

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 73 (1955)
Heft: 8

Artikel: Stollen mit elliptischem Querschnitt
Autor: Hirschfeld, Kurt
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61858>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

zu wurde ein reichhaltiger Typenkatalog herausgegeben. Das statische System besteht aus zwei Stockwerkrahmen mit zwischen gelegten, frei aufliegenden Balken, unterstützt durch Pendelstützen. Die Einzelteile wiegen nicht über 2 t. Die zweite Möglichkeit, die Plattenbauart, ist für mehrgeschossige Wohnhäuser bis zu fünf Stockwerken vorgesehen. Für die Stockwerkswände und sämtliche Decken werden hierbei vorgefertigte, grossformatige Stahlbetonplatten verwendet. Die tragenden Wandplatten von Zimmerwandgrösse sind 15 cm dick, bestehen aus Einkorn-Ziegelsplittbeton B 60 mit 3 kg/m² Bewehrung und erhalten schon bei der Herstellung aussen eine leichte Wärmedämmungsschicht, innen einen Gipsverputz sowie sämtliche Installationsrohre und -dübel. Die Deckenelemente von Spannweite 3,60 m sind 24 cm dick und 1,80 m breit; sie bestehen aus geschlossenem Ziegelsplittbeton B 160 mit acht röhrenartigen Aussparungen von 17 cm Durchmesser, die mittels aufblähbarer Gummischläuche hergestellt werden. Die Armierung beträgt 5 kg/m², das Gewicht 263 kg/m². Auch Steildächer für Wohnhäuser können aus Stahlbetonfertigteilern

zusammengesetzt werden, wobei die Dachhaut aus wetterbeständigem Beton mitträgt. Dabei beträgt nach dem System Fritzsch-Herrmann, Dresden, der Baustoffbedarf pro m² Grundfläche nur 0,1 m³ Beton und 7,9 kg Rundreisen. Schliesslich behandelt der Aufsatz ausführlich die verschiedenen Systeme grosser ein- und mehrschiffiger Hallenbauten in Umgarn aus Stahlbetonfertigteilern, wobei Einzelelemente bis zu 58 t Gewicht und Spannweiten bis zu 46 m vorkommen. Es wurden besondere Montagegeräte entwickelt. Die Formgebung der Riegel und Träger ist vom Rechteckquerschnitt über den I- und T-Querschnitt zum Fachwerkträger gegangen, der heute als Träger ohne Pfosten überwiegend verwendet wird. Die Stützen werden vorzugsweise im Vierendeel-System ausgebildet. Die Stoßverbindungen stellt man durch Verschweißen der Stahleinlagen und nachträgliches Einbetonieren her. Das Verfahren der «Vorfabrikation von Rahmen in senkrechter Stellung nach Major» wird unter «Mitteilungen» in diesem Heft näher besprochen.

Adresse des Verfassers: Dipl. Ing. H. Jobst, Langhagstr. 45, Liestal.

Stollen mit elliptischem Querschnitt

Prof. Dr.-Ing. habil. Kurt Hirschfeld, Techn. Hochschule, Aachen

DK 624.19.001.2

1. Einleitung

In steigendem Masse werden besonders bei Talsperrenbauten schon seit einiger Zeit statt der Druckrohrleitungen auch Druckstollen angelegt. Auf den ersten Blick könnte man meinen, die Wandlung in der Vorliebe zur Wahl des Stollens sei nicht wirtschaftlich vertretbar. An Hand von Kalkulationen und auch Nachkalkulationen lässt sich jedoch oftmals das Gegenteil nachweisen. Ausserdem sprechen noch eine Reihe anderer Faktoren für den Stollen, wie z. B. die Stahlersparnis und die Vorteile der der Sicht verborgenen Lage.

Obwohl normalerweise für den Stollenquerschnitt der Kreis gewählt wird, sind auch häufig ellipsenförmige Stollenquerschnitte ausgeführt worden. Es soll daher in diesem Beitrag die Ellipse als allgemeine Querschnittsform behandelt werden. Damit lassen sich auch die Spannungen für den Kreisquerschnitt angeben, wenn man die beiden halben Achsen der Ellipse gleichsetzt.

2. Der elliptische Stollen unter Ueberlagerungsdruck

Eine elliptische Öffnung in einer unendlichen Scheibe sei von einem in Richtung der grossen Achse wirkenden gleichmässig verteilten Gebirgsdruck beansprucht. Diese Annahme darf dann als berechtigt gelten, wenn der Stollen so tief unter dem Gelände liegt, dass an den oberen und unteren Begrenzungsschnitten eines Streifens praktisch gleich grosse Vertikallasten zur Wirkung kommen (Bild 1). Die Seitenkräfte sollen als vernachlässigbar klein ausser acht bleiben dürfen. Es soll weiter vorausgesetzt werden, dass das Gestein völlige Isotropie aufweise.

In der Durchführung der Rechnung wird man für die Spannungskomponenten mit Vorteil orthogonale krummlinige Koordinaten verwenden, und zwar in diesem Fall der Form des Öffnungsrandes entsprechend elliptische Koordinaten¹⁾

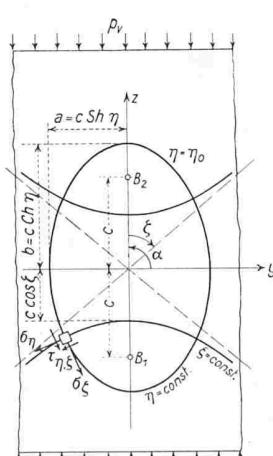


Bild 1. Elliptische Koordinaten

$$(1) \quad z = c \operatorname{Ch} \eta \cos \xi, \quad y = c \operatorname{Sh} \eta \sin \xi$$

benutzen, wobei die Linien $\eta = \text{const}$ Ellipsen und $\xi = \text{const}$ Hyperbeln beschreiben. Die Verzerrungsfaktoren $\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2$ und

¹⁾ Biezeno und Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1953, Verlag von J. Springer, S. 133.

$\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2$ des Fundamentalkreises sind einander gleich

$$(2) \quad h_\eta^2 = h_\xi^2 = c^2 (\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi)$$

Damit nimmt die Bipotentialgleichung $\Delta \Delta F = 0$ die Form

$$(3) \quad \Delta \Delta F \equiv \frac{1}{c^4 (\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi)^4} \left[(\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi)^2 \Delta^* \Delta^* F - 2 (\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi) \left(\operatorname{Sh} 2 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta^* F + \sin 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta^* F \right) + + (\operatorname{Sh}^2 2 \eta + \sin^2 2 \xi) \Delta^* F \right] = 0$$

an, worin $\Delta^* F$ den kartesischen Operator

$$(4) \quad \Delta^* F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}$$

bezeichnet. Die Airy'sche Spannungsfunktion, die der Differentialgleichung (3) genügt, lautet, wie sich durch Differenzieren nachprüfen lässt, allgemein

$$(5) \quad F = \frac{-p_v c^2}{8} \left\{ \operatorname{Sh} 2 \eta - \cos 2 \alpha e^{-2(\eta - \eta_0)} - 2 (\operatorname{Ch} 2 \eta_0 + \cos 2 \alpha) (\eta - \eta_0) + + [\operatorname{Ch} 2(\eta - \eta_0) - 1] e^{2\eta_0} \cos 2(\xi - \alpha) \right\} \quad \text{und für } \alpha = \pi/2$$

$$(6) \quad F = \frac{-p_v c^2}{8} \left\{ \operatorname{Sh} 2 \eta + e^{-2(\eta - \eta_0)} - 2 (\operatorname{Ch} 2 \eta_0 - 1) (\eta - \eta_0) - [\operatorname{Ch} 2(\eta - \eta_0) - 1] e^{2\eta_0} \cos 2 \xi \right\}$$

Mit Hilfe von (6) ergeben sich die Spannungskomponenten in elliptischen Koordinaten η, ξ ausgedrückt

$$(7) \quad \sigma_\eta = \frac{1}{c^2 (\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi)^2} \left[(\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + + \frac{1}{2} \operatorname{Sh} 2 \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \sin 2 \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right]$$

und nach Ausschreiben der Differentialquotienten von (7)

$$\sigma_\eta = \frac{4}{c^2 (\operatorname{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi) \left(\frac{-p_v c^2}{8} \right) 4 [\operatorname{Ch} 2(\eta - \eta_0) - 1] e^{2\eta_0} \cos 2 \xi + + \frac{1}{2} \operatorname{Sh} 2 \eta \left(\frac{-p_v c^2}{8} \right) [2 \operatorname{Ch} 2 \eta - 2 e^{-2(\eta - \eta_0)} - 2 (\operatorname{Ch} 2 \eta_0 - 1) - 2 \operatorname{Sh} 2(\eta - \eta_0) e^{2\eta_0} \cos 2 \xi] - - \frac{1}{2} \sin 2 \xi \left(\frac{-p_v c^2}{8} \right) [\operatorname{Ch} 2(\eta - \eta_0) - 1] e^{2\eta_0} 2 \sin 2 \xi \right\}$$

oder zusammengefasst

$$(7a) \quad \sigma_\eta = \frac{-p_v}{2 (\operatorname{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} \left\{ (2 \operatorname{Ch} 2 \eta \cos 2 \xi - \cos^2 2 \xi - 1) [\operatorname{Ch} 2(\eta - \eta_0) - 1] e^{2\eta_0} + \right.$$

$$+ \operatorname{Sh} 2\eta [\operatorname{Ch} 2\eta - e^{-2(\eta-\eta_0)} - (\operatorname{Ch} 2\eta_0 - 1) - \\ - \operatorname{Sh} 2(\eta-\eta_0) e^{2\eta_0} \cos 2\xi] \}$$

Die Tangentialspannungen werden

$$\sigma_\xi = \frac{1}{c^2 (\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi)^2} \left[(\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \operatorname{Sh} 2\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \sin 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right]$$

und unter Einführung der Ableitungen von (6) und Zusammenfassung

$$\sigma_\xi = \frac{-p_v}{2(\operatorname{Ch} 2\eta - \cos 2\xi)^2} \left\{ 2(\operatorname{Ch} 2\eta - \cos 2\xi) [\operatorname{Sh} 2\eta + \right. \\ \left. + e^{-2(\eta-\eta_0)} - \operatorname{Ch} 2(\eta-\eta_0) e^{2\eta_0} \cos 2\xi] - \right. \\ \left. - \operatorname{Sh} 2\eta [\operatorname{Ch} 2\eta - e^{-2(\eta-\eta_0)} - (\operatorname{Ch} 2\eta_0 - 1) - \right. \\ \left. - \operatorname{Sh} 2(\eta-\eta_0) e^{2\eta_0} \cos 2\xi] + \right. \\ \left. + \sin^2 2\xi [\operatorname{Ch} 2(\eta-\eta_0) - 1] e^{2\eta_0} \right\}$$

Für die Schubspannungen ergibt sich

$$(9) \quad \tau_{\eta\xi} = -\frac{1}{c^2 (\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi)^2} \left[(\operatorname{Sh}^2 \eta + \sin^2 \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sin 2\xi \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \operatorname{Sh} 2\eta \frac{\partial F}{\partial \xi} \right]$$

Führt man auch hier die Differentialquotienten der Lösung (6) ein, so wird nach kurzer Zwischenrechnung

$$(9a) \quad \tau_{\eta\xi} = \frac{p_v}{2(\operatorname{Ch} 2\eta - \cos 2\xi)^2} \left\{ 2(\operatorname{Ch} 2\eta - \right. \\ \left. - \cos 2\xi) \operatorname{Sh} 2(\eta-\eta_0) e^{2\eta_0} \sin 2\xi - \right. \\ \left. - \sin 2\xi [\operatorname{Ch} 2\eta - e^{-2(\eta-\eta_0)} - (\operatorname{Ch} 2\eta_0 - 1) - \right. \\ \left. - \operatorname{Sh} 2(\eta-\eta_0) e^{2\eta_0} \cos 2\xi] - \right. \\ \left. - \operatorname{Sh} 2\eta [\operatorname{Ch} 2(\eta-\eta_0) - 1] e^{2\eta_0} \sin 2\xi \right\}$$

Am Rande der Öffnung, für $\eta = \eta_0$, gewinnen die Ausdrücke der Spannungskomponenten aus (7a), (8a) und (9a) die Form

$$(10) \quad \sigma_\eta (\eta = \eta_0) = 0$$

$$\sigma_\xi (\eta = \eta_0) = \frac{-p_v}{2(\operatorname{Ch} 2\eta_0 - \cos 2\xi)^2} [2(\operatorname{Ch} 2\eta_0 - \right. \\ \left. - \cos 2\xi) (\operatorname{Sh} 2\eta_0 + 1 - e^{2\eta_0} \cos 2\xi) - \right. \\ \left. - \operatorname{Sh} 2\eta_0 (\operatorname{Ch} 2\eta_0 - 1 - \operatorname{Ch} 2\eta_0 + 1 - 0) + \right. \\ \left. + \sin^2 2\xi (1 - 1) e^{2\eta_0}]$$

$$(11) \quad \sigma_\xi (\eta = \eta_0) = \frac{-p_v (\operatorname{Sh} 2\eta_0 + 1 - e^{2\eta_0} \cos 2\xi)}{\operatorname{Ch} 2\eta_0 - \cos 2\xi}$$

$$(12) \quad \tau_{\eta\xi} (\eta = \eta_0) = 0$$

Zur Bestätigung der Richtigkeit des Ergebnisses soll von dem elliptischen Loch auf das kreisförmige geschlossen werden (Bild 2). Führt man den Grenzübergang für $c \rightarrow 0$ durch und lässt gleichzeitig $\eta \rightarrow \infty$ streben, so wird allgemein

$$\lim_{c \rightarrow 0} c^2 \operatorname{Sh} 2\eta \approx \lim_{c \rightarrow 0} c^2 \operatorname{Ch} 2\eta \approx$$

$$\approx \frac{c^2}{2} e^{2\eta} = 2r^2$$

und für den Rand der Ellipsenöffnung

$$\lim_{c \rightarrow 0} c^2 \operatorname{Sh} 2\eta_0 \approx \lim_{c \rightarrow 0} c^2 \operatorname{Ch} 2\eta_0 = 2r^2$$

Dabei wird $\xi \rightarrow \varphi$ und $\eta \rightarrow \ln \frac{2r}{c}$ laufen. Der Ausdruck aus (6)

$$c^2 [\operatorname{Ch} 2(\eta - \eta_0) - 1] e^{2\eta_0}$$

lässt sich in Exponentialform umschreiben und gewinnt daraus die Form

$$\frac{c^4}{2} \frac{e^{4\eta} - 2e^{2\eta_0} e^{2\eta} + e^{4\eta_0}}{c^2 e^{2\eta}}$$

Beim Grenzübergang verbleibt davon nur

$$2 \frac{(r^2 - r_i^2)^2}{r^2}$$

Dies in (6) berücksichtigt, ergibt dann die Spannungsfunktion für eine unendliche Scheibe mit kreisförmigem Loch unter einachsigem Druck

$$F = \frac{p_v}{4} \left[r^2 - 2r_i^2 \ln \frac{r}{r_i} - \frac{(r^2 - r_i^2)^2}{r^2} \cos 2\varphi \right]$$

So elegant wie die Ermittlung der Spannungen unter Verwendung elliptischer Koordinaten auch ist, so treten doch gewisse Schwierigkeiten auf, wenn es sich darum handelt, einen in diesen Koordinaten angegebenen Punkt schnell einzumessen. Es ist in solchem Falle besser, dann kartesische Koordinaten einzuführen. Mit y als Abszissen- und z als Ordinatenachse war gemäss (1)

$$z = c \operatorname{Ch} \eta \cos \xi \text{ und } y = c \operatorname{Sh} \eta \sin \xi$$

In komplexer Schreibweise ist

$$y + iz = c (\sin \xi \operatorname{Sh} \eta + i \cos \xi \operatorname{Ch} \eta)$$

oder, wenn i herausgenommen wird

$$y + iz = ic (\cos \xi \operatorname{Ch} \eta - i \sin \xi \operatorname{Sh} \eta) = \\ = ic \cos (\xi + i\eta) = \\ = ic (\cos \xi \cos i\eta - \sin \xi \sin i\eta)$$

Weiter wird

$$\cos (\xi + i\eta) = \frac{y}{ic} + \frac{z}{c} = \frac{z}{c} - \frac{iy}{c}$$

und

$$\xi + i\eta = \arccos \left(\frac{z}{c} - \frac{iy}{c} \right)$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Additionstheoreme umschreiben in

$$(13) \quad \xi + i\eta = \arccos u + \arccos v = \\ = \arccos (u \sqrt{1-v^2} - v \sqrt{1-u^2})$$

wenn man für

$$(14) \quad \frac{z}{c} = u \sqrt{1-v^2} \text{ und } \frac{iy}{c} = v \sqrt{1-u^2}$$

substituiert. Quadriert man (14) und zieht die beiden Gleichungen gemäss

$$(15) \quad u^2 - v^2 = \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}$$

voneinander ab, so ergibt sich

$$u^2 = v^2 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}$$

bzw.

$$1 - u^2 = 1 - v^2 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}$$

und

$$v^2 (1 - u^2) = v^2 - v^4 - \frac{v^2 z^2}{c^2} - \frac{v^2 y^2}{c^2} = -\frac{y^2}{c^2}$$

Nach fallenden Potenzen geordnet erhält man

$$v^4 - v^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} \right) - \frac{y^2}{c^2} = 0$$

und nach v^2 aufgelöst

$$v^2 = \frac{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}}{2} \right)^2 + \frac{y^2}{c^2}}$$

Für die Weiterführung der Rechnung gilt das Minus-Zeichen der Wurzel, so dass

$$(16) \quad v = i \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}}{2} \right)^2 + \frac{y^2}{c^2}}} - \left(\frac{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}}{2} \right)}$$

Löst man (15) nach v^2 auf, so folgt

$$v^2 = u^2 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}$$

$$1 - v^2 = 1 - u^2 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}$$

$$u^2 (1 - v^2) = u^2 - u^4 + \frac{z^2 u^2}{c^2} + \frac{y^2 u^2}{c^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

und geordnet

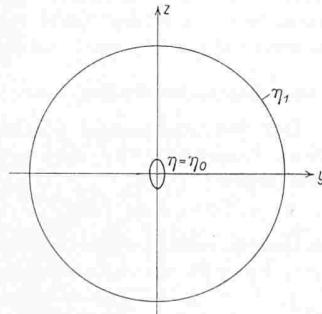


Bild 2. Erläuterungsbild für den Grenzübergang

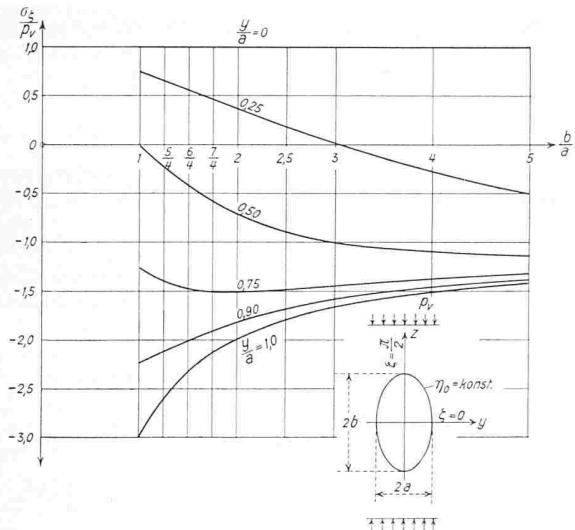


Bild 3. Tangialspannungen σ_ξ/p_v in ellipsenförmigen Stollen unter vertikal wirkendem Gebirgsdruck (σ_ξ/p_v als Funktion von b/a für verschiedene Parameter y/a)

$$u^4 - u^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

und nach u^2 aufgelöst

$$u^2 = \frac{1 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{c^2}}$$

Auch hier gilt, wie bei v , das Minus-Vorzeichen der Wurzel. Somit wird

$$(17) \quad u = \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{c^2}} = \sqrt{I}$$

Nach (13) liess sich schreiben

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= \arccos u + \arcsin v = \\ &= \arccos \sqrt{I} + \arcsin i\sqrt{II} = \arccos \sqrt{I} + i \operatorname{ArSh} \sqrt{II} \end{aligned}$$

oder nach Einsetzen der Wurzeln

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= \\ &= \arccos \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{c^2}} + \\ &+ i \operatorname{ArSh} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{c^2}} - \left(\frac{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)} \end{aligned}$$

woraus sich ohne weiteres

$$\xi = \arccos \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{c^2}}$$

und

$$\eta = \operatorname{ArSh} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{c^2}} - \left(\frac{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}}{2}\right)}$$

ergibt. Damit ist es nun sehr einfach, gegebene oder bekannte Werte y und z von kartesischen Koordinaten auf elliptische umzuschreiben und die Spannungen zu ermitteln. Es hat keinen praktischen Wert, die Rechnung formelmässig so weit zu führen, bis man allgemeine Ausdrücke für die Spannungen in

Tabelle 1. Tangentiale Randspannungen für verschiedene Ellipsen b/a

y/a	$b/a = 1$	1,25	1,50	1,75	2,00	2,5	3,0	5,0
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,25	0,750	0,659	0,564	0,465	0,366	0,173	0,003	-0,503
0,50	± 0	-0,233	-0,428	-0,588	-0,714	-0,892	-1,000	-1,143
0,75	-1,250	-1,405	-1,477	-1,506	-1,512	-1,490	-1,455	-1,328
0,90	-2,240	-2,130	-2,019	-1,919	-1,834	-1,700	-1,599	-1,383
1,00	-3,000	-2,600	-2,334	-2,143	-2,000	-1,800	-1,667	-1,408

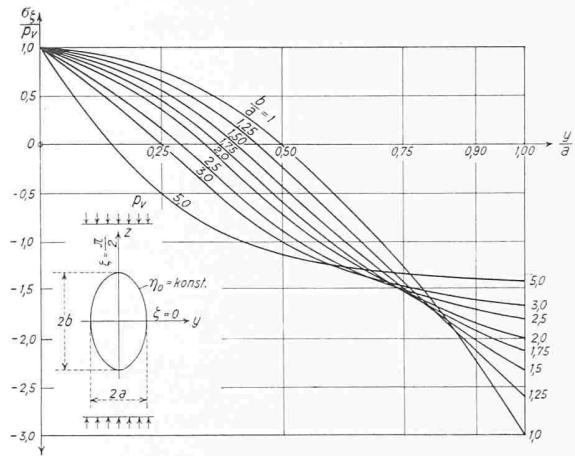


Bild 4. Tangentialspannungen σ_ξ/p_v in ellipsenförmigen Stollen unter vertikal wirkendem Gebirgsdruck (σ_ξ/p_v als Funktion von y/a für verschiedene Parameter b/a)

kartesischen Koordinaten erhält. Die Gleichungen würden viel zu umständlich werden, als dass für die Rechnung ein Vorteil zu verzeichnen wäre. Es genügt, aus y und z die krummlinigen Koordinaten η und ξ zu berechnen, um dann aus (7a), (8a) und (9a) die Spannungen zu bestimmen.

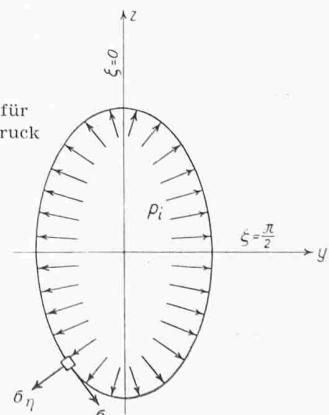
Die Zahlenberechnung bereitet für diesen in Bild 1 dargestellten Belastungsfall keinerlei Schwierigkeiten. Da hier besonders die Tangentialspannungen am Stollenrand interessieren, so sollen für einige elliptische Stollenränder mit verschiedenen Achsenverhältnissen die Ergebnisse mitgeteilt werden. Zur besseren Uebersicht des Spannungsverlaufes sind die in Tabelle 1 enthaltenen Zahlenwerte der Randspannungen ausserdem in den Bildern 3 und 4 zeichnerisch dargestellt. Wie man daraus ersieht, nehmen die Tangentialspannungen im Scheitel bei $\varphi = \pi/2$ für alle Ellipsen den Wert $p = 1,0$ an. Beim Kreis durchläuft diese Spannung vom Scheitel mit $1,0 p$ beginnend verschiedene Werte, bis sie bei $y/a = 0,5$ das Vorzeichen wechselt und für $\varphi = 0$ die Grösse $-3,0 p$ (Druck) erreicht. Die Kurven zeigen weiter, dass bei schlanken Ellipsen ein besserer Spannungsausgleich vorhanden ist, denn schon bei dem Verhältnis $b/a = 2,0$ sind die Druckspannungen gegenüber $-3,0 p$ beim Kreis auf $-2,0 p$ abgesunken. Dieser Vorteil bei schlanker werdenden Ellipsen verdient hervorgehoben zu werden, da einmal der Bereich der Zugspannungen kleiner wird, und zum anderen die Druckspannungen am Kämpfer unter denjenigen beim Kreis liegen.

3. Der elliptische Stollen unter Innendruck (Bild 5)

Der Rechnungsgang gestaltet sich hier ähnlich wie im letzten Abschnitt. Wie dort, so ist auch hier in elliptischen Koordinaten

$$(1) \quad z = c \operatorname{Ch} \eta \cos \xi \quad \text{und} \quad y = c \operatorname{Sh} \eta \sin \xi$$

Die Lösung wird durch Ueberlagerung zweier Spannungsfunktionen erreicht, die mit den Spannungen durch



$$(2) \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = c_1, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = c_1 \quad \text{und}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0$$

verknüpft sind. Führen wir in die Spannungsfunktion

$$(3) \quad F_1 = \frac{c_1}{2} (y^2 + z^2)$$

die Ausdrücke für y und z ein, so wird

$$(3a) \quad F_1(\eta, \xi) = \frac{c_1}{2} c^2 (\text{Ch}^2 \eta \cos^2 \xi + \text{Sh}^2 \eta \sin^2 \xi) =$$

$$= \frac{c_1}{2} c^2 (\text{Ch}^2 \eta - \sin^2 \xi) = \frac{c_1}{4} c^2 (\text{Ch} 2 \eta + \cos 2 \xi)$$

In elliptischen Koordinaten lauten die Spannungskomponenten

$$(4) \quad \sigma_\eta = \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \text{Sh} 2 \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} - \sin 2 \xi \frac{\partial F}{\partial \xi}}{\frac{1}{2} c^2 (\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2}$$

$$\sigma_\xi = \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \text{Sh} 2 \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + \sin 2 \xi \frac{\partial F}{\partial \xi}}{\frac{1}{2} c^2 (\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2}$$

$$\tau_{\eta, \xi} = \frac{-(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} + \sin 2 \xi \frac{\partial F}{\partial \eta} + \text{Sh} 2 \eta \frac{\partial F}{\partial \xi}}{\frac{1}{2} c^2 (\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2}$$

Bildet man die Ableitungen von (3a) und setzt sie in (4) ein, so ergibt sich

$$(5) \quad \sigma_\eta =$$

$$= \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi) (-4 \cos 2 \xi) + 2 \text{Sh}^2 2 \eta + 2 \sin^2 2 \xi}{\frac{1}{2} c^2 (\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} c_1 =$$

$$= \frac{-2 \text{Ch} 2 \eta \cos 2 \xi + 2 \cos^2 2 \xi + \text{Sh}^2 2 \eta + \sin^2 2 \xi}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} c_1 =$$

$$= \frac{-2 \text{Ch} 2 \eta \cos 2 \xi + \cos^2 2 \xi + 1 + \text{Sh}^2 2 \eta}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} c_1 =$$

$$= \frac{\text{Ch}^2 2 \eta - 2 \text{Ch} 2 \eta \cos 2 \xi + \cos^2 2 \xi}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} c_1 = c_1$$

Ebenso erhält man für

$$(6) \quad \sigma_\xi =$$

$$= \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi) 4 \text{Ch} 2 \eta - 2 \text{Sh}^2 2 \eta - 2 \sin^2 2 \xi}{\frac{1}{2} c^2 (\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} c_1 =$$

$$= \frac{2 \text{Ch}^2 2 \eta - 2 \text{Ch} 2 \eta \cos 2 \xi - \text{Sh}^2 2 \eta - \sin^2 2 \xi}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} c_1 =$$

$$= \frac{\text{Ch}^2 2 \eta + 1 - \sin^2 2 \xi - 2 \text{Ch} 2 \eta \cos 2 \xi}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} c_1 =$$

$$= \frac{\text{Ch}^2 2 \eta - 2 \text{Ch} 2 \eta \cos 2 \xi + \cos^2 2 \xi}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} c_1 = c_1$$

und schliesslich für

$$(7) \quad \tau_{\eta, \xi} = \frac{-(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi) 4 \cdot 0 + 2 \sin 2 \xi \text{Sh} 2 \eta - 2 \text{Sh} 2 \eta \sin 2 \xi}{\frac{1}{2} c^2 (\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} c_1 =$$

Somit folgt

$$\sigma_\eta = \sigma_\xi = c_1; \quad \tau_{\eta, \xi} = 0$$

Dieses Ergebnis hätte mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises auch unmittelbar aus $\sigma_y = \sigma_z = c_1; \tau_{xy} = 0$ hergeleitet werden können. Das vorstehend entwickelte gleiche Ergebnis stellt daher eine wertvolle Kontrolle dar.

Die zweite Spannungsfunktion lautet

$$(8) \quad F_2(\eta, \xi) = c_2 (\text{Sh} 2 \eta - 2 \eta \text{Ch} 2 \eta_0)$$

Ihre Ableitungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial F_2}{\partial \eta} = 2 c_2 (\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0); \quad \frac{\partial F_2}{\partial \xi} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi \partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial \eta^2} = 4 c_2 \text{Sh} 2 \eta$$

Damit erhält man

$$(9) \quad \sigma_\eta = \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0) \text{Sh} 2 \eta}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} \frac{4 c_2}{c^2}$$

$$\sigma_\xi =$$

$$= \frac{-(\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0) \text{Sh} 2 \eta + 2 (\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi) \text{Sh} 2 \eta}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} \frac{4 c_2}{c^2} =$$

$$= \frac{(\text{Ch} 2 \eta - 2 \cos 2 \xi + \text{Ch} 2 \eta_0) \text{Sh} 2 \eta}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} \frac{4 c_2}{c^2}$$

$$\tau_{\eta, \xi} = \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0) \sin 2 \xi}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} \frac{4 c_2}{c^2}$$

Die Ueberlagerung beider Spannungsfunktionen

$$(10) \quad F = \frac{c_1}{4} c^2 (\text{Ch} 2 \eta + \cos 2 \xi) + c_2 (\text{Sh} 2 \eta - 2 \eta \text{Ch} 2 \eta_0)$$

liefert die Spannungskomponenten

$$(11) \quad \sigma_\eta = c_1 + \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0) \text{Sh} 2 \eta}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} \frac{4 c_2}{c^2}$$

$$\sigma_\xi = c_1 + \frac{(\text{Ch} 2 \eta - 2 \cos 2 \xi + \text{Ch} 2 \eta_0) \text{Sh} 2 \eta}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} \frac{4 c_2}{c^2}$$

$$\tau_{\eta, \xi} = \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0) \sin 2 \xi}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} \frac{4 c_2}{c^2}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 lassen sich aus den Randbedingungen ermitteln. Für $\eta = \eta_0$ wird $\sigma_\eta = -p, \tau = 0$

und daraus

$$(12) \quad c_1 = -p; \quad \text{für } \eta = \eta_1 \text{ wird } \sigma_\eta = 0, \tau = 0.$$

Mit Rücksicht auf die vorliegenden Zwecke kann man η_1 als gross voraussetzen. Damit werden die trigonometrischen Funktionen gegenüber den hyperbolischen vernachlässigbar klein, und es ergibt sich aus der Randbedingungsgleichung

$$0 = -p + \frac{(\text{Ch} 2 \eta_1 - \text{Ch} 2 \eta_0) \text{Sh} 2 \eta_1}{\text{Ch}^2 2 \eta_1} \frac{4 c_2}{c^2}$$

die zweite Konstante zu

$$(13) \quad c_2 = \frac{c^2}{4} p \frac{\text{Cth} 2 \eta_1}{1 - \frac{\text{Cn} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta_1}} = \infty \frac{c^2}{4} p \frac{1}{1 - \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta_1}}$$

Die zahlenmässige Durchrechnung zeigt, was übrigens auch die Formeln (11) unmittelbar erkennen lassen, dass die Schubspannungen für $\eta = \eta_1$ bedeutungslos werden, womit die Randbedingung $\tau = 0$ für $\eta = \eta_1$ ihre praktische Bedeutung verliert.

Nach Einführung der Ausdrücke für c_1 und c_2 folgt

$$(14) \quad \sigma_\eta = -p + p \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0) \text{Sh} 2 \eta \text{Cth} 2 \eta_1}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2 \left(1 - \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta_1}\right)} =$$

$$= \left[-1 + \frac{\left(1 - \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta}\right) \frac{\text{Th} 2 \eta}{\text{Tn} 2 \eta_1}}{\left(1 - \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta_1}\right) \left(1 - \frac{\cos 2 \xi}{\text{Ch} 2 \eta}\right)^2} \right] p$$

$$\sigma_\xi = -p + p \frac{(\text{Ch} 2 \eta + \text{Ch} 2 \eta_0 - 2 \cos 2 \xi) \text{Sh} 2 \eta \text{Cth} 2 \eta_1}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2 \left(1 - \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta_1}\right)} =$$

$$= \left[-1 + \frac{\left(1 + \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta} - \frac{2 \cos 2 \xi}{\text{Ch} 2 \eta}\right) \frac{\text{Th} 2 \eta}{\text{Tn} 2 \eta_1}}{\left(1 - \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta_1}\right) \left(1 - \frac{\cos 2 \xi}{\text{Ch} 2 \eta}\right)^2} \right] p$$

$$\tau_{\eta, \xi} = p \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0) \sin 2 \xi \text{Cth} 2 \eta_1}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2 \left(1 - \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta_1}\right)} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta}\right) \frac{\sin 2 \xi}{\text{Ch} 2 \eta \text{Tn} 2 \eta_1}}{\left(1 - \frac{\text{Ch} 2 \eta_0}{\text{Ch} 2 \eta_1}\right) \left(1 - \frac{\cos 2 \xi}{\text{Ch} 2 \eta}\right)^2} p$$

und für den in der Praxis meist vorliegenden Fall sehr grosser η_1 -Werte ($\eta_1 \rightarrow \infty$)

$$(15) \quad \frac{\sigma_\eta}{p} = \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0) \text{Sh} 2 \eta}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} - 1$$

$$\frac{\sigma_\xi}{p} = \frac{(\text{Ch} 2 \eta + \text{Ch} 2 \eta_0 - 2 \cos 2 \xi) \text{Sh} 2 \eta}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2} - 1$$

$$\frac{\tau}{p} = \frac{(\text{Ch} 2 \eta - \text{Ch} 2 \eta_0) \sin 2 \xi}{(\text{Ch} 2 \eta - \cos 2 \xi)^2}$$

Für die Anwendung interessieren insbesondere die σ_ξ -Spannungen für $\eta = \eta_0$. Hierfür erhält man allgemein

$$(16) \quad \sigma_{\xi}^{\max} = \left[-1 + \frac{\left(2 - \frac{2 \cos 2 \xi}{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}\right) \operatorname{Th} 2 \eta_0}{\left(1 - \frac{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1}\right) \left(1 - \frac{\cos 2 \xi}{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}\right)^2} \right] p = \\ = \left[-1 + \frac{2 \frac{\operatorname{Th} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1}}{\left(1 - \frac{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1}\right) \left(1 - \frac{\cos 2 \xi}{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}\right)} \right] p$$

Die grössten Tangentialspannungen ergeben sich für $\xi = 0$ bei $z = b$ und $y = 0$, die kleinsten für $\xi = \pi/2$ bei $z = 0$ und $y = a$. Demzufolge wird

$$(17) \quad \sigma_{\xi}^{\max \max} = \left[-1 + \frac{2 \frac{\operatorname{Th} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1}}{\left(1 - \frac{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1}\right) \left(1 - \frac{1}{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}\right)} \right] p \quad (z = b, y = 0)$$

$$\sigma_{\xi}^{\max \min} = \left[-1 + \frac{2 \frac{\operatorname{Th} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1}}{\left(1 - \frac{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}\right)} \right] p \quad (z = 0, y = a)$$

Zur Bestätigung der Richtigkeit soll auch hier wieder der Grenzübergang für einen sehr dünnen Ring durchgeführt werden. Wird η_0 dabei sehr gross gewählt, so nähert sich die Ellipse einem Kreis, und es kann $\eta_1 \approx \eta_0$ gesetzt werden.

Tabelle 2. Tangentialspannungen σ_{ξ}/p in elliptischen Koordinaten

$\eta = \eta_0$	$\xi = 0 \cdot \pi$	$1/30 \pi$	$1/10 \pi$	$2/10 \pi$	$3/10 \pi$	$4/10 \pi$	$5/10 \pi$
$1/30 \pi$	18,18000	8,62052	0,98124	-0,40817	-0,68298	-0,76955	-0,79132
$1/10 \pi$	5,57333	4,93709	2,39501	0,49831	-0,11372	-0,33386	-0,39158
$2/10 \pi$	2,59136	2,50612	1,96218	1,03072	0,46233	0,19234	0,11379
$3/10 \pi$	1,71290	1,69127	1,51347	1,10276	0,74941	0,54005	0,47273
$4/10 \pi$	1,35257	1,34275	1,26943	1,07724	0,88040	0,74651	0,70027
$5/10 \pi$	1,18071	1,17621	1,14207	1,04715	0,94085	0,86259	0,83434

Tabelle 3. Umschreibung der elliptischen in kartesische Koordinaten

η	$\xi = 0 \cdot \pi$	Abszissen y					
		$1/30 \pi$	$1/10 \pi$	$2/10 \pi$	$3/10 \pi$	$4/10 \pi$	$5/10 \pi$
Ordinaten z							
$1/10 \pi$	0	0,03179	0,09401	0,17881	0,24611	0,28932	0,30421
$2/10 \pi$	0	0,06674	0,19737	0,37542	0,51672	0,60744	0,63870
$3/10 \pi$	0	0,10834	0,32036	0,60937	0,83872	0,98597	1,03671
$4/10 \pi$	0	0,16072	0,47526	0,90400	1,24425	1,46270	1,53797
$5/10 \pi$	0	0,22909	0,67744	1,28856	1,77355	2,08493	2,19222
σ_{ξ}^{\max}							
$1/10 \pi$	1,0000	0,99452	0,95106	0,80902	0,58779	0,30902	0
$2/10 \pi$	1,14693	1,14064	1,09080	0,92789	0,67415	0,35442	0
$3/10 \pi$	1,40794	1,40022	1,33904	1,13905	0,82757	0,43508	0
$4/10 \pi$	1,80908	1,79917	1,72054	1,46358	1,06336	0,55904	0
$5/10 \pi$	2,39026	2,37716	2,27328	1,93377	1,40497	0,73864	0

Tabelle 4. Berechnete Spannungen σ_{ξ}/p , σ_{η}/p und $\tau_{\xi\eta}/p$

η	$\xi = 0 \cdot \pi$	$1/30 \pi$	$1/10 \pi$	$2/10 \pi$	$3/10 \pi$	$4/10 \pi$	$5/10 \pi$	
σ_{ξ}/p	$1/10 \pi$	5,573	4,937	2,395	0,498	-0,114	-0,334	-0,392
σ_{η}/p	(Rand)	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
$\tau_{\xi\eta}/p$		0	0	0	0	0	0	0
σ_{ξ}/p	$2/10 \pi$	1,203	1,183	1,018	0,587	0,232	0,039	-0,020
σ_{η}/p		0,388	0,323	-0,056	-0,556	-0,770	-0,847	-0,855
τ/p		0	0,170	0,344	0,261	0,136	0,056	0
σ_{ξ}/p	$3/10 \pi$	0,475	0,473	0,451	0,359	0,235	0,141	0,108
σ_{η}/p		0,241	0,219	0,063	-0,256	-0,485	-0,601	-0,635
τ/p		0	0,079	0,194	0,220	0,152	0,073	0
σ_{ξ}/p	$4/10 \pi$	0,222	0,222	0,218	0,196	0,158	0,124	0,110
σ_{η}/p		0,130	0,121	0,052	-0,119	-0,278	-0,377	-0,410
τ/p		0	0,038	0,101	0,137	0,112	0,060	0
σ_{ξ}/p	$5/10 \pi$	0,111	0,111	0,110	0,105	0,094	0,082	0,078
σ_{η}/p		0,069	0,065	0,032	-0,058	-0,153	-0,220	-0,243
τ/p		0	0,019	0,053	0,086	0,070	0,040	0

Dafür gilt dann

$$\operatorname{Th} 2 \eta_0 \cong \operatorname{Th} 2 \eta_1 \cong 1$$

und es wird

$$\frac{\cos 2 \xi}{\operatorname{Ch} 2 \eta_0} \cong 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Ch} 2 \eta_0 \cong \operatorname{Sh} 2 \eta_0$$

Entwickelt man $\operatorname{Ch} 2 \eta_1$ an der Stelle $\eta_1 = \eta_0$ in eine Taylorsche Reihe, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Ch} 2 \eta_1 &= \operatorname{Ch}_1 [2 \eta_0 + (2 \eta_1 - 2 \eta_0)] = \\ &= \operatorname{Ch} 2 \eta_0 + \operatorname{Sh} 2 \eta_0 (2 \eta_1 - 2 \eta_0) + \dots \\ &= \operatorname{Ch} 2 \eta_0 + \operatorname{Ch} 2 \eta_0 (2 \eta_1 - 2 \eta_0) + \dots \\ &= \operatorname{Ch} 2 \eta_0 [1 + 2 (\eta_1 - \eta_0) + \dots] \end{aligned}$$

und für

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1} &= \frac{\operatorname{Ch} 2 \eta_1 - \operatorname{Ch} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1} = \\ &= \frac{\operatorname{Ch} 2 \eta_0 [1 + 2 (\eta_1 - \eta_0) - 1]}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1} \cong 2 (\eta_1 - \eta_0) \end{aligned}$$

Nach (16) lautet die Tangentialspannung

$$\sigma_{\xi}^{\max} = \left[-1 + \frac{2 \frac{\operatorname{Th} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1}}{\left(1 - \frac{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}{\operatorname{Ch} 2 \eta_1}\right) \left(1 - \frac{\cos 2 \xi}{\operatorname{Ch} 2 \eta_0}\right)} \right] p$$

Berücksichtigt man darin die vorstehenden Entwicklungen, so wird

$$\sigma_{\xi}^{\max} \cong \left(-1 + \frac{1}{\eta_1 - \eta_0} \right) p$$

Da aber

$$\begin{aligned} c \operatorname{Ch} \eta_0 &= a \quad \text{und} \\ c \operatorname{Ch} \eta_1 &= a + h \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} e^{\eta_0} &= a \quad \text{und} \\ \frac{c}{2} e^{\eta_1} &= a + h \end{aligned}$$

und daraus

$$\eta_0 = \ln \frac{2a}{c} \quad \text{und}$$

$$\eta_1 = \ln \frac{2(a+h)}{c}$$

und demgemäß

$$\eta_1 - \eta_0 = \ln \frac{2(a+h)}{c} - \ln \frac{2a}{c}$$

$$= \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right) \cong \frac{h}{a}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^{\max} &= \\ &= \left(-1 + \frac{1}{\frac{h}{a}} \right) p = \\ &= -p + \frac{p}{\frac{h}{a}} \end{aligned}$$

oder

$$\sigma_{\xi}^{\max} \cong \frac{p}{\frac{h}{a}} = \frac{p a}{h}$$

was der Tangentialspannung des Kreises entspricht.

Bild 10. Randspannungen σ_{ξ}/p_i bei

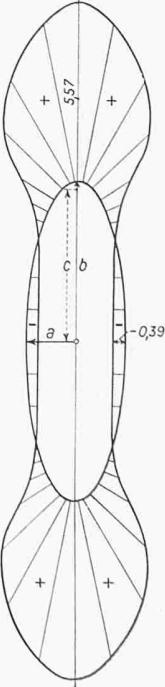
einem elliptischen

Stollenquerschnitt auf

Innendruck $\lambda = \frac{a}{b} =$

$= 0,30421$; $b = 1,0$;

$c = 0,9526$



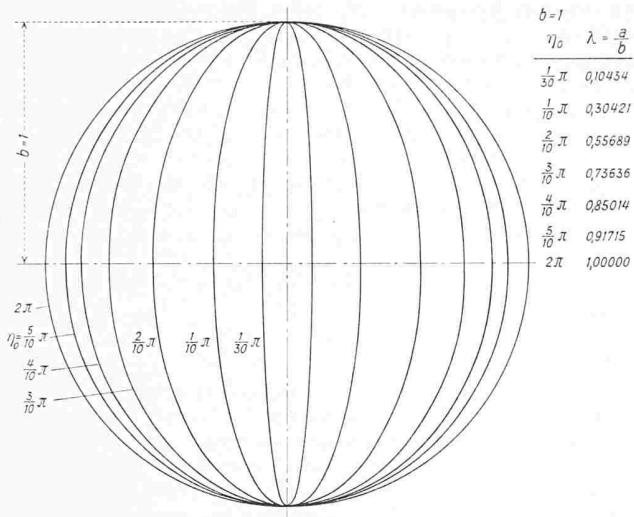


Bild 6. Elliptische Stollenquerschnitte verschiedener Schlankheit

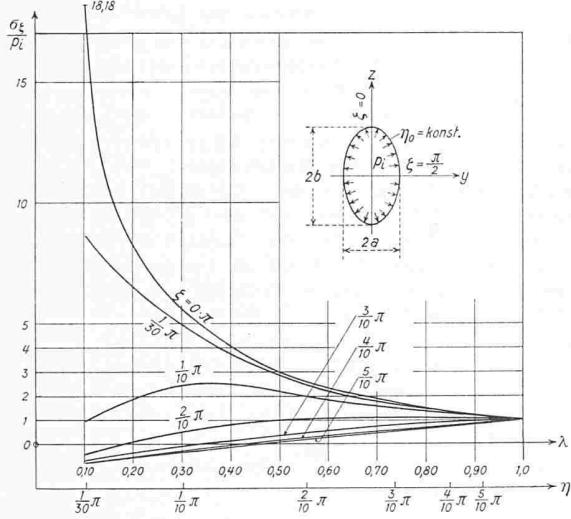
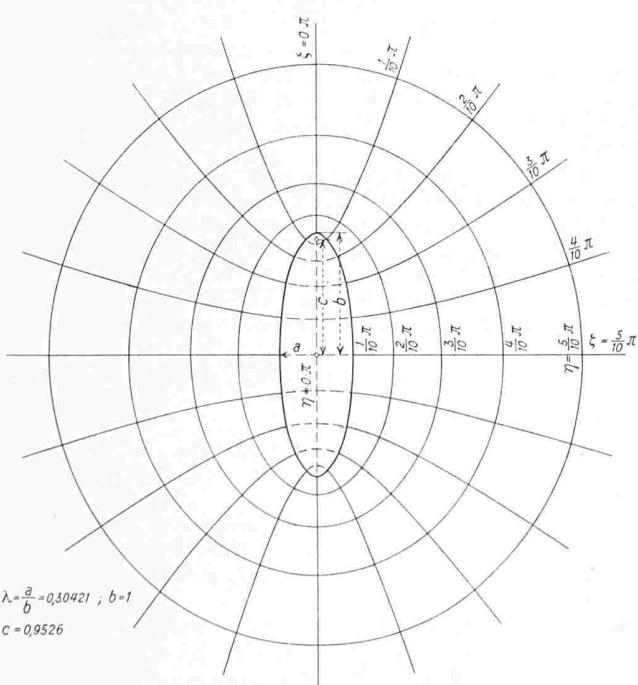
Bild 7. Elliptischer Stollenquerschnitt unter Innendruck
Randspannungen σ_ξ / p_i ; $\lambda = \frac{a}{b}$; $b = 1,0$
(σ_ξ / p_i als Funktion von λ bzw. η für verschiedene Parameter ξ)

Bild 8. Konfokales Netz der Ellipse

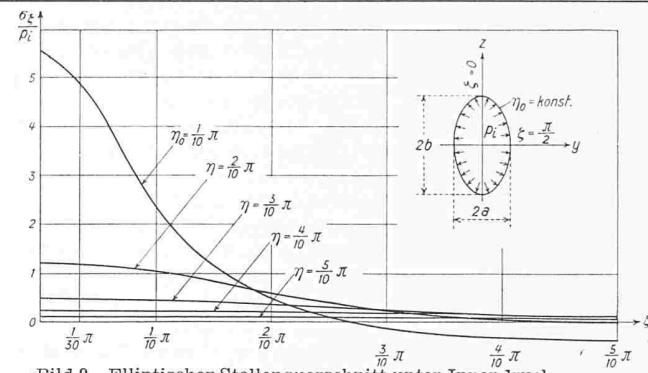


Bild 9. Elliptischer Stollenquerschnitt unter Innendruck

$$\lambda = \frac{a}{b} = 0,30421; b = 1; \eta_0 = \frac{1}{10}\pi; c = 0,9526$$

(σ_ξ / p_i als Funktion von ξ für verschiedene Parameter η)

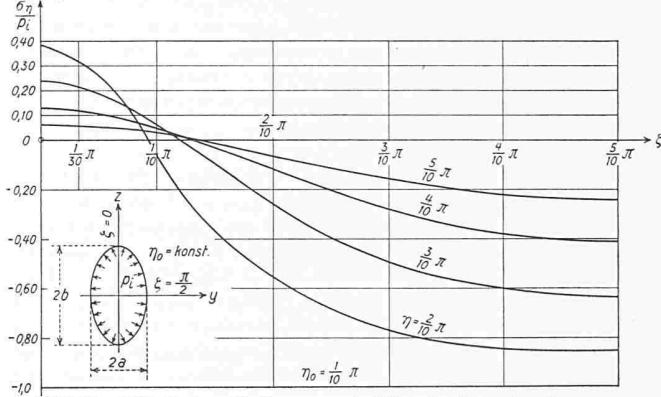


Bild 11. Elliptischer Stollenquerschnitt unter Innendruck

$$\lambda = \frac{a}{b} = 0,30421; b = 1; \eta_0 = \frac{1}{10}\pi; c = 0,9526$$

(σ_η / p_i als Funktion von ξ für verschiedene Parameter η)

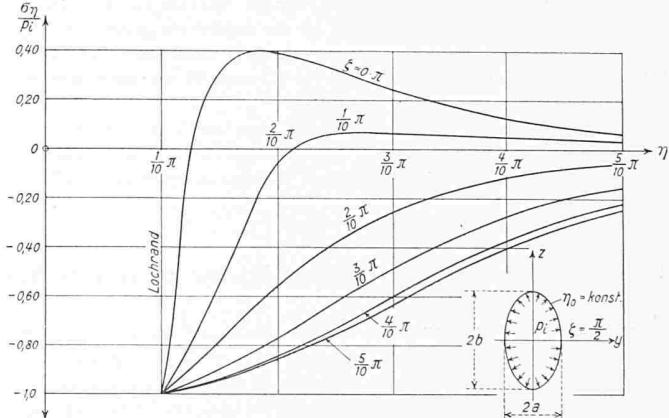


Bild 12. Elliptischer Stollenquerschnitt unter Innendruck

$$\lambda = \frac{a}{b} = 0,30421; b = 1; \eta_0 = \frac{1}{10}\pi; c = 0,9526$$

(σ_η / p_i als Funktion von η für verschiedene Parameter ξ)

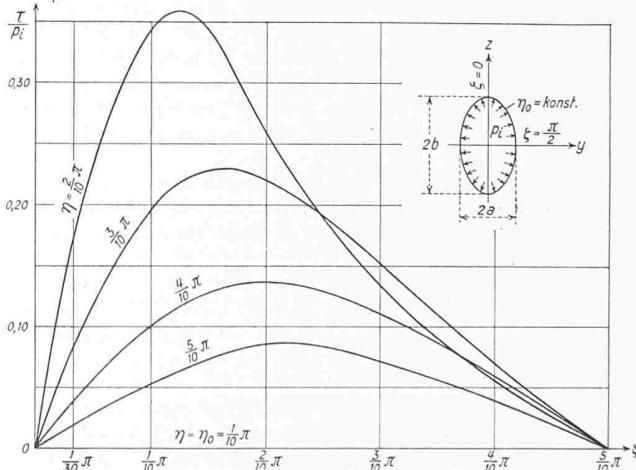


Bild 13. Elliptischer Stollenquerschnitt unter Innendruck

$$\lambda = \frac{a}{b} = 0,30421; b = 1; \eta_0 = \frac{1}{10}\pi; c = 0,9526$$

(τ / p_i als Funktion von ξ für verschiedene Parameter η)

Die Behandlung des ellipsenförmigen Stollens unter Innendruck führt zu sehr wertvollen Ergebnissen. Es ist daher zunächst erforderlich, sich über den Verlauf der Spannungen an Hand von graphischen Darstellungen Klarheit zu verschaffen. Um Vergleichsmöglichkeiten zu haben, sind zunächst die Spannungen am Lochrand einer Anzahl verschieden schlanker Ellipsen ermittelt worden. Die Auswahl wurde so vorgenommen, dass die halben grossen Achsen durchweg von der Länge 1 sind, während die halben kleinen Achsen von $1/10\pi$ bis $5/10\pi$ um je $1/10\pi$ gestaffelt wurden (Bild 6). Es wäre ebensogut möglich, mathematisch sogar vorteilhafter, die Ellipsen so zu wählen, dass sie einem konfokalen Netz mit konstanter Exzentrizität c angehören. Für die Belange der Praxis ist jedoch die getroffene Wahl günstiger. Gleichzeitig sind in Bild 6 die Axenverhältnisse $\lambda = a/b$ in kartesischen Koordinaten vermerkt. Für einige Punkte sind die Tangentialspannungen in Tabelle 2 zusammengestellt. Außerdem sind die Spannungen noch einmal in Bild 7 wiedergegeben, und zwar sind die Verhältnisse $\lambda = a/b$ als Abszisse und die dimensionslosen Größen σ_ξ/p als Ordinaten aufgetragen. Jede Kurve gilt für einen bestimmten Wert ξ , wobei $\xi = \text{const}$ die Hyperbeln und $\eta = \text{const}$ die Ellipsen eines konfokalen Netzes darstellen. Im vorliegenden Falle ist $\eta = \eta_0$ der Rand der Stollenöffnung.

Eine zweite Rechnung wurde durchgeführt für das konfokale Netz mit einer Randellipse $\eta = \eta_0 = 1/10\pi$, $\lambda = a/b = 0,30421$ mit $b = 1$ und $c = 0,9526$. Im Gegensatz zur vorherigen Untersuchung sind hier auch die Tangential-, Radial- und Schubspannungen im Gebirge in der Umgebung der elliptischen Öffnung ermittelt worden. Ebenso wurden die elliptischen Koordinaten in kartesische transformiert. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 3 und 4 zusammengestellt. Zur weiteren Veranschaulichung dienen die Bilder 8 bis 13. In Bild 9 ist $\frac{\sigma_\xi}{p}(\eta, \xi)$ aufgetragen, während Bild 10 den tatsächlichen Verlauf der Tangentialspannungen σ_ξ aufgetragen normal zur Randellipse, vermittelt. Es ist daraus zu erkennen, dass im Scheitel grosse Zug- und in der schwach gekrümmten Zone der Ellipse kleine Druckspannungen auftreten. Die Radialspannungen σ_r sind den Bildern 11 und 12 zu entnehmen, die Schubspannungen zeigt Bild 13.

Die Rechnung hat ergeben, dass sich der ellipsenförmige Stollen unter hydrostatischem Innendruck wesentlich ungünstiger verhält als der kreisförmige Stollenquerschnitt. Wäh-

rend bei dem Kreisstollen für jeden Schnitt φ die Randspannungen $\sigma_t = +1,0 p_i$ betragen, nehmen sie bei der Ellipse am First für $\xi = 0$ sehr grosse Werte an, was aus den Bildern 7 und 10 hervorgeht. Schon bei einem Schlankheitsverhältnis $\lambda = 0,675$ betragen die Tangentialspannungen am First das Doppelte derjenigen beim Kreise $\lambda = 1,0$. Das Anwachsen erfolgt immer schneller, so dass bereits für $\lambda = 0,10$ die Spannungen den Wert $\sigma_\xi = +18,18$ erreichen. Wie Bild 10 zeigt, treten z. B. bei einer Ellipse $\eta_0 = 1/10\pi$, also $\lambda = 0,30421$, nur in einem begrenzten Bereich an den seitlichen Ulmen, etwa von $\xi = 5/10\pi$ bis $\xi = 3/10\pi$, Druckspannungen auf.

Bei hydrostatischem Aussendruck sind die Werte nur mit umgekehrten Vorzeichen zu versehen.

4. Zusammenfassung

Es wurden Stollen mit elliptischem Querschnitt elastizitätstheoretisch untersucht, zunächst für einen Vertikaldruck $p = \text{konst}$, auf eine oberhalb und unterhalb der Öffnung gedachte Horizontale wirkend. Die horizontalen Aussendrücke blieben wegen ihrer Geringfügigkeit unberücksichtigt.

Mit Hilfe krummliniger Koordinaten wurden für verschiedene schlanken Ellipsen die Spannungen berechnet und vor dem Tabulieren auf kartesische Koordinaten transformiert. Aus den zeichnerisch aufgetragenen Spannungen geht hervor, dass bei schlanken Ellipsen ein besserer Spannungsausgleich vorhanden ist als beim Kreis. Beim Verhältnis $b/a = 2$ betragen die Druckspannungen am Kämpfer nur $\frac{1}{2}$ derjenigen beim Kreis. Außerdem darf es als Vorteil bezeichnet werden, dass auch der Bereich, auf den sich die Zugspannungen erstrecken, bei der Ellipse kleiner ist.

Die zweite untersuchte Belastungsart, die für hydrostatischen Innendruck, hat für den elliptischen Stollen wesentlich ungünstigere Ergebnisse geliefert. Während bei dieser Belastung beim Kreisstollen die Tangentialspannungen für jeden Winkel gleich sind, nehmen sie bei der Ellipse im First sehr grosse Werte an, was in Tabellen und Bildern verdeutlicht ist. Beim hydrostatischen Aussendruck sind die Vorzeichen umzudrehen.

Zusammenfassend sei noch einmal kurz festgestellt, dass sich der elliptische Stollen unter äusserem Vertikaldruck günstiger verhält als der kreisförmige, dass aber die Ellipse für hydrostatischen Innen- oder Aussendruck sehr ungleichmässige und im Scheitel im Vergleich zum Kreis viel grössere Spannungen aufweist.

Gedanken eines Stadtbaumeisters zu der Schrift «achtung: die Schweiz»

DK 711.2

Durch die helltönende Gedankenwelt der Schrift «achtung: die Schweiz» geht wie ein zäher, roter Faden die Auffassung, dass die Schuld am tiefen Stand des schweizerischen Städtebaus zu einem ganz beträchtlichen Teil bei den Beamten liege. Wie soll man sich nun einstellen, wenn man selbst Bau-Beamter ist? Entrüstetes Zurückschlagen wäre wohl kaum das richtige, denn hinter dem etwas forsch-aggressiven Ton der Broschüre spürt zum mindesten der Fachmann eine viel zu grosse Ernsthaftigkeit, die jedes Beleidigtsein verbietet. Aus dem gleichen Grunde möchte man aber den Aufruf auch nicht einfach stillschweigend beiseite legen, sondern es ist verlockend, von der andern, ach so viel gescholtenen Seite her, ein paar Gedanken in die Diskussion zu streuen.

Von allem Anfang an soll davor gewarnt werden, für eigenes Misslingen, eigene Unsicherheit und eigenen Wankelmuth den Beamten verantwortlich machen zu wollen. Es ist zu einfach, zu billig, unsere Bauämter als die Symbole des Versagens unseres Städtebaues darzustellen. In der deutschen Zeitschrift «Baumeister» vom April 1954 findet sich in einem Artikel «Von der Ueberschätzung der Baukunst» folgender Abschnitt:

«... Natürlich fehlt es nicht an Stimmen, die den Behörden die Hauptschuld geben. Wer auf sie schimpft, kann von vornherein einer breiten Zustimmung sicher sein. Die Behörden also, hier die Baugenehmigungsbehörden, sollen zu viel und zu ängstlich regeln. Sie sollen die originelle und schöpferische Leistung in ihren Einheitsrahmen pressen und damit herabziehen. Und sie sollen die unterdurchschnittliche

Leistung durch ihre viel umstrittene Nachhilfe auf das tiefangesetzte Einheitsniveau heben. Eine kleine Zwischenbemerkung vorweg: Etwas ist doch besser geworden in unserem Bauen. Es ist mehr Licht und Luft um unsere Bauten — wenn man nicht gerade an unsere Stadtmitten denkt. Und das ist nicht zuletzt ein Verdienst gerade der gescholtenen Behörden.

Im übrigen aber: Behörden sind von Natur aus weder dümmer noch klüger, als die Menschen, die mit ihnen zu tun haben. Sie bekommen erst Leben durch die Menschen, die in ihnen tätig sind. Und diese ihre Diener haben, soweit sie Bauleute sind, mit den Architekten und übrigen Bau-schaffenden auf einer Schulbank und im gleichen Hörsaal gesessen. Sie sind aus dem gleichen Stoff gemacht, wie die Gestalter der Durchschnittsbauten (aber auch gelegentlich wie die der guten und besten Häuser). Was Wunder, dass Niveau und Einsicht nicht sehr verschieden sind! Das Gesetz des Durchschnitts gilt für die Behörden gerade so viel und so wenig, wie für das freie Bauschaffen. So gibt ihr Niveau zwar den allgemeinen Pegel an, aber ist nicht seine Ursache...»

Gut, wird man sagen, unsere Beamten sind nicht schlechter und nicht besser als die Freischaffenden, aber sie haben eine ungeheure Macht, und wenn sie zufällig doch zu der schlechteren Sorte gehören, so wirkt sich das katastrophal aus. Kann und wird tatsächlich eine derartige Macht ausgeübt, dass das Bauen einer Stadt, oder gar eines Landes geradezu geknebelt wird und Neues, Originelles absterben muss? Fast möchte man als Beamter sagen: «Zu viel der Ehre».