# Poutres hyperstatiques précontraintes en phase d'adaptation

Autor(en): **Levi, Franco**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **72 (1954)**

Heft 34

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-61237

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# Poutres hyperstatiques précontraintes en phase d'adaptation

Par **Franco Levi**, ingénieur, professeur du politecnico di Torino, Turin (Italie)

DK 624.072.23:6:24.012.47

Ce mémoire constitue le résumé d'une conférence tenue par l'auteur à l'Ecole Polytechnique Fédérale au sein du Groupe professionnel S. I. A. des ingénieurs des ponts et charpentes le 28 février 1954.

## Introduction

D'une façon générale, l'étude des phénomènes d'adaptation dans les poutres précontraintes hyperstatiques semble devoir être subdivisée en deux parties bien distinctes: l'une se rapportant à l'intervalle de charge qui suit immédiatement la fin de la période élastique, l'autre concernant la période qui précède la rupture. Dans un cas, on se proposera d'évaluer la charge de fissuration de la poutre, dans l'autre, la marge de sécurité à la rupture.

La nécessité de distinguer les deux aspects de la question apparait clairement si l'on analyse d'une façon détaillée les phases que la construction traverse au fur et à mesure de l'accroissement de la charge. Au début, les déformations anélastiques qui apparaissent sont de nature proprement plastique. Leur loi de distribution dépend nettement des conditions locales de précontrainte; si celles-ci épousent d'assez près les conditions de charge, l'étendue de la zone intéressée par le phénomène plastique peut résulter assez considérable. Vers la fin de la résistance, au contraire, la plus grande partie des déformations anélastiques est constituée par des lésions et la zone intéressée par les fissures est en général assez restreinte. Il en résulte que, contrairement à ce qui produit au voisinage de la limite élastique, la relation qui lie les efforts à l'amplitude des déformations anélastiques est assez facile à déceler.

On déduit de ces considérations qu'il est peut être plus facile d'interpréter correctement le comportement des poutres quand la limite élastique est déjà nettement surpassée. Si l'on ajoute à cela que, voulant établir une sorte de hiérarchie entre les différentes exigences de la sécurité, c'est certainement la rupture qu'on est conduit à mettre en tête, il semble assez justifié de se contenter, en premier lieu, d'établir une théorie qui s'adapte à l'étude de la dernière phase de la résistance. Il s'agira bien entendu d'une théorie approchée dont nous nous efforcerons de délimiter le domaine d'application après en avoir exposé les points essentiels.

Ceci étant posé, voyons alors quelles sont les hypothèses qu'il est loisible d'adopter si l'on veut éviter à la fois les complications analytiques inextricables et les imprécisions trop grossières.

Pour commencer, nous remarquerons que si l'on admet que dans chaque région intéressée par le phénomène anélastique on puisse faire abstraction des variations de l'état de précontrainte le long de l'axe de la poutre, on pourra introduire dans les calculs une loi moment fléchissant - courbure unique et bien déterminée pour chaque zone entrée en phase d'adaptation. Cette loi comportera nécessairement une première partie rectiligne, correspondant à la phase élastique, suivie par une ligne incurvée à pente décroissante; vers la fin de la résistance, le diagramme tendra vers une asymptote sensiblement parallèle à l'axe des courbures. Il s'agira en somme d'un diagramme ayant une forme analogue à celle que l'on admet généralement pour le béton armé ordinaire, avec naturellement des valeurs caractéristiques nettement différentes. La façon la plus simple d'introduire cette loi dans nos calculs sera alors de lui substituer un diagramme formé par trois segments de droite, semblable à celui que nous avons représenté dans la fig. 1.

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations suivantes:

$\mu$ courbure totale
$\bar{\mu}$ fraction anélastique de la courbure
$E$ module d'élasticité
$I$ moment d'inertie de la poutre
$M_1$ moment limite élastique (pour moments fléchissants négatifs)
$\frac{K}{EI}$ coefficient angulaire de la partie intermédiaire a b du diagramme de la fig. 1.

Dans ces conditions, la relation moment - courbure s'écrira:

a) en régime élastique:

$$\mu = \frac{M}{EI}$$

b) dans la partie intermédiaire du diagramme (du côté des moments fléchissants négatifs):

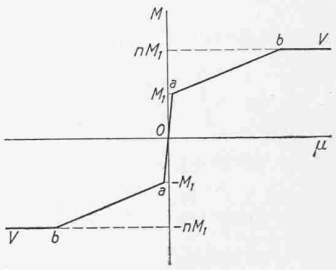


Fig. 1.

$$\mu = \frac{KM}{EI} + \frac{M_1}{EI}(1 - K)$$

$$(1) \qquad \bar{\mu} = \frac{(1 - K)}{EI}(M_1 - M)$$

dans la partie intermédiaire du diagramme (du côté des moments fléchissants positifs):

$$\mu = \frac{KM}{EI} + \frac{M_1}{EI}(K - 1)$$

$$(2) \qquad \bar{\mu} = \frac{K - 1}{EI}(M_1 + M)$$

Ainsi qu'il résulte de la fig. 1, nous admettrons que le moment fléchissant ne puisse dépasser la valeur $\pm n M_1$ et qu'à partir de l'instant où cette valeur est atteinte la section se comporte comme une «rotule plastique», au sens désormais classique de cette expression. Nous supposerons en outre que l'ampleur de la rotation plastique dans la région considérée ne puisse dépasser une certaine valeur limite.

Précisons que les hypothèses que nous venons de formuler ne doivent être considérées valables que pour une allure croissante de la valeur absolue du moment fléchissant. Nous nous réservons de revenir sur la question pour le cas d'une «rétrogradation» de la valeur absolue de $M$.

Sur la base de ces hypothèses, nous allons maintenant nous efforcer d'étudier le comportement, au delà de la limite élastique, et jusqu'à la fin de la résistance, d'une poutre encastrée de section constante, soumise à une charge uniformément répartie. (Précisons que lorsque nous parlons d'une «section constante» nous voulons dire que l'on pourra adopter le même diagramme moment-courbure pour toutes les régions qui seront le siège de déformations anélastiques). Nous examinerons successivement le cas d'une poutre parfaitement encastrée et celui d'une poutre à encastrements élastiques.

### Cas d'une poutre parfaitement encastrée (fig. 2)

*a) Phénomènes anélastiques localisés aux encastrements*

Imaginons de faire augmenter graduellement la charge répartie appliquée à la poutre jusqu'à ce que le moment d'encastrement atteigne la valeur $M_1$. Une augmentation ultérieure de la charge fera apparaître, au voisinage des appuis, deux zones entrées en régime anélastique. Dans ces régions moment fléchissant et courbure anélastique seront liés par la formule (1).

Soit alors $z_1$, l'abscisse de la section qui sépare la zone élastique de la zone anélastique (mesurée à partir du milieu de la poutre). Nous pourrons dès lors étudier l'équilibre de la poutre en écrivant que la déformation totale de la moitié droite de la poutre est compatible avec les liaisons. Ce que nous exprimerons sous la forme:

$$(3) \qquad \int_0^l \frac{M\,dz}{EI} + \int_{z_1}^l \bar{\mu}\,dz = 0$$

Dans cette expression, le premier terme représente la rotation élastique $\varphi_e$, le second terme la rotation anélastique $\varphi_A$ qui s'est produite au voisinage de l'encastrement. En désignant par $X$ le moment au milieu de la portée, il résulte de la fig. 2:

(4) $M = X - \frac{q z^2}{2}$

(5) $M_1 = X - \frac{q z_1^2}{2}$

dont on tire:

(6) $M = M_1 + \frac{q}{2}(z_1^2 - z^2)$

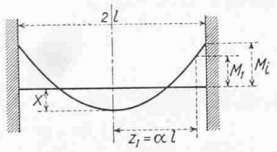


Fig. 2.

En substituant il vient:

$$\varphi_e = \int_0^l \frac{M\,dz}{EI} = \int_0^l \left[M_1 + \frac{q}{2}(z_1^2 - z^2)\right] \frac{dz}{EI}$$

et en développant:

$$\varphi_e = \frac{M_1 l}{EI} + \frac{q l z_1^2}{2EI} - \frac{q l^3}{6EI}$$

On a de même:

$$\varphi_A = (1 - K) \int_{z_1}^{l} (M_1 - M) \frac{dz}{EI} =$$

$$= (1 - K) \int_{z_1}^{l} q\,(z^2 - z_1^2) \frac{dz}{2EI}$$

et, par suite:

$$\varphi_A = \frac{(1 - K)}{EI} \left(\frac{q z_1^3}{3} - \frac{q l z_1^2}{2} + \frac{q l^3}{6}\right)$$

Pour simplifier ces expressions, et pour élargir le champ d'application de nos formules, introduisons les grandeurs sans dimensions:

$$\alpha = \frac{z_1}{l} \qquad \beta = \frac{q l^2}{M_1}$$

Il en résulte:

(7)
$$\left.\begin{aligned} \varphi_e &= \frac{M_1 l}{6EI}(3\alpha^2\beta - \beta + 6) \\ \varphi_A &= \frac{M_1 l}{6EI}(1 - K)(2\alpha^3\beta - 3\alpha^2\beta + \beta) \end{aligned}\right\}$$

et l'équation (3) devient, après simplification:

(8) $2\alpha^3\beta(1 - K) + 3\alpha^2\beta K - K\beta + 6 = 0$

Cette expression caractérise le comportement de la poutre dans l'intervalle de charge pendant lequel il y a plastification au voisinage des encastrements. Si l'on connait les dimensions et les propriétés mécaniques de la poutre, l'équation (8) permet en effet, pour chaque valeur de la charge (et donc du paramètre $\beta$), de calculer la valeur de $\alpha$; ce qui revient à définir l'allure du diagramme des moments fléchissants.

Avant d'aller plus loin, précisons que la validité de l'équation (8) cesse à partir de l'instant où le moment fléchissant au milieu de la portée atteint la valeur limite élastique positive $-M_1$. En nous servant de l'équation (5) nous pourrons caractériser cette limite en écrivant:

$$X = M_1 + \frac{q z_1^2}{2} = -M_1$$

ce qui donne:

$$q z_1^2 = -4 M_1$$

et, en introduisant les grandeurs $\alpha$ et $\beta$:

(9) $\beta\alpha^2 - 4 = 0$

Telle sera l'équation de la courbe qui limitera le domaine d'application de l'équation (8).

Dans la fig. 3 nous avons tracé les courbes représentatives de l'équation (8) pour plusieurs valeurs du coefficient $K$. La courbe $K = 1$ correspond évidemment au cas où la poutre se comporte d'une manière elastique, même après que le moment d'encastrement a dépassé la valeur $M_1$. Les autres courbes s'épanouissent en éventail à partir du point $E$, de coordonnées $\alpha = 1$, $\beta = -3$, et s'arrêtent sur la courbe $LL'$ qui représente l'équation (9). Comme on pouvait le prévoir, les courbes s'éloignent d'autant plus nettement de la courbe $EL'$ (qui se rapporte à un matériau indéfiniment élastique) que le coefficient $K$ prend une valeur plus élevée.

Pour mieux faire comprendre l'allure du phénomène, nous avons tracé en pointillé sur la fig. 3 un certain nombre de courbes le long desquelles le rapport $\rho$ entre les valeurs des moments fléchissants à l'encastrement et au milieu de la travée reste constant. La courbe $EL'$ appartient évidemment à cette famille puisque, pour $K = 1$, on a toujours $\rho = -2$. Pour tracer les autres courbes, nous sommes partis de l'expression du moment d'encastrement qui s'écrit:

$$M_i = X - \frac{q l^2}{2}$$

En y substituant $X$ tiré de la formule (5) il vient:

(10) $M_i = M_1 + \frac{q l^2}{2}(\alpha^2 - 1) = \frac{M_1}{2}(2 + \beta\alpha^2 - \beta)$

On a, de même:

$$X = M_1 + \frac{q\alpha^2 l^2}{2} = \frac{M_1}{2}(2 + \beta\alpha^2)$$

Il en résulte:

$$\varrho = \frac{M_i}{X} = \frac{\beta\alpha^2 - \beta + 2}{\beta\alpha^2 + 2}$$

expression qui donne immédiatement l'équation des différentes courbes quand on fixe la valeur de $\rho$. Notons incidemment que la courbe $\rho = 1$ caractérise le lieu des points pour lesquels il y a égalisation des moments fléchissants extrêmes.

Si l'on examine alors la position relative des courbes $K$ = constante et $\rho$ = constante, on constate que pour $K > 1$ la valeur absolue du rapport entre les moments extrêmes diminue graduellement lorsque la charge augmente. La diminution est naturellement plus rapide quand la valeur du coefficient $K$ augmente. Cela signifie qu'en régime d'adaptation, pour une augmentation donnée de la charge (c. à. d. pour une augmentation donnée de $/\beta/$), le moment fléchissant au milieu de la travée augmente beaucoup plus rapidement qu'en régime élastique. (On constate même que pour $K = 10$ l'accroissement du moment fléchissant entre le point $E$ et la courbe $LL'$ est plus marqué au milieu de la travée qu'à l'encastrement).

*b) Plastification simultanée aux encastrements et au milieu de la poutre*

Proposons nous maintenant de poursuivre notre étude au delà de la courbe $LL'$, c. à. d. dans l'intervalle de charge pour lequel il apparait une troisième zone de plastification localisée au milieu de la portée. Cette fois l'équation générale de compatibilité devra comporter un troisième terme $\varphi_m$ représentant la rotation anélastique qui se produit dans cette nouvelle région.

On a, par définition:

$$\varphi_m = \int_o^{z_2} \bar{\mu}\,dz$$

où $z_2$ représente l'abscisse de la section qui limite la zone anélastique du milieu de la poutre. En tenant compte de l'équation (2) on peut alors écrire:

$$\varphi_m = \frac{K - 1}{EI} \int_o^{z_2} (M_1 + M)\,dz$$

On a d'autre part:

$$M = X - \frac{q z^2}{2}$$

(11) $-M_1 = X - \frac{q z_2^2}{2}$

Il en résulte:

$$M_1 + M = \frac{q}{2}(z_2^2 - z^2)$$

$$\varphi_m = \frac{K - 1}{EI} \int_o^{z_2} \frac{q}{2}(z_2^2 - z^2)\,dz = \frac{q(K - 1)}{3EI} z_2^3$$

En soustrayant membre à membre les expressions (5) et (11) on a par ailleurs:

$$2\,M_1 = \frac{q\,z_2^2}{2} - \frac{q\,z_1^2}{2}$$

et donc:

$$z_2^2 = \frac{4\,M_1}{q} + z_1^2$$

Ce qui donne, en passant aux variables $\alpha$, $\beta$:

$$z_2^2 = \frac{4\,l^2}{\beta} + \alpha^2\,l^2 = l^2\left(\alpha^2 + \frac{4}{\beta}\right)$$

$$(12)\quad \varphi_m = \frac{q\,l^3\,(K-1)}{3\,E\,I}\left(\alpha^2 + \frac{4}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{M_1\,l}{3\,E\,I}\,(K-1)\,\beta\left(\alpha^2 + \frac{4}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$$

En reportant cette dernière expression dans l'équation générale de compatibilité:

$$\varphi_e + \varphi_A + \varphi_m = 0$$

il vient, après simplification:

$$(13)\quad 2\alpha^3\beta\,(1-K) + 3\alpha^2\beta K - K\beta + 6 +$$

$$+ 2\,(K-1)\,\beta\left(\alpha^2 + \frac{4}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} = 0$$

Equation qui caractérise le comportement de la poutre au delà de la courbe $LL'$.

Dans la fig. 3 nous avons tracé les courbes qui représentent l'équation (13) pour les mêmes valeurs de $K$ que nous avions considérées en dessous de la courbe $LL'$. On remarque qu'au passage de la courbe $LL'$ les courbes caractérisées par une même valeur de $K$ sont tangentes les unes aux autres. Au delà de $LL'$ on constate cependant un changement de pente assez rapide et les différentes lignes procèdent presque parallèlement en conservant une allure à peu près rectiligne.

Si l'on observe la position relative des courbes $K$ = constante, $\rho$ = constante, on note qu'au delà de $LL'$ la tendance à la diminution du rapport $\rho$ disparaît. On constate même une légère réaugmentation de ce rapport qu'il faut évidemment attribuer au fait que la rotation anélastique du milieu de la poutre prévaut sur celle des encastrements.

Pour que tous ces raisonnements soient valables, il faut qu'en tous les points de la poutre la valeur absolue du moment fléchissant augmente constamment. Sans quoi la loi moment-courbure que nous avons adoptée ne serait plus applicable. Or le diagramme de la fig. 3 permet très facilement de déceler une éventuelle rétrogradation du moment fléchissant. Pour la zone d'encastrement cette éventualité sera en effet révélée par une réaugmentation du paramètre $\alpha$ (à laquelle correspond une diminution de l'étendue de la zone plastifiée correspondante). Pour le milieu de la poutre, la rétrogradation correspond à une diminution de l'abscisse $z_2$, autrement dit de la quantité $\alpha^2 + 4/\beta$ qui lui est proportionnelle. Sur notre diagramme les variations de $z_2$ seront donc représentées par les variations de la distance à la courbe $LL'$.

En partant de ces considérations, il est alors facile de se rendre compte que les courbes $K$ = constante que nous avons tracées ne donnent jamais lieu à une rétrogradation. Ce qui confirme la validité de nos calculs.

*c) Phase de rupture*

A titre d'exemple, nous supposerons que l'ordonnée limite du diagramme moment - courbure de la fig. 1 soit égale à $\pm\ 2\,M_1$. Cela revient à dire qu'à partir de l'instant où le moment d'encastrement atteindra la valeur $2\,M_1$, nous devrons admettre que les appuis se comportent comme des rotules plastiques. La fig. 4 représente alors l'allure des modifications que le diagramme des moments fléchissants devra subir pour une augmentation ultérieure de la charge: on passera du diagramme en trait plein au diagramme en pointillé.

Nous pourrons dès lors représenter cette nouvelle phase du comportement de la poutre dans le plan $\alpha$ — $\beta$ en remarquant que, à partir de l'instant où le moment d'encastrement aura atteint la valeur $2\,M_1$, le point qui caractérise l'équilibre de notre poutre se déplacera sur la courbe représentative de l'équation:

$$M_i = 2\,M_1$$

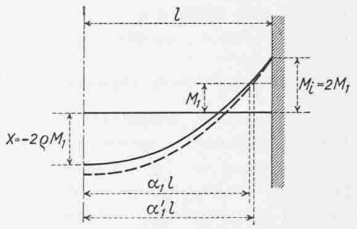

Fig. 4.

Si l'on tient compte de la formule (10) cette équation s'écrit:

$$\frac{M_1}{2}\,(2 + \beta\,\alpha^2 - \beta) = 2\,M_1$$

ce qui donne:

$$(14)\quad \alpha^2\,\beta - \beta - 2 = 0$$

Cette courbe est représentée sur la fig. 3 en $L'r$. Sur le diagramme, nous avons également tracé la courbe $Cr$ d'équation:

$$(15)\quad \alpha^2\,\beta = -6$$

qui correspond à la condition:

$$X = -2\,M_1$$

On remarquera incidemment que les courbes (14) et (15) se coupent, comme il se doit, au point $r$ qui se trouve sur la courbe $\rho = -1$ (et dont les cordonnées sont $\beta = -8$, $\alpha = 0{,}866$).

Il est cependant important de noter qu'à partir du moment où le point qui représente l'équilibre dans le plan $\alpha$ $\beta$ se déplace sur la courbe $L'r$, il se produit une augmentation du coefficient $\alpha$. Cela revient à dire que, sur les bords de la région plastifiée des encastrements, il y aura rétrogradation du moment fléchissant. Nous savons que, dans ces conditions, nos calculs seront nécessairement affectés d'une erreur puisque dans ces zones la loi moment-courbure de la fig. 1 ne sera plus valable.

Si l'on considère toutefois que dans la phase qui nous intéresse la valeur de la rotation anélastique à l'encastrement ($\varphi_A$) augmente très rapidement, on se rend compte que l'erreur dont il s'agit est certainement négligeable.

Nous pouvons donc continuer à nous servir des tracés de la fig. 3 pour suivre le comportement de notre poutre jusqu'à la rupture.

D'après nos hypothèses, la rotule plastique apparue sur les appuis ne peut tourner indéfiniment. Suivant la composition de la poutre, l'allure du diagramme des moments ou la nature des conditions de liaison, on devra donc pouvoir définir une rotation limite qui caractérisera la fin de la résistance. Le problème de calculer la charge de rupture de notre poutre se réduira donc au suivant: trouver sur la courbe $L'r$ un point pour lequel la rotation sur appui égale la valeur limite en question. En pratique, il faudra opérer par approximations successives. On schoisira sur la courbe $L'r$ un point compris entre la courbe $K$ = constante qui correspond au cas considéré et le point $r$ et l'on calculera, au moyen des formules (7) et (12), les valeurs correspondantes des termes $\varphi_e$, $\varphi_A$, $\varphi_m$. La somme algébrique de ces trois quantités résultera nécessairement positive, puisque nous avons supposé que le point choisi se trouve placé au-dessus de la courbe $K$ = constante. C'est à la rotation négative de la rotule sur appui que reviendra la tâche d'annuler la rotation globale pour rétablir la condition de compatibilité avec les liaisons. Tant que la rotation totale sur appui ainsi calculée se maintiendra inférieure à la limite admissible, la poutre pourra résister. On parviendra à la rupture quand la déformation demandée à la rotule égalera sa capacité limite d'adaptation.

On voit sur la fig. 3 que lorsque le point qui caractérise l'équilibre parcourt la courbe $L'r$, en se déplaçant vers le point $r$, la valeur absolue du rapport $\rho$ décroit assez rapidement. Si la rotation disponible sur appui sera suffisante, on pourra atteindre le point $r$; on aura alors égalisation des moments extrêmes et la rupture se produira par indétermination cinématique. Dans tous les autres cas, la rupture aura lieu par suite de l'insuffisance de la capacité locale d'adaptation et le moment de rupture résultera inférieur à celui que donnerait la théorie des rotules plastiques. Il est logique de

penser que cette dernière éventualité pourra se vérifier quand on atteindra la courbe $L'r$ en un point très éloigné du point $r$.

**Cas d'une poutre à encastrements élastiques**

Supposons maintenant que les encastrements de notre poutre puissent donner lieu à une rotation élastique. Nous exprimerons cette condition en disant qu'en présence d'un moment d'encastrement d'intensité $M_i$ les extrémités de la poutre subiront une rotation

$$\lambda M_i = \varphi_c$$

Pour étudier les phases successives du comportement de la poutre, il faudra cette fois égaler la somme algébrique des rotations élastiques et des rotations anélastiques d'une moitié de la poutre à $\varphi_c$.

En reprenant les mêmes notations que ci-dessus, nous pourrons alors écrire les différentes équations caractéristiques sous la forme suivante:

phase élastique:

(a) $\varphi_e = \lambda M_i$

en présence de déformations anélastiques localisées aux appuis:

(b) $\varphi_e + \varphi_A = \lambda M_i$

en présence de déformations anélastiques localisées au milieu de la portée:

(c) $\varphi_e + \varphi_m = \lambda M_i$

en présence de déformations anélastiques localisées à la fois aux encastrements et au milieu de la poutre:

(d) $\varphi_e + \varphi_A + \varphi_m = M_i$

La nécessité de considérer le cas c) provient de ce que, en phase élastique, pour des valeurs élevées de $\lambda$, le moment au milieu de la portée résulte plus fort que le moment d'encastrement. Auquel cas le phénomène anélastique commence au milieu de la poutre et le diagramme du moment fléchissant prend l'allure qui est représentée à la fig. 5. On voit sur cette figure que, cette fois, le paramètre $\alpha$ devient supérieur à 1, la position de la section soumise au moment $M_1$ étant purement virtuelle.

En substituant dans les égalités a), b), c), d) les valeurs des quantités $\varphi_e$, $\varphi_A$, $\varphi_m$ tirées des formules (3) et (12) ainsi que l'expression (10) du moment d'encastrement $M_i$, et en introduisant dans les calculs la quantité sans dimensions:

$$R = \frac{\lambda}{\frac{l}{EI}}$$

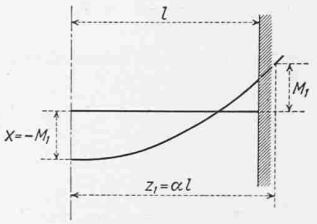

Fig. 5.

on parvient alors aux équations suivantes qui caractérisent le comportement de la poutre dans les différentes éventualités:

a) (16) $3\alpha^2\beta(1-R) - \beta(1-3R) + 6(1-R) = 0$

b) (17) $2\alpha^3\beta(1-K) + 3\alpha^2\beta(K-R) - \beta(K-3R) + 6(1-R) = 0$

c) (18) $3\alpha^2\beta(1-R) - \beta(1-3R) + 6(1-R) + 2\beta(K-1)\left(\alpha^2 + \frac{4}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} = 0$

d) (19) $2\alpha^3\beta(1-K) + 3\alpha^2\beta(K-R) - \beta(K-3R) + 6(1-R) + 2\beta(K-1)\left(\alpha^2 + \frac{4}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} = 0$

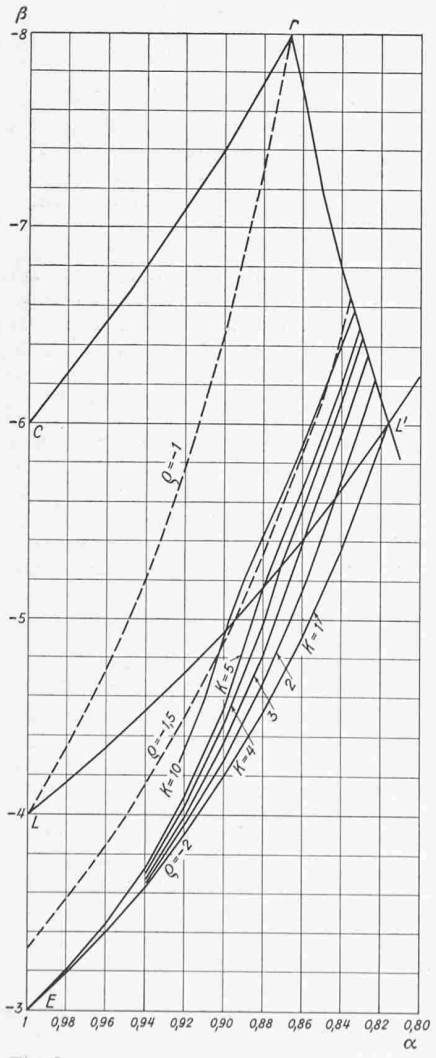

Fig. 3.

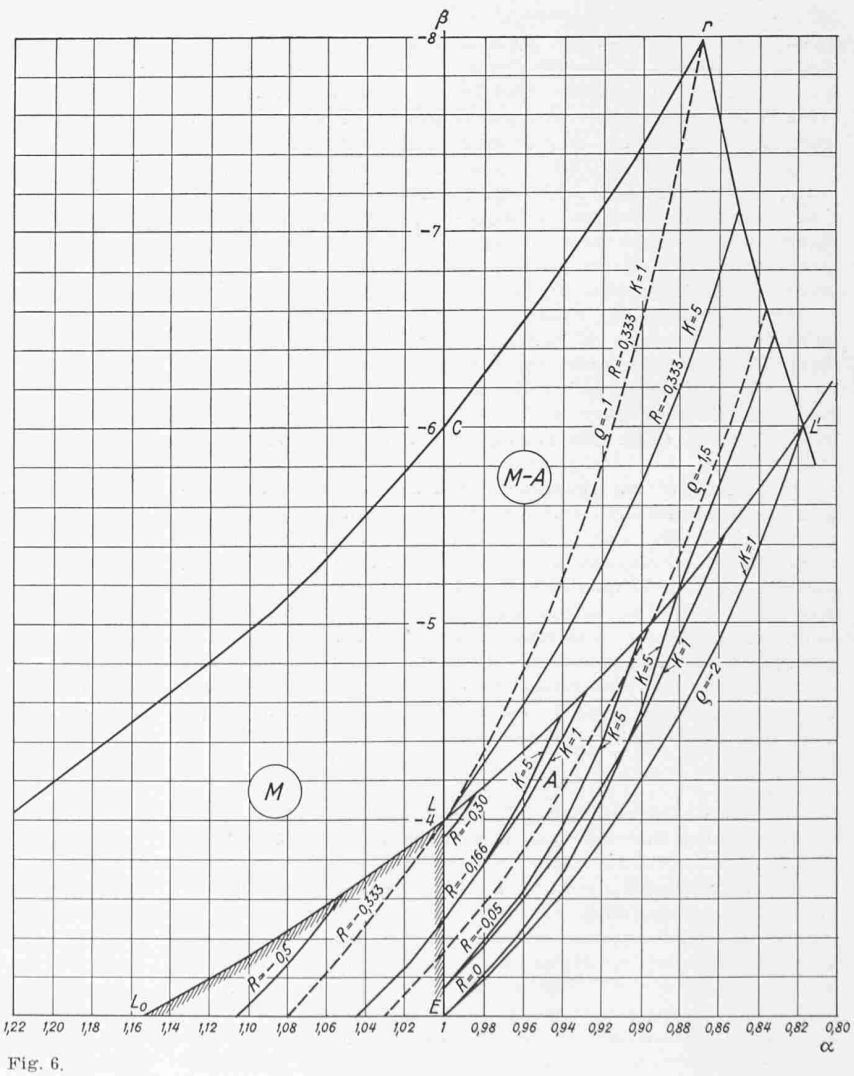

Fig. 6.

Dans la fig. 6 nous avons représenté graphiquement un certain nombre de courbes obtenues en attribuant au paramètre $R$ des valeurs correspondant à des conditions d'encastrement plus ou moins efficaces. On reconnaît tout d'abord sur le graphique la famille de courbes que nous avions déjà représentées dans la fig. 3, lesquelles correspondent au cas d'un encastrement parfait ($R = O$). Les courbes partent du point $E$ et se développent d'abord dans la région marquée $A$ (plastification aux appuis), successivement, après avoir traversé la ligne $LL'$, elles changent de direction et vont s'arrêter sur la courbe limite $L'r$. Quand la valeur absolue de $R$ augmente (c'est-à-dire quand on considère des encastrements de moins en moins efficaces) on voit que le point de départ du faisceau de courbes remonte sur l'axe des $\beta$. Cela signifie que la période élastique, qui est représentée par la partie de la courbe $K = 1$ qui se trouve à gauche de l'axe des $\beta$, se prolonge jusqu'à des valeurs plus élevées de la charge. Ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'en phase élastique la rotation que subit l'encastrement tend à réduire l'écart entre les moments extrêmes. Pour $R = -0{,}333$ les valeurs absolues des moments extrêmes sont égales en phase élastique; la courbe $K = 1$ (comportement purement élastique) coïncide donc avec la courbe $\rho = -1$. Pour $K > 1$ la plastification commence simultanément au milieu de la poutre et aux appuis. On entre donc directement dans la zone marquée $M - A$ (plastification simultanée). Dans cette zone, nous avons dessiné les courbes $K = 1$ et $K = 5$. On voit que, contrairement à ce qui se passait pour les valeurs moins élevées de $R$, la courbe $K = 5$ se trouve en-dessous de la courbe $K = 1$. Comme cette dernière coïncide avec le lieu des points pour lesquels il y a égalisation des moments extrêmes, on en déduit qu'au fur et à mesure que la charge augmente les moments au milieu et sur appui tendent à se différencier. Ce phénomène s'explique facilement si l'on remarque que le diagramme des moments fléchissants est fortement arrondi au milieu de la poutre et qu'il termine en pointe aux encastrements. Il s'en suit que la rotation anélastique du milieu de la poutre prévaut sur celle des appuis et que le moment sur appui augmente plus vite. La courbe $K = 5$ atteint la ligne $L'r$ pour $\beta = -7{,}15$. On voit donc qu'à moins de disposer sur appui d'une marge d'adaptation capable d'absorber l'effet du passage du paramètre $\beta$ de la valeur $-7{,}15$ à la valeur $-8$, il pourra très bien se produire que la rupture ait lieu dans des conditions moins favorables que celles qui se vérifiaient en phase élastique.

Si la valeur absolue de $R$ augmente encore, on voit sur le graphique que la ligne qui correspond au comportement élastique rencontre la courbe $L_0L$ (prolongement de $LL'$) avant d'atteindre l'axe des $\beta$. Cela revient à dire que le phénomène anélastique prendra naissance au milieu de la poutre. On entrera donc dans la région marquée $M$. Après quoi, suivant les cas, plusieurs éventualités pourront se présenter:

a) rencontre avec l'axe des $\beta$, passage dans la zone $M$-$A$ (plastification simultanée), rencontre avec la ligne $L'r$;

b) rencontre avec l'axe des $\beta$, rencontre avec la ligne $Cr$ (le moment au milieu atteignant la valeur limite $-nM_1$). A partir de ce moment, le point représentatif suivra la ligne $Cr$, l'ampleur de son déplacement étant réglée par la capacité d'adaptation du milieu de la poutre;

c) rencontre directe avec le prolongement de $Cr$. Ce cas correspond à un encastrement très flexible. On peut très bien concevoir que dans un cas semblable la rupture au milieu de la poutre puisse se produire avant même que les encastrements n'atteignent leur limite élastique.

Bien entendu, dans l'étude de toutes ces différentes éventualités, il faudra se préoccuper de déceler d'éventuelles «rétrogradations» du moment fléchissant. Pour cela il suffira de s'appuyer sur les considérations que nous avons développées sur cette question en parlant des poutres parfaitement encastrées.

En matière d'encastrements élastiques, il faudra cependant considérer également avec attention un autre aspect du problème: à savoir la possibilité que les déformations anélastiques qui prennent naissance aux extrémités de la portée intéressent, non seulement la poutre elle-même, mais également les éléments auxquels la poutre se trouve reliée, et qui lui confèrent les liaisons d'encastrement. Exemple typique: celui d'une poutre continue dans laquelle la plastification se produira toujours des deux côtés d'un appui intermédiaire. Nous n'insisterons pas sur l'étude de ce phénomène. Nous nous contenterons de remarquer qu'il sera toujours assez facile d'en tenir compte en affectant la rotation anélastique $\varphi_A$ d'un coefficient d'amplification convenable.

*

Pour ne pas dépasser les limites nécessairement restreintes du présent exposé, nous nous abstiendrons de reproduire la discussion détaillée de nos hypothèses de base et l'étude des possibilités de généralisation qu'offre le procédé dont nous avons indiqué les points essentiels. Le lecteur qui voudra approfondir ces aspects du problème pourra se reporter à d'autres publications [1]; qu'il nous suffise ici de conclure en remarquant qu'il est certain que l'étude des phénomènes d'adaptation dans les poutres précontraintes hyperstatiques exigera encore beaucoup de travail. Ce qui paraît souhaitable, c'est que les recherches se développent d'une manière coordonnée.

Nous serions heureux si la méthode d'interprétation que nous avons développée pouvait contribuer utilement à orienter les recherches et à établir un moyen pour comparer entre eux les résultats obtenus par les différents chercheurs.

Adresse de l'auteur: Prof. Franco Levi, Ing., Politecnico di Torino, Castello del Valentino, Torino.

# Die ersten fünfzig Jahre Kraftwerke Brusio

DK 061.5:621.29

Am 14. Juni 1904 fand im Bankhaus A. Sarasin & Cie. in Basel die konstitutierende Generalversammlung der Brusio Kraftwerke AG. statt. Diesem bedeutsamem Anlass widmet das Unternehmen eine prachtvoll ausgestattete Festschrift, die der heutigen Generation eindringlich und in gediegener Form zum Bewusstsein bringt, was es bedeutet und gekostet hat, vor fünfzig Jahren ein Hochdruck-Speicherkraftwerk mit Fernübertragung der Energie ins Ausland zu bauen.

Zugleich aber kreisen die Gedanken in der vorliegenden Schrift in sehr sinnvoller Weise um das zentrale Thema «Einordnung». Das gibt Anlass zu einer eingehenderen Betrachtung über das, was wir als Ingenieure und Architekten bauen und was wir alle als moderne Menschen nutzniessen. Denn Einordnung bedeutet eine sehr umfassende Forderung an alles technische Gestalten und an alles In-Dienst-Nehmen von Gestaltetem.

Diese Forderung ist nicht nur wirtschaftlich zu verstehen im Sinne einer zweckmässigen Erfüllung von Marktbedürfnissen, auch nicht nur historisch als Antwort auf die Entwicklungen in der Politik, im besondern als Antwort auf die sich kreuzenden Interessen verschiedener Menschengruppen und verschiedener Nationen; ebenso wenig ist sie ausschliesslich ästhetisch aufzufassen, als Rücksichtnahme auf die Naturschönheiten, die bei jedem Bauvorhaben verändert werden. Wesentlich und vorrangig ist die Einordnung all dessen, was wir als Techniker und Menschen tun, in die Wertehierarchie, die uns gesetzt ist. Damit ist nicht nur die Synthese von technischem Schaffen und allgemeinem kulturellen Leben gemeint, also von typisch menschlichen Verhaltensweisen, die heute vielfach noch als Gegensätze empfunden werden. Vielmehr geht es um das Herausarbeiten einer neuen, ganzheitlichen Lebenshaltung, in der der Mensch ganz sich selber ist, worauf die Synthese, von der eben die Rede war, ohne unser Hinzutun als reife Frucht aus dieser innern geistigen Haltung herauswächst.

Es ist überaus erfreulich und weist auf einen bedeutsamen Gesinnungswandel hin, dass in allen technischen, wirtschaftlichen, politischen, historischen und ästhetischen Gesichtspunkten, die in der Festschrift zur Sprache kommen, das Bedürfnis der Orientierung nach einer allumfassenden Werteordnung spürbar ist. Dazu sind allerdings Anlagen und Geschichte des Werkes besonders gut geeignet. Das Kraftwerk

[1] *F. Levi*, Analisi di fenomeni anelastici proseguita fino a rottura. «Giornale del Genio Civile», 1954, N° 3. — D'autres mémoires devant paraître incessamment seront consacrés à la description des résultats de deux séries d'essais qui ont été effectués auprès du Centre d'Etude sur les états de coaction de l'Ecole Polytechnique de Turin pour vérifier les considérations théoriques que nous venons d'exposer.