 30°} = 7{,}46$$

wobei f den Stich der Randbogenscheiben bedeute. Durch Aufteilung der Seiten in vier gleiche Teile sind, infolge Symmetrie der Schale und der Belastung bezüglich der Hauptaxen und der Diagonalen, nur drei f_i-Werte zu berechnen. Die f_i-Werte in den in Bild 8 bezeichneten Knotenpunkten betragen:

$$f_0 = -1{,}0827; \quad f_1 = -0{,}8327; \quad f_2 = -0{,}6433;$$
$$f_a = f_b = f_c = 0$$

und mit Hilfe der Gl. (38) werden:

$$f_1'' = 1{,}8327 \text{ und } f_2'' = 1{,}5510$$

In der Tabelle 1 sind die Werte N_x, N_y und T in den Knotenpunkten von Bild 8 mit den oben erwähnten Werten f_i zusammengestellt. T_c wurde mit der Gleichgewichtsbedingung für die ganze Schale in der z-Richtung zu $\frac{T_c}{q a} = 1{,}6672$ ermittelt, wovon nach Gl. (40) $\frac{\Delta T_c}{q a} = 0{,}3248$ abzuziehen ist.

In Tabelle 2 sind die Werte der Knotenpunkte bei einer Teilung der Seiten in sechs gleiche Teile nach Bild 9 zusammengestellt.

Die mit zwei verschiedenen Teilungen ermittelten Spannungswerte erlauben eine annähernde Bestimmung der Ergebnisse, die man erhalten würde durch Aufstellen eines Gleichungssystems von Differentialgleichungen mit einer unendlich kleinen Aufteilung der Seiten.

Bezeichnet man mit s irgendeine Spannung m, n oder t und mit den Indices 1 und 2 die erhaltenen Werte mit einer Teilung N_1 und N_2, so lautet die Extrapolationsformel:

$$(41) \quad s]_{h=0} = \frac{N_2^2 s_2 - N_1^2 s_1}{N_2^2 - N_1^2}$$

Aus den Tabellen 1 und 2 erhält man also folgende Werte für die Teilungen in vier und sechs gleiche Seitenabschnitte:

$$N_y = -0{,}8120 \text{ und } N_y = 0{,}7987$$

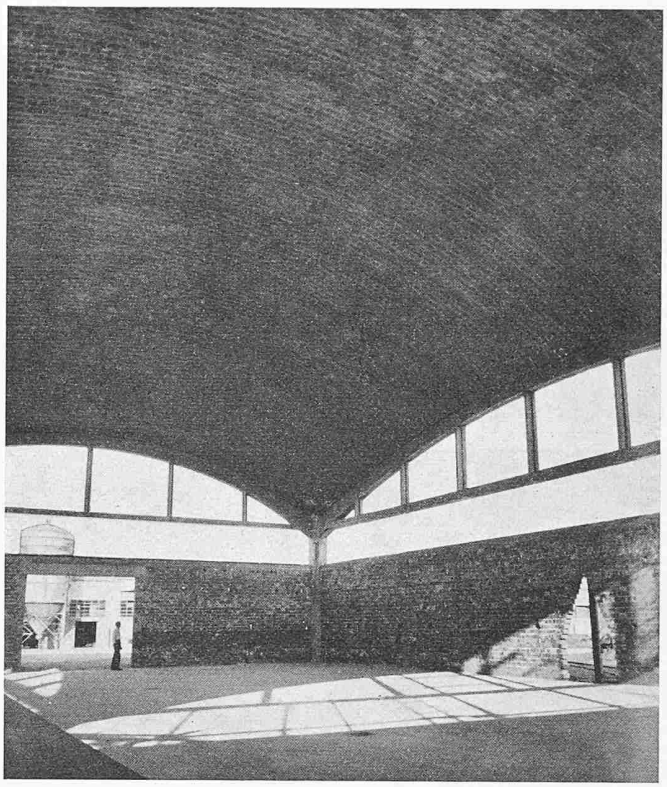


Bild 13. Halle der Prüfungsanstalt in Pontenure

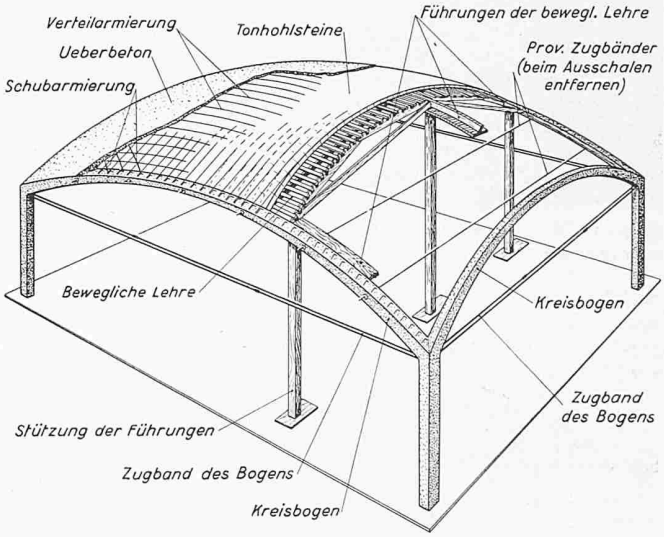
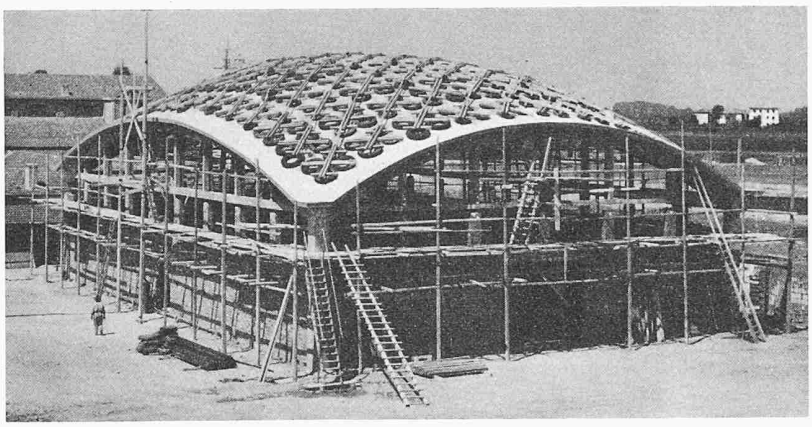
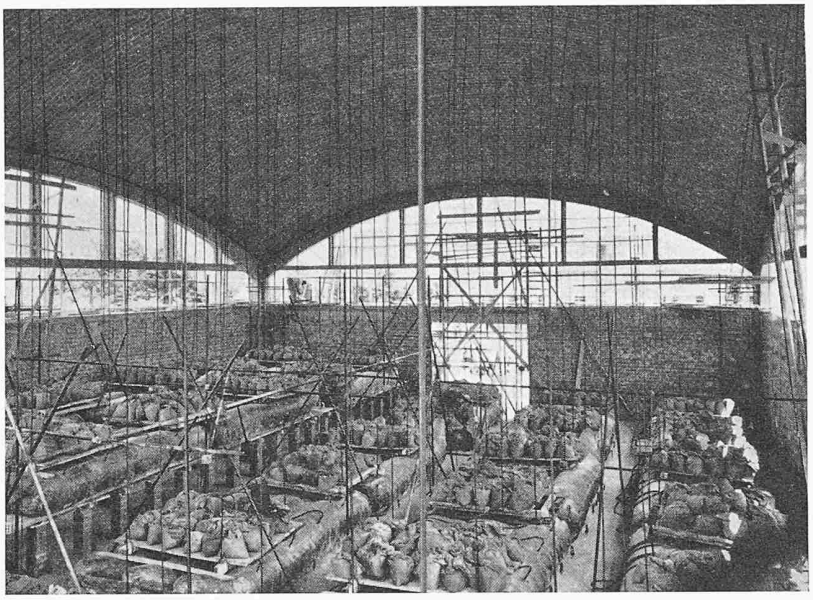


Bild 14. Arbeitsvorgang

Bild 15. Ausführung der Schale mit einer beweglichen Lehre





Bilder 16 und 17. Aussen- und Innenansicht der Halle für die Prüfanstalt Fornaci RDB während der Belastungsproben

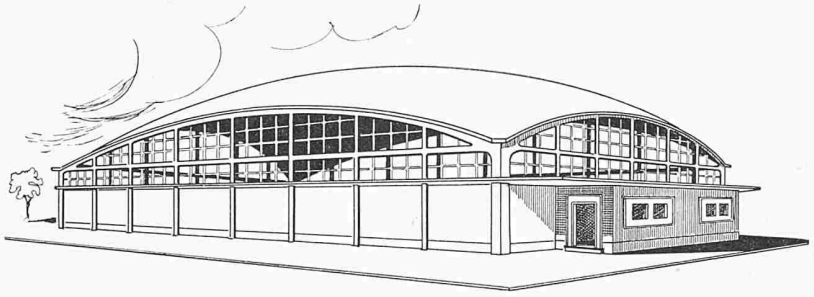


Bild 18. Beispiel einer Turnhalle

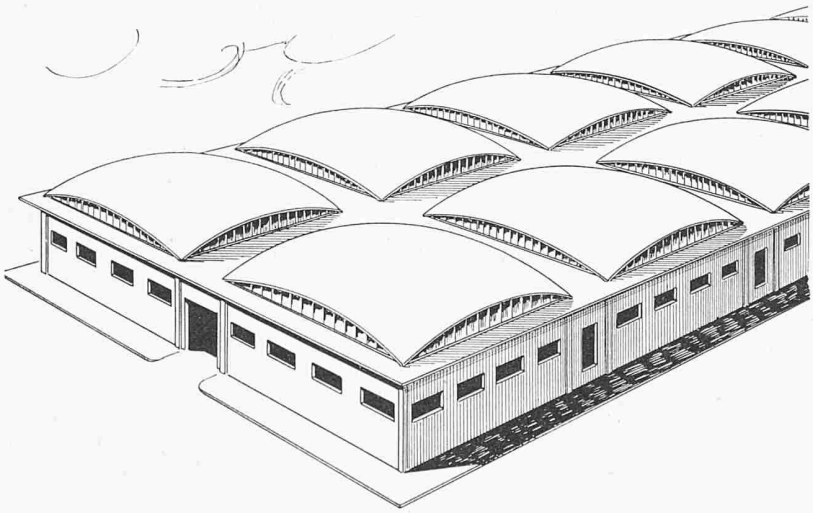


Bild 19. Beispiel einer Fabrikanlage

(wobei letzterer Wert durch quadratische Interpolation der Werte N_y am Rande ermittelt wurde).

Der Wert N_y für eine unendliche Teilung der Seiten wäre nach Gl. (41):

$$N_y]_{h=0} = -\frac{36 \cdot 0{,}7987 - 16 \cdot 0{,}8120}{36 - 16} =$$

$$= -0{,}7881$$

Nimmt man diesen Wert als genau an, so ergibt dies eine Ungenauigkeit gegenüber einer Teilung in sechs Teile von nur 1,3 %.

Eine weitere Bestätigung der genügenden Annäherung der obigen Werte ist der Vergleich mit den von W. Flügge [3] auf ganz andere Weise entwickelten Differentialgleichungen für die gleiche Schalenform.

Die grösste Differenz der Spannungswerte entsteht in den Ecken und beträgt rd. 10 %. Es wird schwer zu entscheiden sein, welche Werte der Wirklichkeit am nächsten kommen.

Für eine Schale mit rechteckigem Grundriss und dem Seitenverhältnis zwischen 1 und 2 sind in den Diagrammen Bild 10, 11 und 12 die von Prof. M. G. Salvadori [5] berechneten Werte für den besonders wichtigen Fall, dass die seitlichen Bogenscheiben alle gleichen Stich ($F = f$) und das Verhältnis von $F/L = 1/10$ haben, zusammengestellt.

Versuche und Prüfungsergebnisse von Tonhohlstein-Schalen

Die bekannte Firma «Fornaci RDB» in Piacenza hat in ihrer Ziegelei von Pontenure seit 1943 verschiedene doppelt gekrümmte Translationsschalen errichtet und sorgfältig geprüft, um folgendes feststellen zu können: 1. Wie weit kann die Membrantheorie in solchen Konstruktionen Anwendung finden? 2. Wie können die Ausführungsschwierigkeiten von doppelt gekrümmten Schalen überwunden werden, insbesondere die hohen Kosten für die nötigen Schalungen? 3. Können Eisenbetonschalen eventuell durch solche aus Tonmaterial ersetzt werden, was bezüglich Kälte- und Wärmeschutz von Bedeutung wäre?

Eine doppelt gekrümmte Schale aus Tonhohlsteinen über einem Grundriss von 6,20 × 5,30 m wurde bis zum Bruch belastet. Eine weitere Translationsschale wurde in den Jahren 1953/1954 über einem Grundriss von 15,0 × 20,0 m aus STAR-Tonhohlsteinen, 12 cm stark, errichtet und geprüft.

Mit den Erfahrungen aus den Prüfungsergebnissen wurde diese Konstruktion für verschiedene weitere Bauobjekte verwendet. 1956 hat man bei der oben erwähnten Ziegelei eine Halle für die Prüfungsanstalt des technischen Büros der «Fornaci RDB» errichtet (Bild 13). Die Translationsschale bedeckt eine Fläche von 30 × 20 m und ist am Rand auf vier Kreisbogenscheiben mit einem Stich von 3 m aufgelagert. Die Bogenscheiben werden in den Ecken von vier Säulen getragen. Die Schale besteht aus STAR-Tonhohlsteinen 12 cm stark mit 3 cm Ueberton; sie wurde ohne Schalung nur mit einer beweglichen Lehre erstellt. Die Zugbänder der Bogenscheiben, die den horizontalen Schub aufzunehmen hatten, wurden vorgespannt.

Der Arbeitsvorgang war folgender (Bild 14): 1. Betonieren der Fundamente und Säulen in den vier Grundrissecken, Verlegen der Kabel in den Zugbändern der Bogenscheiben und Betonieren der Bögen und der Zugbänder. — 2. Anbringen von provisorischen Zugbändern mit Spannschlössern, die in den Bogenscheiben der längeren Rechteckseite verankert sind, zur Aufnahme des Horizontalschubes. Erstellen der Schale aus Tonhohlsteinen 12 cm stark unter Verwenden einer

beweglichen Lehre (Bild 15). — 3. Erste Stufe der Vorspannung der Zugbänder zur Aufnahme des Eigengewichtes des Tonmaterials, des Ueberbetons und des Eigengewichtes der Bogenscheiben (rd. ⅔ der Totalvorspannung). Damit wurde eine automatische Entlastung der Schalung erreicht. — 4. Aufbringen der Ueberbetonschicht (3 cm), Verlegen der Armierung und Betonieren der Schalenecken. — 5. Vollständige Vorspannung und Injizieren der Kabel. — 6. Entfernen der provisorischen Zugbänder.

Die Kontrolle und Prüfung der Schale, die Dr. Ing. Franco Levi [8], Professor für Statik am Polytechnikum in Turin, anvertraut wurde, wurde so ausgeführt, dass klar und deutlich hervorging, wie weit die Theorie, die als Grundlage für die Dimensionierung verwendet wurde, anwendbar ist.

Für die Prüfungen wurden 133 Deformeter (nach Witthemore) verwendet, davon 32 an den Zugbändern der Bogenscheiben, 24 an den Kreisbögen, 54 an der äussern Schalenfläche, 23 an der innern Schalenfläche. Ausserdem wurden 35 Durchbiegungsmesser angebracht, davon 8 in horizontaler Stellung in den Schalenecken, 4 in horizontaler Stellung im Scheitel der seitlichen Bogenscheiben, 23 in vertikaler Richtung symmetrisch zur Schalenmitte längs der Hauptachsen und Diagonalen.

Es wurden total rd. 3000 Ablesungen gemacht für folgende Belastungsannahmen: Unbelastete Schale (9 Proben), 50 kg Nutzlast symmetrisch (1 Probe), 100 kg Nutzlast symmetrisch (4 Proben), 50 kg Nutzlast asymmetrisch (2 Proben), 100 kg Nutzlast asymmetrisch (2 Proben). Hinzu kamen rd. 50 kg/m² für die Installationen zur gleichmässigen Verteilung der Nutzlast auf die Schale.

Um den Einfluss der Temperaturänderungen auf die Ablesungen auf ein Minimum herabzusetzen, mussten die Belastungen und Entlastungen in kurzen Zeitspannen erfolgen können. Dies wurde dadurch erreicht, dass man Bretterroste mit Sandsäcken an Kabel aufhängte, die ihrerseits durch die Schale geführt und an einem Balkenkreuz, das auf vier Pneureifen aufgelagert war, befestigt wurden. Die Bretterroste mit den Sandsäcken lagen auf 20 Schlauchbooten der Genietruppen, die man von einer Zentrale aus gleichmässig mit Druckluft aufblasen konnte, womit die Schale entlastet wurde. Durch Entzug der Druckluft konnte die nötige Belastung auf die Schale gebracht werden. So war es möglich, innerhalb weniger als 10 Minuten jede Belastung zu bewirken (Bilder 16 und 17).

Die *Ergebnisse* der ausgeführten Kontrollen und Prüfungen können folgendermassen zusammengefasst werden:

Im allgemeinen stimmten die Ergebnisse von Berechnung und Prüfung gut überein. Der ganze zentrale Teil der Schale wurde dem Membranspannungszustand unterworfen. Dieser Spannungszustand wurde in den Randzonen durch die Durchbiegungen der Bogenscheiben gestört. Interessanterweise war die Uebereinstimmung zwischen Membranspannungszustand und Versuchsergebnissen nach der ersten Vorspannungsstufe besser, da die Tonhohlsteinschale vor dem Einbringen des Ueberbetons der zahlreichen Arbeitsfugen wegen eine grössere Flexibilität aufwies. Ein Versteifen der Bogenscheiben würde die Durchbiegung und damit die Störungen in den Randzonen der Schale vermindern. Trotz verschiedenen und wiederholten Belastungsarten ist das Verhalten der Schale als ausserordentlich gut zu betrachten. Die Versuchsergebnisse bewiesen, dass eine symmetrische oder asymmetrische Belastung sehr geringe Verformungen verursachte und dass die örtlichen Biegebeanspruchungen begrenzt sind. Da starke Differenzen im thermischen Beharrungsvermögen zwischen Schale, Bogenscheiben und Schalenverstärkungen vorhanden sind, ist sehr wahrscheinlich mit einigen Rissen in der Schale zu rechnen, die die Funktion hätten, die Flexibilität vor Einbringen des Ueberbetons und der Verstärkungen in den Eckpunkten wiederherzustellen. In statischer Hinsicht sind diese Risse unbedeutend. Um diese Risse-Erscheinungen zu begrenzen, ist die Anordnung einer Isolierschicht über der ganzen Schale vorteilhaft, damit die Wirkungen der täglichen Temperaturänderungen verlangsamt werden.

Schlussbemerkungen

Das Erstellen von doppelt gekrümmten Translationsschalen aus Tonhohlsteinen ist infolge einfacher und rascher Ausführung, geringem Eigengewicht und Wegfallen der umfangreichen Schalungsarbeiten in statischer und wirtschaftlicher Hinsicht sehr empfehlenswert. Spezielle Anwendungsgebiete dieser doppelt gekrümmten Tonhohlsteinschalen sind z. B. Messehallen, Grossgaragen, Flugzeughallen, Turn- und Fabrikhallen, wobei stützenfreie Grundrisse von mehreren tausend Quadratmetern überdeckt werden können (Bilder 18 und 19). Durch zweckmässige Ausbildung der Bogenscheiben kann der ganze Raum von allen vier Seiten her wirksam und natürlich beleuchtet werden.

Adresse des Verfassers: Dr. *Oskar Gmür*, dipl. Bauingenieur, Rosenbergstr. 112, St. Gallen.

Literaturverzeichnis

[1] *A. Pucher*, Ueber den Spannungszustand in gekrümmten Flächen, «Beton und Eisen», Oktober 1934.
[2] *A. Pucher*, Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzengleichungen, «Bauingenieur», März 1937.
[3] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, Springer, Berlin, 1934.
[4] *M. G. Salvadori*, Le tensioni di membrana nelle volte di traslazione, New York, April 1955.
[5] *M. G. Salvadori*, Analysis and Testing of Translations Shells, «Journal of American Concrete Institute», Juni 1956.
[6] *A. L. Parme*, Hyperbolic paraboloids and other Schells of double curvature, «Journal of the Structural Division Procedings ASCE», September 1956.
[7] *P. Csonka*, Results on Schells of Translation, «Acta Tecnica Academia Scientiarum Hungarica», Tomus X, 1955.
[8] *F. Levi*, Esperienze su di una volta a vela in laterizio armato, «L'Ingegnere», Nr. 3, Anno 1957.
[9] *G. A. Guidi*, Esperienze su volte a doppia curvatura eseguite nello Stabilimento RDB di Pontenure, «Il Laterizio», Bolletino Tecnico RDB, Nr. 39, agosto 1956.
[10] *O. Gmür*, Renovation und Umbau des Bibliothekflügels der Stiftsgebäude in St. Gallen, SBZ 1955, Nr. 25, S. 380.

Erweiterungsbauten für das Technikum Winterthur

DK 373.622

Das Technikum Winterthur umfasst Abteilungen für Hochbau, Tiefbau, Maschinenbau, Elektrotechnik und Chemie. Ihm ist ferner eine Handelsschule angegliedert. Das Studium umfasst an allen Abteilungen sechs Semester. Die meisten Schüler mit Ausnahme der Handelsschüler haben vor ihrem Eintritt eine vollständige Berufslehre absolviert. Die Vergrösserung drängt sich aus drei Gründen auf: Erstens der Wunsch vieler junger Berufsleute nach einer weitergehenden technischen Ausbildung; zweitens die dringende Nachfrage der Industrie nach Technikern; drittens die strukturellen Aenderungen im Wirtschaftsleben durch fortschreitende Technisierung und Automatisierung, wodurch mehr geschulte technische Angestellte benötigt werden. Das Technikum Winterthur hat dieser Entwicklung durch dauernde Vergrösserung der Schülerzahlen Rechnung getragen. Diese stieg in den technischen Abteilungen von im Mittel 658 in den Jahren 1947 bis 1955 auf 941 im Jahre 1958. Um sie zu bewältigen, mussten verschiedene Provisorien getroffen werden.

Die projektierten Erweiterungsbauten, über deren Kreditgewährung im Betrage von 7,83 Mio Fr. das Zürcher Volk am 8. Juni 1958 abzustimmen hat, sollen lediglich der Konsolidierung des durch provisorische Massnahmen heute erreichten Standes dienen. Mit der eben erfolgten Eröffnung des Zentralschweizerischen Technikums in Luzern ist mit einer gewissen Entlastung zu rechnen.

Auch an andern Orten wird über die Gründung ähnlicher Lehranstalten verhandelt. Man frägt sich auch, ob auf die Dauer hinreichend ausgewiesene Kandidaten in genügender Zahl vorhanden sein werden. Hinzu kommen die sehr bedeutenden Kosten für Bau und Betrieb. Das alles zwingt zur Beschränkung.

Das Projekt für die Erweiterungsbauten wurde von Architekt *H. Suter*, Zürich, Professor am Technikum Winterthur, in Arbeitsgemeinschaft mit Architekt *W. Custer*, Zürich, ausgearbeitet. Es sieht den Neubau eines Physikgebäudes auf kantonseigenem Grundstück westlich des alten Hauptgebäudes