

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 74 (1956)
Heft: 26

Artikel: Bemerkungen zur Schweizerischen Klothoidentafel
Autor: Peter, G. / Peter, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-62663>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bemerkungen zur Schweizerischen Klothoidentafel¹⁾

DK 625.724

Von G. & H. Peter, Dipl. Ing. ETH, Bern

Das stattliche Werk mit dem klaren Druck von Wort und Zahl bildet eine wichtige Grundlage der technischen Liniengestaltung beim Ausbau des Schweizerischen Strassen-netzes, der wirtschaftlich von grosser Bedeutung ist. Mancher Fachmann hätte es wohl begrüsst, wenn der im Gegensatz zu den ausführlichen Tabellen sehr knapp gehaltene Erläuterungstext etwas eingehender gestaltet worden wäre; denn seine Zeit wird durch berufliche Arbeit schon voll beansprucht; aber er möchte die Sache doch verstehen, und zwar ohne sich selbst in die verirrlichen Dschungel des Schrift-tums stürzen zu müssen. Die nachfolgenden Ausführungen haben den Zweck, ihm zu dienen.

1. Der Zusammenhang zwischen rechtwinkligen Koordinaten und Bogen- und Evolventenlängen

Bei einer mathematischen Kurve interessiert in erster Linie deren Gleichung. Gerhard Schramm²⁾ sagt: «Für die Ordinaten der Klothoide lässt sich keine Gleichung von der Form $y = f(x)$ angeben. Sie können vielmehr nur durch Reihenentwicklung ermittelt werden, was sehr umständlich ist.» Damit verhält es sich wie folgt:

Die bekannte Gleichung (1) $y = \frac{x^3}{6RL}$ stellt eine Klothoide dar, wenn x und y nicht als rechtwinklige Koordinaten deklariert werden, sondern x als Bogenlänge AP und y als Evolventenlänge des Klothoidenpunktes P , wobei die Klothoide, ausgehend von $P(x, y)$, auf die Grundtangente abgewickelt gedacht wird. Man kann sie Evolventengleichung der Klothoide nennen und zur Vermeidung von Verwechslungen in der Form

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{\lambda^3}{6RL} \text{ schreiben.}$$

R und L sind Krümmungsradius und Bogenlänge irgend eines bekannten Punktes E ($\rho = R$, $\lambda = L$); nach dem Krümmungsgesetz der Klothoide ist bekanntlich $RL = \rho\lambda = a^2$, es ist $1/RL = 1/\rho\lambda = 1/a^2$ die spezifische Krümmungsänderung.

Wickelt man die Klothoide, ausgehend vom Punkt E (R, L), auf die Grundtangente ab, so wird

$$(2) \quad \varepsilon_E = \frac{L^3}{6RL} = \frac{L^2}{6R}$$

Wickelt man sie, ausgehend vom Ursprung A ($\infty, 0$), auf die Endtangente in E ab, so wird

$$(2a) \quad \varepsilon_A = \frac{L^3}{3RL} = \frac{L^2}{3R}$$

Irgend zwei Klothoidenpunkte $P_1(\lambda_1, \rho_1)$ und $P_2(\lambda_2, \rho_2)$ haben die im Bild 1 eingezeichneten Evolventen in bezug auf ihre gegenseitigen Tangenten

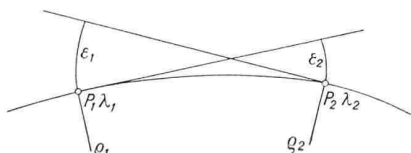


Bild 1.

$$(3) \quad \varepsilon_1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 (2\rho_1 + \rho_2)}{6\rho_1\rho_2} \quad \text{und}$$

$$(3a) \quad \varepsilon_2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 (2\rho_2 + \rho_1)}{6\rho_1\rho_2}$$

¹⁾ Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Strassenfachmänner VSS. Verfasser: Pierre Klaus †, Leitung: VSS-Kommission 1 für Projektierung. Druck: Sauerländer & Co., Aarau, 1953. Vgl. die Mitteilung in SBZ 1954, Nr. 11, S. 149.

²⁾ Bogengestaltung und Bogenabsteckung, Berlin 1949.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Klothoidenpunktes $P(\lambda, r) = \lambda/2\rho$ lauten in der anschaulichsten Form:

$$(4) \quad x = \lambda \left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \frac{\tau^6}{9360} + \frac{\tau^8}{685440} - \frac{\tau^{10}}{76204800} + \dots \right)$$

$$(5) \quad y = \lambda \left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \frac{\tau^7}{75600} + \frac{\tau^9}{6894720} - \frac{\tau^{11}}{918086400} + \dots \right)$$

Das erste Glied von x ist die Bogenlänge $\lambda = AP$, die durch die übrigen Glieder zur Abszisse reduziert wird. Im Uebergangsbereich genügen im allgemeinen 1 bis 2

Korrekturglieder $-\frac{\lambda\tau^2}{10} + \frac{\lambda\tau^4}{216}$.

Das erste Glied von y stellt die Evolventenlänge

$$\varepsilon = \frac{\lambda^3}{6\rho\lambda} = \frac{\lambda^2}{6\rho} = \frac{\lambda\tau}{3}$$

dar, weil $\tau = \frac{\lambda}{2\rho}$, also $\frac{\lambda\tau}{3} = \frac{\lambda^2}{6\rho}$ ist.

Die übrigen Glieder sind Korrekturglieder, welche die Evolvente zur Ordinate verwandeln. Im allgemeinen genügt ein Korrekturglied, $-\frac{\lambda\tau^3}{42}$ im Bereich der Uebergangskurve.

2. Das Pfeilhöhen-Gesetz

lautet bei rechtwinkligen Koordinaten allgemein

$$(6) \quad f = \frac{d^2 y}{2} \approx \frac{\Delta^2 y}{2}$$

Wenn $\Delta x \leq \rho_{\min}/20$ eingehalten wird, so bleibt der Längenunterschied zwischen Sehne und Bogen kleiner als $\frac{1}{2}\%$.

Bei der kubischen Parabel $y = kx^3/6$ wird $\Delta^2 y/2 = kx\Delta x^2/2$ und $\Delta f = \Delta^3 y/2 = k\Delta x^3/2$ ist konstant, so dass bei regelmässiger Teilung Δx alle Pfeilhöhen zwischen Anfang und Ende auf die einfachste Weise

$$f_1 = 1k\Delta x^3/2, f_2 = 2k\Delta x^3/2, f_3 = 3k\Delta x^3/2 \dots$$

berechnet werden können; sie müssen dann allerdings noch mit $\cos \tau$ reduziert werden.

Aus Gl. (1) kann von der kubischen Parabel auf die Klothoide geschlossen werden:

$$(7) \quad f = \frac{\lambda\Delta\lambda^2}{2a^2} \quad \text{und} \quad (8) \quad \Delta f = \frac{\Delta\lambda^3}{2a^2}$$

gemessen über der Sehne $s = 2\Delta\lambda$ in Evolventen-Richtung, so dass sich eine Reduktion erübrigt. Eine Kontrollrechnung bestätigt die Richtigkeit dieser Schlussfolgerung.

Bei regelmässiger Teilung $\Delta\lambda$ benützt man also von f_1 bis f_{n-1} die Formeln (7) und (8) zur Berechnung der Pfeilhöhen, z. B. Klothoide $L = 53$ m, $R = 100$ m, also $a^2 = 53 \cdot 100 = 5300$.

Die Einteilung ergibt zehn Elemente zu 5,0 m und ein Element zu 3,0 m.

$$(-1) \quad \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \end{array}$$

Mit Hilfe des Pfeilhöhen-Gesetzes

$$\Delta f = \frac{\Delta\lambda^3}{2a^2} = \frac{5^3}{2 \cdot 5300} = 0,0118 \text{ m}$$

erhalten wir rasch und genau:

$f_1 = 11,8 \text{ mm}$, $f_2 = 23,6 \text{ mm}$, $f_3 = 35,4 \text{ mm}$, $f_4 = 47,2 \text{ mm}$,
 $f_5 = 59,0 \text{ mm}$, $f_6 = 70,8 \text{ mm}$, $f_7 = 82,6 \text{ mm}$, $f_8 = 94,4 \text{ mm}$
 und $f_9 = 106,2 \text{ mm}$.

Bei unregelmässiger Teilung und an den Grenzen des Krümmungsgesetzes, für f_o und f_n , versagt diese Berechnung; aber das Schrittmass bietet für solche Fälle über 20 Formeln, die alle in einer einzigen zusammengefasst werden können:

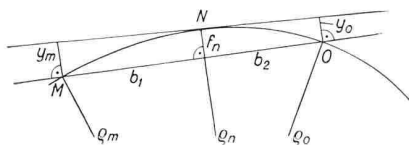


Bild 2.

Nach Bild 2 ist

$$(9) \quad f_n = y_m \frac{b_2}{b} + y_o \frac{b_1}{b} = \frac{b_1^2 (2\rho_m + \rho_n) b_2}{6\rho_m \rho_n b} + \frac{b_2^2 (2\rho_o + \rho_n) b_1}{6\rho_o \rho_n b}$$

Anstelle der zu f parallelen y_m und y_o werden die Evolventen Gl. (3) und (3a) der Bogen MN bzw. ON gesetzt; ferner ist $b_1 = MN$ und $b_2 = NO$ gesetzt mit der Bedingung $b_1 + b_2 = b \leq \frac{\rho_{\min}}{10}$. Ist eine der Teilstrecken b_1 oder b_2 gerade, so wird y_m bzw. $y_o = 0$; ist eine der Teilstrecken b_1 oder b_2 ein Kreisbogen R , so wird $y_m = b_1^2 / 2R$ bzw. $y_o = b_2^2 / 2R$. Ändert sich das Krümmungsgesetz innerhalb einer Teilstrecke b_1 bzw. b_2 , so müssen für y_m bzw. y_o die entsprechenden Evolventen eingesetzt werden, die allenfalls auch graphisch ermittelt werden können.

Mit Hilfe der Gl. (9) können wir nun die noch fehlenden Pfeilhöhen unseres Beispiels berechnen: Zunächst ist

$$f_0 = \frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{5^2}{12\rho_1} = \frac{5^2}{12 \cdot 100 \cdot \frac{53}{5}} = \frac{25}{12 \cdot 1060} = 0,00196 \text{ m}$$

Um f_{10} und f_{11} zu berechnen, benötigen wir die Krümmungsradien

$$\rho_9 = 100 \frac{53}{45} = 117,8 \text{ m}, \quad \rho_{10} = 100 \frac{53}{50} = 106 \text{ m},$$

$$\rho_{11} = \rho_{12} = \rho_{13} = 100 \text{ m}$$

Dann werden nach Gl. (9):

$$f_{10} = \frac{5^2 (2 \cdot 117,8 + 106) 3}{6 \cdot 117,8 \cdot 106 \cdot 8} + \frac{3^2 (2 \cdot 100 + 106) 5}{6 \cdot 100 \cdot 106 \cdot 8} = 0,0428 + 0,0270 = 0,0698 \text{ m} = 69,8 \text{ mm}$$

$$f_{11} = \frac{3^2 (2 \cdot 106 + 100) 5}{6 \cdot 106 \cdot 100 \cdot 8} + \frac{5^2 (2 \cdot 100 + 100) 3}{6 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 8} = 0,0276 + 0,0469 = 0,0745 \text{ m} = 74,5 \text{ mm}$$

$$f_{12} = \frac{5^2 (2 \cdot 100 + 100) 5}{6 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 10} + \frac{5^2 (2 \cdot 100 + 100) 5}{6 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 10} = 2 \cdot 0,0625 = 0,125 \text{ m} = 125 \text{ mm}$$

Bekanntlich ist $f_{12} = \frac{5^2}{2 \cdot 100} = 0,125 \text{ m} = 125 \text{ mm}$, wie vorstehend. Die Gl. (9) gibt übrigens auch den richtigen Wert für $f_0 = \frac{\varepsilon_1}{2}$, ebenso für f_1 bis f_9 .

3. Uebergänge von der Geraden zum Kreis: Normalfall und Scheitelkurve

Normalerweise ist die Länge L der Uebergangskurve und deren Krümmungsradius R am Ende E der Bogenlänge L bekannt, also $E(\lambda = L, \rho = R)$. Bei der Scheitelklothoide ist der Tangentialwinkel und der Minimalradius (im Scheitel) bekannt.

a) Normalfall Seite 28 bis 32, Fig. 14 und 15

Die Orientierung beruht nur auf den rechtwinkligen Koordinaten x_M und y_M des Krümmungsmittelpunktes. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Grundtangente mit S ,

den Fusspunkt von y_M mit B_o , so muss $B_o S = y_M \cdot \tan \gamma / 2$ sein, wobei γ der Zentriwinkel ist. Im Falle der Asymmetrie $E_1 \neq E_2$ hat man zwei Tangentialschnittpunkte S_1 und S_2 , wovon der eine S_1 zum gedachten Fall $E_1 = E'_2$ gehört und der andere S_2 zum gedachten Fall $E'_1 = E_2$. Die richtige Orientierung der Uebergangskurve ist von grundlegender Wichtigkeit.

b) Scheitelklothoide Seite 41 bis 47, Fig. 20 und 21

Hier geht die Orientierung automatisch in Ordnung, weil alles auf den Scheitelpunkt bezogen werden muss. Es drängen sich aber andere Fragen auf:

1. Wäre es nicht ratsam, im Scheitel einen Kreisbogen von angemessener Länge, d. h. ein Teilstück mit konstanter Krümmung und Ueberhöhung einzuschalten, damit die dynamischen Wirkungen verbessert würden?
2. Eine lange Scheitelkurve kann fahrdynamisch nicht begründet werden. Für die Fahrgeschwindigkeit ist der Minimalradius, d. h. die zulässige Radialbeschleunigung massgebend, für die Länge der Uebergangskurve der Ruck, d. h. die spezifische Änderung der Radialbeschleunigung. Es ist verirrlich, den Parameter als Charakteristikum für die Ausbaugeschwindigkeit zu deklarieren, ohne ausdrücklich darauf aufmerksam zu machen, dass die Fahrgeschwindigkeit imperativ durch den Minimalradius begrenzt wird, es mag der Parameter so gross sein als er will. Sprechend ist das Beispiel c) Fig. 22 mit $a = 370$ ($V > 140 \text{ km/h}$) und $R_{\min} = 300 \text{ m}$, d. h. $V_{\max} = 80\text{--}85 \text{ km/h}$. Diese Kurve könnte man um 70 bis 75 % kürzen, ohne dass die Fahrgeschwindigkeit herabgesetzt werden müsste oder man könnte die Fahrgeschwindigkeit um 25 bis 30 % erhöhen, ohne dass die Kurve länger würde.
3. Wäre es nicht ratsam, jedem Radius einen entsprechenden Parameter zuzuordnen, damit der Fahrzeugenker merken kann, was für eine Minimalkurve er zu gewärtigen hat?

4. Uebergänge von Kreis zu Kreis

Normalfall und Scheitelklothoide sind Uebergänge von der Geraden zum Kreis bzw. zum kleinsten Krümmungskreis. Jetzt handelt es sich um Uebergänge von einem grösseren Kreis M_1/R_1 zu einem kleineren M_2/R_2 oder umgekehrt. Die geeigneten Mittel zur Abklärung der bezüglichen Aufgaben sind die Zentrale $M_1 M_2 = m$, die Aehnlichkeitspunkte J und U auf der Zentralen und die Chordale, die senkrecht auf der Zentralen steht (Bild 5, Ei- und S-Linienlage).

Durch die Aehnlichkeitspunkte J und U eines Kreispaares R_1 und R_2 gehen u. a. die gemeinsamen Tangenten dieser Kreise. Die Aehnlichkeitspunkte liegen im Abstand

$$(10) \quad i_1 = m \frac{R_1}{R_1 + R_2} \text{ von } M_1, \text{ bzw. } i_2 = m \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ von } M_2$$

$$(11) \quad u_1 = m \frac{R_1}{R_1 - R_2} \text{ von } M_1, \text{ bzw. } u_2 = m \frac{R_2}{R_2 - R_1} \text{ von } M_2$$

Die Chordale eines Kreispaares R_1 und R_2 hat den Abstand

$$(12) \quad m_1 = \frac{m^2 + R_1^2 - R_2^2}{2m} \text{ von } M_1, \text{ bzw.}$$

$$m_2 = \frac{m^2 + R_2^2 - R_1^2}{2m} \text{ von } M_2$$

Jeder Punkt der Chordalen hat u. a. gleichlange Tangenten an die beiden Kreise R_1 und R_2 .

Positive Abstände i , u und m werden zentripetal, negative zentrifugal aufgetragen; die Enden der zusammengehörigen Masse i_1 , i_2 (J), u_1 , u_2 (U) und m_1 , m_2 (C) müssen zusammenfallen.

Im folgenden werden konzentrische Kreise ausgeschlossen. Dann ergeben sich nachstehende Situationen:

Fall I. Ein kleinerer Kreis M_2/R_2 liegt im Innern eines grösseren M_1/R_1 (Korbbogen-Lage). J und U sind imaginär und der Schnittpunkt C der Chordalen mit der Zentralen liegt ausserhalb M_1/R_1 (Bild 3).

Fall II. Zwei Kreise M_1/R_1 und M_2/R_2 schneiden sich (Ei-Linien-Lage), die Chordale geht durch ihre Schnittpunkte, J ist imaginär. Spezialfall $R_1 = R_2$. (Bild 4).

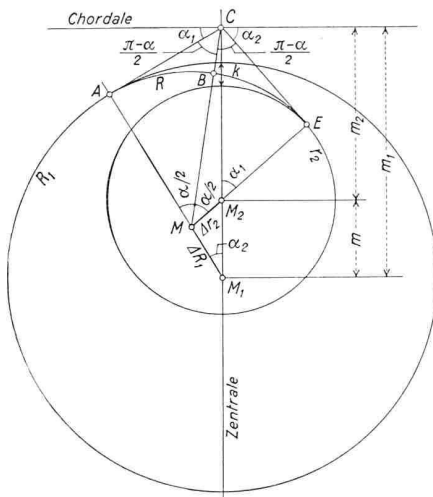


Bild 3. (Fall I) Korbbogenlage

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \cos \alpha_1 &= \frac{R_1}{m_1}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{r_2}{m_2} \\
 (23) \quad t &= \sqrt{m_1^2 - R_1^2} = \sqrt{(m_2 + r_2)(m_2 - r_2)} \\
 (24) \quad \sin \alpha_1 &= \frac{t}{m_1}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{t}{m_2} \\
 (25) \quad \Delta R &= \frac{m m_1}{R_1 + r_2}; \quad \Delta r = \frac{m m_2}{R_1 + r_2} \\
 (26) \quad R &= R_1 - \Delta R = r_2 - \Delta r \\
 (26) \quad R &= \frac{R_1 + r_2}{2} - \frac{m^2}{2(R_1 + r_2)} \\
 (27) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{t}{R} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\
 (28) \quad BC &= \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} - R = R \left(\sec \frac{\alpha}{2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

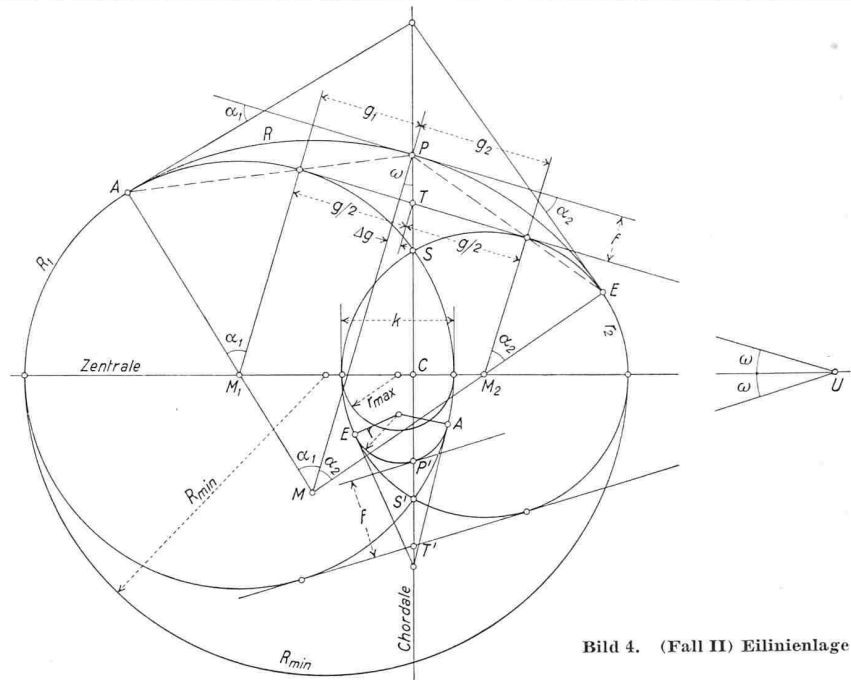


Bild 4. (Fall II) Eilinielage

Außenbogen

$$\begin{aligned}
 (16) \quad g &= \sqrt{m^2 - (R_1 - r_2)^2} \quad (22) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{R_1 - r_2}{g} \quad (23) \quad \Delta g = \frac{R_1 - r_2}{g} f \\
 (24) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} &= \frac{2 g f}{g^2 - 2 f (R_1 - r_2)} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{2 g f}{g^2 + 2 f (R_1 - r_2)} \\
 (25) \quad R &= R_1 + \frac{f}{2} + \frac{\left(\frac{g}{2} - \frac{R_1 - r_2}{g} f \right)^2}{2 f} = r_2 + \frac{f}{2} + \frac{\left(\frac{g}{2} + \frac{R_1 - r_2}{g} f \right)^2}{2 f} \\
 (26) \quad t_R &= R \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \quad t_r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \quad (27) \quad f_{\min} = 0; \quad R_{\max} = \infty \\
 (28) \quad f_{\max} &= \frac{m}{\left[\left(\frac{R_1 - r_2}{g} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}}; \quad R_{\min} = \frac{R_1 + m + r_2}{2} \\
 (29) \quad f_R &= \frac{2 R - (R_1 + r_2) - 2 \sqrt{R^2 - (R_1 + r_2) R + R_1 r_2 - \left(\frac{g}{2} \right)^2}}{2 \left[\left(\frac{R_1 - r_2}{g} \right)^2 + 1 \right]}
 \end{aligned}$$

$$(30) \quad R_1 = r_2 = r \therefore R = r + \frac{f}{2} + \frac{g^2}{8 f}; \quad f_r = R - r = \sqrt{(R - r)^2 - \left(\frac{g}{2} \right)^2}$$

Innenbogen

$$\begin{aligned}
 (25') \quad R &= R_1 - \frac{f}{2} - \frac{\left(\frac{g}{2} + \frac{R_1 - r_2}{g} f \right)^2}{2 f} = r_2 - \frac{f}{2} - \frac{\left(\frac{g}{2} - \frac{R_1 - r_2}{g} f \right)^2}{2 f} \\
 (29') \quad f_R &= \frac{-2 R + (R_1 + r_2) + 2 \sqrt{R^2 - (R_1 + r_2) R + R_1 r_2 - \left(\frac{g}{2} \right)^2}}{2 \left[\left(\frac{R_1 - r_2}{g} \right)^2 + 1 \right]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (30') \quad R_1 = r_2 = r \therefore f_r &= r - R + \sqrt{(R - r)^2 - \left(\frac{g}{2} \right)^2}; \quad R = r - \frac{f}{2} - \frac{g^2}{8 f}
 \end{aligned}$$

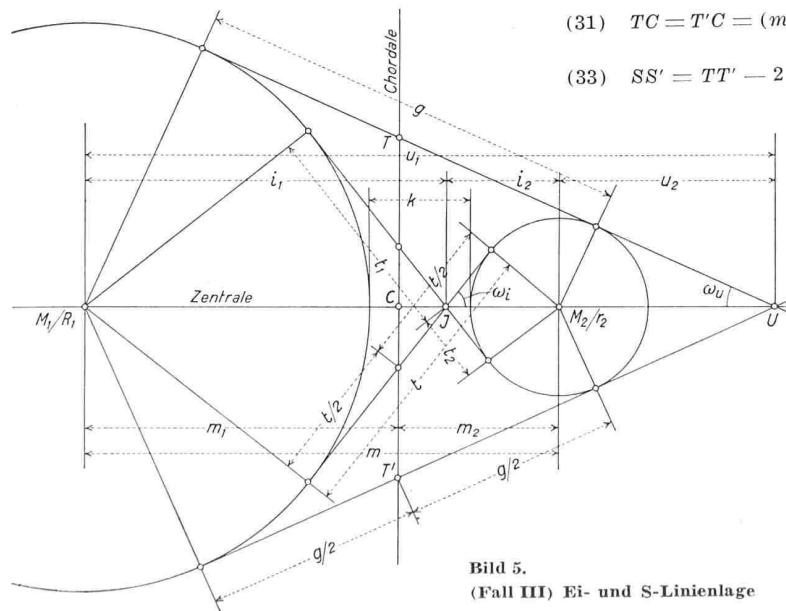
$$(27') \quad f_{\min} = T'S' \therefore r_{\min} = 0$$

$$(28') \quad f_{\max} = \cos \omega \left[T'C - \sqrt{(R_1 - m_1)(r_2 - m_2)} \right];$$

$$r_{\max} = \frac{R_1 + r_2 - m}{2} = \frac{k}{2}$$

$$(31) \quad TC = T'C = (m_2 + u_2) \frac{R_1 - r_2}{g}; \quad (32) \quad TS = \frac{TT'}{2} - \sqrt{\left(\frac{TT'}{2} \right)^2 - \left(\frac{g}{2} \right)^2}$$

$$(33) \quad SS' = TT' - 2 TS \quad (34) \quad TT' = 2 (m_2 + u_2) \frac{R_1 - r_2}{g}$$

Bild 5.
(Fall III) Ei- und S-Linienlage

$$(10) \quad i_1 = \frac{m R_1}{R_1 + r_2} \quad i_2 = \frac{m r_2}{R_1 + r_2}$$

$$(11) \quad u_1 = \frac{m R_1}{R_1 - r_2} \quad u_2 = \frac{m r_2}{r_2 - R_1}$$

$$(12) \quad m_1 = \frac{m^2 + R_1^2 - r_2^2}{2 m} \\
 m_2 = \frac{m^2 + r_2^2 - R_1^2}{2 m}$$

$$(16) \quad g = \sqrt{m^2 - (R_1 - r_2)^2}$$

$$(17) \quad t = \sqrt{m^2 - (R_1 + r_2)^2}$$

$$(18) \quad t_1 = \frac{t R_1}{R_1 + r_2} \quad t_2 = \frac{t r_2}{R_1 + r_2}$$

$$(19) \quad \operatorname{tg} \omega_u = \frac{R_1 - r_2}{g}; \quad \operatorname{tg} \omega_i = \frac{R_1}{t_1} = \frac{r_2}{t_2}$$

$$(20) \quad \sin \omega_u = \frac{R_1}{u_1} = \frac{r_2}{u_2}; \quad \sin \omega_i = \frac{R_1}{i_1} = \frac{r_2}{i_2}$$

$$(21) \quad TC = (m_2 + u_2) \frac{R_1 - r_2}{g} = T'C$$

Fall III. Die beiden Kreise M_1/R_1 und M_2/r_2 liegen ausserhalb einander (Ei- und S-Linienlage), J und U sind reell, C liegt zwischen M_1 und M_2 . Spezialfall $R_1 = r_2$. (Bild 5).

Es ist uns daran gelegen, den Radialsprung k (I) bzw. die gemeinsame äussere Tangente (II und III) zunächst einmal durch einen Kreisbogen R zu überbrücken, der tangential an die Kreisbogen R_1 und r_2 anschliesst, so dass wir die Radialsprünge k frei bemessen können und nicht vor Zwangslagen gestellt sind, die uns zu unzweckmässigen Lösungen nötigen. Denn es besteht zwischen Radialsprung k und Länge λ des Klothoidenbogens die bindende Beziehung

$$(13) \quad \lambda = \sqrt{\frac{24 k R_1 r_2}{R_1 - r_2}} \quad \text{oder} \quad k = \frac{\lambda^2 (R_1 - r_2)}{24 R_1 r_2}$$

Im Fall I, Korbogen-Lage, ziehen wir die Tangenten an die Kreise R_1 und r_2 nicht von einem beliebigen Punkt der Chordalen aus, sondern von deren Schnittpunkt C mit der Zentralen. Dadurch erhalten wir den Kreisbogen mit dem kleinsten möglichen Radius, der ein wenig grösser ist als das harmonische Mittel aus R_1 und r_2 . Die benötigten Formeln (22) bis (28) sind Bild 3 beigelegt. Wenn wir statt R_1 und r_2 in diese Formeln $R_1 - k_1$ bzw. $r_2 + k_2$ einsetzen, so erhalten wir bei A und E die Radialsprünge k_1 und k_2 , welche zweckmässige Uebergangskurven ermöglichen.

Der Fall II, Eilini-Lage, stellt einen typischen Fall mangelhafter Linienführung dar, wenn die gemeinsame Tangente $g = \sqrt{m^2 - (R_1 - r_2)^2}$ der gleichsinnig gekrümmten Kreise R_1 und r_2 zu kurz ist, um regelrechte Uebergangskurven mit einer Zwischengeraden von genügender Länge einschalten zu können [$g < 5(\sqrt{R_1} + \sqrt{r_2})$]. Dabei handelt es sich praktisch meistens um beschränkte Platzverhältnisse, die es nicht erlauben, die Tangente g beliebig zu überschreiten, sondern nur um ein gewisses Mass f . Der Radius R des überbrückenden Kreisbogens wird immer gross, zwischen ∞ und $(R_1 + m + r_2)/2$ für den Aussenbogen und klein für den Innenbogen, zwischen 0 und $k/2$. Der Radius R des Aussenbogens wird um ein zweckmässiges Mass $k_1 = k_2$ vergrössert, um bei A und E die gewünschten Uebergangskurven einlegen zu können; analog muss der Radius des Innenbogens verkleinert werden. Dies ist bei der Festsetzung des Masses f im voraus zu berücksichtigen.

Im Fall III, Ei- und S-Linienlage, haben wir die allgemeinen Formeln (10) bis (21) ebenfalls beigelegt, wie im Fall II, Eilini-Lage (22) bis (34). Wir kommen bei der S-Linie darauf zurück.

5. Länge der Uebergangskurven und Zwischengeraden

Unter Vorbehalt behördlicher Vorschriften über die Länge der Uebergangskurven im Strassenbau bemerken wir dazu:

1. Für den Uebergang von der Geraden zum Kreis r schlagen wir vor

$$(14) \quad l_r = 5 \sqrt{r}$$

2. Für den Uebergang vom Kreis R zum Kreis r wäre dann theoretisch notwendig

$$\lambda = l_r \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Wir schlagen aber vor:

$$(15) \quad \lambda = 2 l_r \left(1 - \frac{r}{R}\right) \leq l_r$$

Als Länge der Zwischengeraden zwischen zwei Kreisen R_1 und r_2 schlagen wir vor:

$$g \geq 5(\sqrt{R_1} + \sqrt{r_2})$$

so dass als gerade Strecke zwischen den Uebergangskurven ungefähr

$$\frac{5(\sqrt{R_1} + \sqrt{r_2})}{2}$$

verbleibt, was in allen Fällen genügen dürfte.

6. Die Ueberbrückung der Radialsprünge k durch Klothoidenbogen

Zwei Kreise M_1/r_2 in Korbogenlage, mit Mittelpunktsabstand m und Radialsprung k auf der Zentralen, unterliegen der Bedingung $m + r_2 + k = R_1$, also $k = R_1 - r_2 - m$ oder $m = R_1 - r_2 - k$.

Wir überbrücken den Radialsprung k mit einem Klothoidenbogen ρ von der Länge λ , der bei A den Krümmungsradius $\rho_A = R_1$, bei E natürlich $\rho_E = r_2$ und in der Mitte B zwischen A und E , das gilt für die Mitte jedes Klothoidenbogens, den Krümmungsradius

$$(35) \quad \rho_B = \frac{2 \rho_A \rho_E}{\rho_A + \rho_E}$$

also das harmonische Mittel aus ρ_A und ρ_E hat.

Diesen Klothoidenbogen ρ denken wir uns entstanden durch Zusammensetzung der Kreisbogen R_1 bzw. r_2 mit einem andern Klothoidenbogen ρ' derart, dass an jeder Stelle

$$(36) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{r_2} - \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} \quad \text{ist.}$$

Für die Mitte B lauten diese Bedingungen übereinstimmend

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\rho'_B} = \frac{1}{\rho_B} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{r_2} - \frac{1}{\rho'_B} = \frac{1}{\rho_B}$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{\rho'_B} = \frac{R_1 + r_2}{2 R_1 r_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{R_1 - r_2}{2 R_1 r_2} \quad \text{oder} \\ \frac{1}{\rho'_B} = \frac{1}{r_2} - \frac{R_1 + r_2}{2 R_1 r_2} = \frac{R_1 - r_2}{2 R_1 r_2}$$

also

$$(37) \quad \rho'_B = \frac{2 R_1 r_2}{R_1 - r_2}$$

Für die Klothoide ρ' gilt $\rho'_B \frac{\lambda}{2} = (a')^2$, also der Parameter

$$a' = \sqrt{\frac{R_1 r_2 \lambda}{R_1 - r_2}}$$

Unter Bezugnahme auf die Evolventengl. (1) können wir setzen:

$$(38) \quad \varepsilon_B = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3}{6 \rho'_B \frac{\lambda}{2}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{12 \frac{R_1 r_2}{R_1 - r_2}} = \frac{k}{2}, \quad \text{woraus Formel (13)}$$

folgt, ferner

$$\frac{6 R_1 r_2}{R_1 - r_2} = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{k}, \quad \text{was wir nachstehend benötigen.}$$

Die Evolventen der Klothoide ρ' in bezug auf den Kreisbogen R_1 erfüllen die Gleichung

$$(39) \quad \varepsilon_R = \frac{\lambda_R^3}{12 \frac{R_1 r_2}{R_1 - r_2} \frac{\lambda}{2}} = \frac{k \lambda_R^3}{2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{\lambda}{2}} = 4k \left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right)^3$$

$$\text{Analog (39) } \varepsilon_r = 4k \left(\frac{\lambda_r}{\lambda}\right)^3$$

Für irgend einen Punkt λ_R oder λ_r der Kreisbogen R_1 oder r_2 , gemessen von A bzw. E aus, erhalten wir also den zugehörigen Punkt der endgültigen Klothoide ρ aus den einfachen Gleichungen (39); ε_R ist radial zentripetal, ε_r radial zentrifugal abzutragen. Zu jedem allenfalls schon abgesteckten Kreispunkt λ_R oder λ_r kann man ε_R oder ε_r in einfachster Weise berechnen. Setzt man $\lambda_R = \lambda/4 = \lambda_r$, so wird $\varepsilon_R = \varepsilon_r = k/16$; in vielen Fällen werden die Punkte $A(0,0)$, $A'(\lambda/4, k/16)$, $B(\lambda/2, k/2)$, $E'(\lambda/4, k/16)$ und $E(0,0)$ für die Absteckung schon genügen, weil weitere Punkte mit Hilfe der Pfeilhöhen nach Belieben eingeschaltet werden können, vorausgesetzt, dass $\lambda/4 \leq r_2/10$ ist.

Die resultierende Klothoide ρ hat folgende Krümmungsradien (die entsprechenden Werte für ρ' sind eingeklammert):

$$\text{In } A: R_1(\infty); \text{ in } B: \frac{2 R_1 r_2}{R_1 + r_2} \left(\frac{2 R_1 r_2}{R_1 - r_2}\right); \text{ in } E: r_2(\infty)$$

woraus folgt

$$(47^1) \quad \lambda = \frac{12}{7} t = \frac{12}{7} \sqrt{m^2 - (R_1 + r_2)^2} =$$

$$= \frac{12}{7} \sqrt{2k(R_1 + r_2) + k^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda R_1}{R_1 + r_2}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda r_2}{R_1 + r_2};$$

$$a_1 = \sqrt{\lambda_1 R_1}; \quad a_2 = \sqrt{\lambda_2 r_2};$$

$$\Delta R_1 = E_1 = \frac{\lambda_1^2}{24 R_1}; \quad \Delta r_2 = E_2 = \frac{\lambda_2^2}{24 r_2}$$

Die praktische Anwendung ist sehr einfach, wie wir am Beispiel, Seite 39 der Klothoidentafel, zeigen wollen, wo es sich um eine S-Linie mit $R_1 = 400$ m, $r_2 = 300$ m und $k = 6$ m handelt.

Es ist

$$(17) \quad t = \sqrt{m^2 - (R_1 + r_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(m + R_1 + r_2)(m - R_1 - r_2)} = \sqrt{(706 + 700)6}$$

$$t = 91,753 \text{ m}, \quad t_1 = 91,753 \frac{4}{7} = 52,430 \text{ m},$$

$$t_2 = 91,753 \frac{3}{7} = 39,323 \text{ m}$$

Nun wird

$$(47) \quad \lambda = \frac{12}{7} 91,753 = 157,291 \text{ m}, \quad \lambda_1 = 157,291 \frac{4}{7} = 89,880 \text{ m},$$

$$\lambda_2 = 67,410 \text{ m}$$

$$(46) \quad \delta = \frac{89,880}{12 \cdot 400} = \frac{67,410}{12 \cdot 300} = 0,018725$$

Die Parameter werden

$$a_1 = \sqrt{89,88 \cdot 400} = 189,5; \quad a_2 = \sqrt{67,41 \cdot 300} = 142,4$$

$$\Delta R_1 = E_1 = \frac{\lambda_1^2}{24 R_1} = 0,8415 \text{ m} \quad \text{und}$$

$$\Delta r_2 = E_2 = \frac{\lambda_2^2}{24 r_2} = 0,6311 \text{ m}$$

Setzt man $\lambda_1 = 8 \cdot \Delta \lambda = 8 \cdot 11,235$ und $\lambda_2 = 6 \cdot \Delta \lambda = 6 \cdot 11,235$, so liefert die Evolventengl. (1) die in Tabelle 1 zusammengestellten Werte.

Tabelle 1.

λ	ε	$\Delta \varepsilon$	$\Delta^2 \varepsilon$	$\Delta^3 \varepsilon$	$f = \frac{\Delta^2 \varepsilon}{2}$
0	0				-2,5 (Gl. 9)
		6,57			
11,235	6,57		39,45		19,7
		46,02		39,44	
22,470	52,59		78,89		39,4
		124,91		39,45	
33,705	177,50		118,34		59,2
		243,25		39,43	
44,940	420,75		157,77		79,0
		401,02		39,46	
56,175	821,77		197,23		98,5
		598,25		39,44	
67,410	1420,02		236,67		118,3
		834,92		39,47	
78,645	2254,94		276,14		138
		1111,06			
89,880	3366				154 (Gl. 9)

Diese Zusammenstellung lässt sich aus

$$\Delta^3 \varepsilon = \frac{\Delta \lambda^3}{a^2} = \frac{11,235^3}{89,88 \cdot 400} = 0,039445$$

4) Die Formeln (46) und (47) lauten mathematisch präziser:

$$(46) \quad \delta = \frac{\lambda}{R_1 + r_2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) \quad (47) \quad \lambda = t/\sqrt{3}$$

Die Abweichung beträgt in jedem Fall nur rund 1%, erscheint also praktisch zulässig.

fast mühelos aufbauen und mit $\varepsilon = \frac{89,88^2}{6 \cdot 400} = 3,366$ m kontrollieren. Sie liefert fast alles, was zur Absteckung notwendig ist; einzig die Mitte $\lambda = 44,94$ m muss noch durch ihre Abszisse genau festgelegt werden. Es ist

$$\tau = \frac{\lambda}{2\rho} = \frac{44,94}{2 \cdot 2 \cdot 400} = 0,028; \quad \tau^2 = 0,00079;$$

$$\frac{\tau^2 \lambda}{10} = 0,00079 \cdot 4,494 = 0,0035$$

Die Abszisse der Mitte beträgt $44,940 - 0,0035 = 44,9365$ Meter. Die Korrektur der zugehörigen Ordinate — $\lambda \tau^3/42$ beträgt — $0,0000236$ m, d. h. praktisch null.

Die Klothoide λ_1 kann also in gleicher Weise abgesteckt werden wie ein Korbbogen-Uebergang; der Radialsprung beträgt $\Delta R_1 = 0,842$ m. Je drei Punkte $\varepsilon = 6,5-52,5-177,5$ Millimeter werden von der Wendetangente und drei in gleicher Weise von der Peripherie R_1 aus abgesteckt; die Mitte ist besonders festgelegt worden.

Für die Klothoide λ_2 ergeben sich auf Grund der Gleichung

$$\Delta^3 \varepsilon = \frac{\Delta \lambda^3}{67,41 \cdot 300} = 0,070124$$

die Zahlen der Tabelle 2.

Tabelle 2.

λ	$\Delta^3 \varepsilon$	$\Delta^2 \varepsilon$	$\Delta \varepsilon$	ε	$f = \frac{\Delta^2 \varepsilon}{2}$
0				0	2,5 (Gl. 9)
			11,687		
11,235		70,124		11,687	35
	70,124		81,811		
22,470		140,248		93,498	70
	70,124		222,059		
33,705		210,372		315,557	105
	70,124		432,431		
44,940		280,496		747,988	140
	70,124		712,927		
56,175		350,620		1460,915	175
		1063,547			
67,410				2524,462	204,3 (Gl. 9)

Die Differenz zwischen Bogenlänge und Abszisse beträgt für die Mitte nur 2,5 mm. Die eine Hälfte der Klothoide λ_2 wird von der Wendetangente, die andere von der Kreis-peripherie r_2 aus abgesteckt wie ein Korbbogen-Uebergang. Sinnsgemäss kann dieses Verfahren im Bereich der Uebergangskurve auf jede Klothoide angewendet werden.

Es wäre aber verfehlt, daraus zu schliessen, dass die Tafeln überhaupt nicht notwendig seien: Diese sind berechnet für ein bestimmtes Argument $l = L/a$ und alle andern Grössen erscheinen zunächst als Funktionen dieses Argumentes. Wenn die Tafeln aber einmal vorliegen, so kann jede bekannte Grösse zum Eingang in die Tafeln benutzt werden, so dass alle übrigen Elemente dann als Funktionen dieses Argumentes den Tafeln entnommen werden können. Die Tafeln haben also im Gegensatz zu den Gleichungen (1), (4) und (5) gewissermassen universellen Charakter.

Adresse der Verfasser: G. & H. Peter, Dipl. Ing., Neubrückstrasse 106, Bern

Die Zonenplanung von Zofingen

DK 711.4

Der 24. Mai 1956 bedeutet für Zofingen einen wichtigen Meilenstein in seiner Ortsplanung, hat doch die Gemeindeversammlung an diesem Tage dem vom Gemeinderat vorgelegten Zonenplan mit Zonenordnung einmütig zugestimmt. Nachdem die Bauverwaltung die notwendigen Unterlagen geschaffen, hat in mehr als zweijähriger, intensiver Arbeit die Planungskommission unter der zielbewussten Leitung von Stadtmann Dr. W. Leber und der massgebenden fachtechnischen Mitwirkung des Ortsplaners Arch. Hans Marti, Zürich, Zonenplan und Zonenordnung ausgearbeitet¹⁾. Während die vorhandenen Wohnquartiere, Industriegebiete und Grün-

1) Eingehend dargestellt in SBZ 1955, Nr. 23, S. 341.