Der Randträgereinfluss bei Plattenbrücken

Autor(en): **Gilg, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **71 (1953)**

Heft 48

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-60672

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

71. Jahrgang

Nachdruck von Bild oder Text nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet
Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich

Nummer 48

Der Randträgereinfluss bei Plattenbrücken

Von Ing. Dr. B. GILG, Zürich.

Hiezu Tafel 40/41
DK 624.073.72

1. Einleitung und Problemstellung

Unter einer Plattenbrücke verstehen wir eine Brücke, deren Fahrbahnplatte ein Haupttragelement darstellt. Die Lasten werden also nicht von der Fahrbahn auf die Hauptträger und von diesen auf die Auflager übertragen, sondern die Fahrbahn überträgt ihr Eigengewicht und die Nutzlast direkt auf die Auflager. Im ersten Fall sind die Hauptträger gegenüber der Brückenplatte sehr steif, eventuell wirken noch Querträger und sekundäre Längsträger bei der Lastverteilung mit. Im zweiten Fall sind überhaupt keine Hauptträger nötig, oder — wenn solche vorhanden sind — ihre Steifigkeit ist von der selben Grössenordnung wie die der Platte.

Ueber die trägerfreie Plattenbrücke besteht heute schon eine umfassende Literatur, wobei wir nur das Tabellenwerk von *Olsen und Reinitzhuber* [1]) erwähnen wollen. Dieser Idealfall tritt aber praktisch selten auf. Die meisten Plattenbrücken weisen am Rand mehr oder weniger massive Verstärkungen auf, seien es nun die Brüstungsträger einer Strassenbrücke oder die Schottertrogabschlüsse einer Eisenbahnbrücke. Würde die neutrale Fläche der Platte mit der Neutralachse des Randträgers in einer Ebene liegen, so hätten wir den Spezialfall einer längs zwei gegenüberliegenden Seiten elastisch gestützten Platte; diese letzte wäre dann nur durch Momente und Querkräfte, nicht aber durch Normalkräfte beansprucht. Aber auch dieser Fall, welcher schon mehrfach behandelt wurde [2]), ist in der Praxis nicht häufig anzutreffen.

Wir werden deshalb den allgemeinen Fall einer Platte untersuchen, welche längs zwei Seiten durch Randträger verstärkt ist. Die Randträgerachse hat einen beliebigen Abstand von der Plattenmittelfläche. Sowohl Platte als auch Träger werden durch Momente, Querkräfte und Normalkräfte beansprucht. Für die weiteren Untersuchungen werden wir uns auf die Rechteckplatte beschränken, deren zwei andere Seiten frei drehbar auf festen Auflagern liegen. Die Resultate können aber auch auf die über mehrere Oeffnungen gespannte Platte angewandt werden.

2. Differentialgleichungen einer durch Momente, Quer- und Normalkräfte beanspruchten Platte

Wir betrachten eine dünne Platte, deren Dicke klein ist gegenüber den andern Abmessungen und deren Durchbiegungen wiederum klein sind gegenüber der Dicke. Für diese Platte stellen wir folgende Hypothesen auf [3]):

a) jede zur Plattenmittelebene senkrecht stehende Gerade steht nach der Belastung senkrecht zur verformten Plattenmittelfläche,

b) die verformende Wirkung der zur Mittelfläche senkrecht verlaufenden Schubspannungen kann vernachlässigt werden.

In Bild 1 ist die Verschiebung einer Senkrechten S (Hypothese a) dargestellt:

Dabei bezeichnet u die Verschiebung in der x-Richtung und w die Verschiebung in der z-Richtung. Analog soll v die Verschiebung in der zu x und z senkrecht stehenden y-Richtung darstellen. Der Index s deutet auf die Plattenmittelfläche. Es lassen sich aus Bild 1 leicht folgende Beziehungen ableiten:

$$(1) \qquad u(z) = u_s - z\,\frac{\partial w_s}{\partial x}$$

und analog

$$v(z) = v_s - z\,\frac{\partial w_s}{\partial y}$$

Aus den Verschiebungen (1) erhalten wir durch Differentiation die Verzerrungen (Dehnungen) ε_x und ε_y und die Winkeländerung γ_{xy}:

$$(2) \qquad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = (\varepsilon_x)_s - z\,\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = (\varepsilon_y)_s - z\,\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (\gamma_{xy})_s - 2z\,\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\,\partial y}$$

Nun bestehen zwischen den Spannungen und den Verzerrungen bekanntlich folgende Beziehungen:

$$(3) \qquad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\,\gamma_{xy}$$

Dabei bezeichnet E den Elastizitätsmodul und ν die Poisson- oder Querdehnungszahl.

Fassen wir jetzt die Normalspannungen zu Biegemomenten und Normalkräften, die Schubspannungen zu Drillungsmomenten und Schubkräften zusammen, so erhalten wir die folgenden Ausdrücke:

Normalkräfte:

$$(4) \qquad N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x\,dz = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\left[(\varepsilon_x)_s + \nu\,(\varepsilon_y)_s\right]$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y\,dz = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\left[(\varepsilon_y)_s + \nu\,(\varepsilon_x)_s\right]$$

Schubkräfte in horizontaler Richtung:

$$T_{xy} = T_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\,dz = \frac{E\,h}{2(1+\nu)}\,(\gamma_{xy})_s$$

Biegemomente:

$$(5) \qquad M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z\,dz = -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z\,dz = -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)$$

Drillungsmomente:

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\,dz = -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\,(1-\nu)\,\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\,\partial y}$$

In diesen Formeln bezeichnet h die Plattendicke.

Betrachten wir nun an einem unendlich kleinen Plattenelement das Gleichgewicht der Kräfte und Momente, welche

[1]) *Olsen u. Reinitzhuber:* Die zweiseitig gelagerte Platte, Bd. 1 u. 2, Berlin 1951.

[2]) Vgl. z. B. *S. Timoshenko:* Theory of Plates and Shells, S. 219, New York and London, 1940.

[3]) Diese Hypothesen sind für die Berechnung dünner Platten üblich.

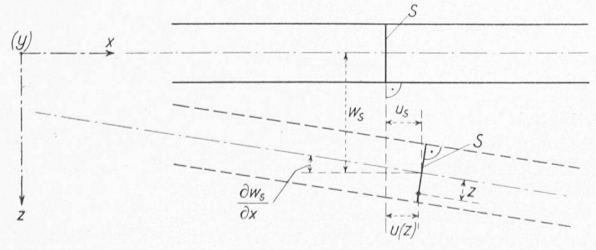

Bild 1

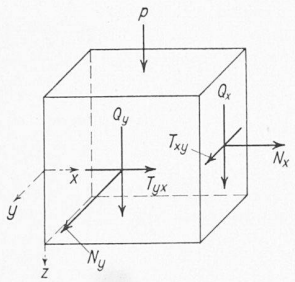

Bild 2a

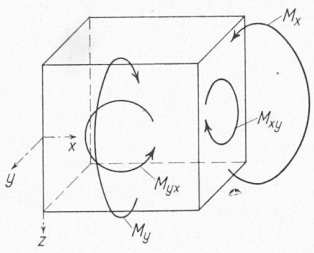

Bild 2b

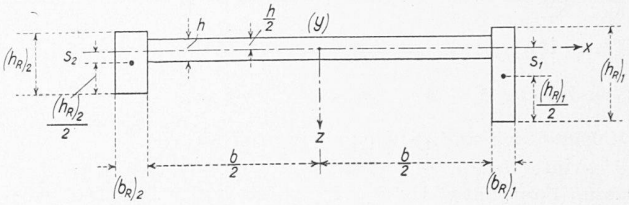

Bild 3

in den Bildern 2 a und 2 b skizziert sind, so erhalten wir folgende zwei Differentialgleichungen:

(6) $$\Delta\Delta F = 0$$

(7) $$\Delta\Delta w_s = \frac{p}{D}$$

Hiebei bedeutet Δ den Laplaceschen Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

F die Airysche Spannungsfunktion[3a]),

p die von x, y abhängige Belastung und

D die Biegesteifigkeit: $D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$.

Die Beanspruchung der Platte wird also durch die Scheibengleichung (6) und die Plattengleichung (7) charakterisiert[3a]), wobei die Funktionen F und w_s durch die Randbedingungen voneinander abhängig sind. Die Airysche Spannungsfunktion ist durch folgende differentielle Ausdrücke mit den Kräften N_x, N_y und T_{xy} verbunden:

(8) $$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$T_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

3. Formulierung der Randbedingungen an den durch Randträger verstärkten Rändern

Wir setzen voraus, dass der in Bild 3 skizzierte Querschnitt über die ganze Länge des Tragwerks konstant bleibt. Wir legen die xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems in die Plattenmittelfläche, die z-Achse zeigt hiebei senkrecht nach unten; die Breite der Platte bezeichnen wir mit b, ihre Dicke mit h, die Breite des Randträgers mit b_R und seine Höhe mit h_R. Der Abstand der Randträgerachse von der Plattenmittelfläche sei s, und zwar ist dieser Abstand positiv, wenn die Platte in der oberen Hälfte des Gesamtquerschnittes liegt. Wir vernachlässigen sowohl die Torsionssteifigkeit als auch die horizontale Biegesteifigkeit des Randträgers. Somit können also von der Platte auf den Randträger keine Biegemomente und keine Normalkräfte in der x-Richtung übertragen werden. Wir betrachten zuerst den allgemeinen Fall zweier verschiedener Randträger; für alle Randträgergrössen soll in Zukunft der Index 1 sich auf den Rand $x = + b/2$, der Index 2 auf den Rand $x = - b/2$ beziehen.

An jedem Rand $x = \pm b/2$ lassen sich folgende vier Bedingungen formulieren:

a) Das Biegemoment in der x-Richtung soll verschwinden,

b) Die Normalkraft in der x-Richtung soll verschwinden. Diese beiden Bedingungen resultieren aus der Annahme, dass der Randträger keine horizontale Biegesteifigkeit und keine Torsionssteifigkeit besitzt.

c) Die Querkraft der Platte stellt die Vertikalbelastung des Randträgers dar; dieser wird noch durch eine Normalkraft N_R im Abstand s von seiner Achse beansprucht. Die dadurch erzeugte Biegelinie der Randträgerachse soll parallel zur Biegelinie der Platte verlaufen.

d) Die horizontale Verzerrung der Plattenmittelfläche soll gleich der horizontalen Verzerrung des Balkens in der selben Höhe, also im Abstand s von der Randträgerachse, sein.

Die Bedingungen a) und b) lassen sich mathematisch leicht mit Hilfe der Ausdrücke 5) und 8) formulieren. Anstatt w_s schreiben wir nur noch w, da ja die Durchbiegung aller Punkte mit gleichem x und y konstant (von z unabhängig) ist.

(9) $$- D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\pm \frac{b}{2}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{\pm \frac{b}{2}} = 0$$

Für die Bedingung c) müssen wir die Querkraft $\overline{Q}_x$ am Plattenrand kennen. Diese setzt sich zusammen aus der eigentlichen Querkraft Q_x und der durch die Drillungsmomente M_{xy} hervorgerufenen Belastung[4]):

$$\overline{Q}_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Setzen wir die Formeln für Q_x und M_{xy} ein, so erhalten wir[5]):

(10) $$\overline{Q}_x = - D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

Die Normalkraft N_R, welche den Randträger in der Höhe s angreift, berechnen wir durch eine Gleichgewichtsbetrachtung am Querschnitt von Bild 3. Da sowohl Platte als auch Randträger auf die Auflager keine Horizontalkräfte übertragen, ist die Resultierende der Schnittkräfte dieses Querschnittes in der y-Richtung ein reines Biegemoment. Die Summe aller Normalkräfte muss also verschwinden. Ferner dürfen diese Normalkräfte kein resultierendes Moment um die z-Achse bilden. Wir erhalten somit folgende zwei Gleichgewichtsbedingungen:

$$(N_R)_1 + (N_R)_2 + \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} N_y \, dx = 0$$

(Gleichgewicht der Kräfte),

$$(N_R)_1 \frac{b}{2} - (N_R)_2 \frac{b}{2} + \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} N_y x \, dx = 0$$

(Gleichgewicht der Momente bezüglich Koordinatenursprung).

Der Hebelarm der Randträgernormalkräfte ist streng genommen $\frac{b + b_R}{2}$. Wir vernachlässigen aber die Randträgerbreite, da sie gegenüber der Plattenbreite klein ist.

Setzen wir für N_y die Ausdrücke (4) ein, so ergibt sich:

(11) $$(N_R)_1 = - \frac{1}{b} \left[b \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\frac{b}{2}} - (F)_{\frac{b}{2}} + (F)_{-\frac{b}{2}} \right]$$

$$(N_R)_2 = - \frac{1}{b} \left[- b \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{-\frac{b}{2}} + (F)_{\frac{b}{2}} - (F)_{-\frac{b}{2}} \right]$$

Das totale Randträgermoment setzt sich nun zusammen aus einem Anteil $M_R(p)$, welcher von der Vertikalbelastung herrührt, und einem Anteil $M_R(N) = - N_R \cdot s$, welcher von

[3a]) Vgl. dazu *Girkmann*, Flächentragwerke, Abschnitt 2 u. 3, Wien 1946.

[4]) Vgl. z. B. *Timoshenko*, loc. cit. S. 220.

[5]) Für Q_x erhalten wir den Ausdruck aus einer Gleichgewichtsbetrachtung am unendlich kleinen Plattenelement, für M_{xy} siehe (5).

der Normalkraft stammt. Zwischen der Biegelinie w_R des Randträgers und seinem Moment besteht aber folgende Beziehung:

$$\frac{\partial^2 w_R}{\partial y^2} = -\frac{M_R}{(EJ)_R}$$

(EJ_R) = Biegesteifigkeit des Randträgers.

Leiten wir diese Gleichung zweimal nach y ab und berücksichtigen wir, dass die zweite Ableitung des Momentes $M_R(p)$ gleich der negativen Vertikalbelastung des Balkens ($\overline{Q}_x$) ist und dass die Vertikalverschiebung w_R der Balkenachse gleich der Vertikalverschiebung w der Plattenmittelfläche sein muss, so können wir die Randbedingung c) folgendermassen formulieren:

$$(EJ)_R \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{\partial^2 M_R}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 M_R(p)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_R(N)}{\partial y^2} = -\overline{Q}_x + s\frac{\partial^2 N_R}{\partial y^2}$$

Da wir, wie Bild 2a zeigt, die Querkraft Q als positive Kraft angenommen haben, wenn sie nach unten zeigt, so zeigt die Balkenbelastung als Reaktion senkrecht nach oben und ist somit negativ, was wir oben behauptet haben [6]). Wir setzen nun die Ausdrücke (10) und (11) in die obige Gleichung ein und erhalten den endgültigen Ausdruck für die dritte Randbedingung:

$$(12)\quad \left((EJ)_R \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{\pm\frac{b}{2}} = \pm D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{\pm\frac{b}{2}} \mp s\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\right)_{\pm\frac{b}{2}}$$

Dabei ist schon berücksichtigt, dass die zweite Ableitung von F nach y am Rand verschwindet (9).

Die Randbedingung d) lässt sich wieder leicht formulieren. Die Verzerrung der Plattenmittelfläche in der y-Richtung berechnen wir aus den Formeln (4):

$$(\varepsilon_y)_s = \frac{N_y}{Eh} = \frac{1}{Eh}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Die Verzerrung der Randträgerfaser im Abstand s von der Achse beträgt bekanntlich:

$$(\varepsilon_y)_{\text{im Abstand } s} = (\varepsilon_y)_{\text{Randträgerachse}} + s\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{N_R}{h_R b_R E_R} + s\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Diese beiden Verzerrungen sind einander gleichzusetzen. Wir leiten beide zweimal nach y ab, weil sich die Gleichung dadurch vereinfacht. Die vierte Randbedingung lautet also:

$$(13)\quad \frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)_{\pm\frac{b}{2}} = \mp\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\right)_{\pm\frac{b}{2}}\frac{1}{h_R b_R E_R} + s\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{\pm\frac{b}{2}}$$

4. Berechnung der zweiseitig frei drehbar gelagerten Rechteckplatte

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich nur auf die verstärkten Ränder, welche normalerweise keine Lagerung aufweisen. In der y-Richtung ist der Verlauf der Platte noch uneingeschränkt. Wir untersuchen nun den Fall einer Platte von der Länge l, welche längs der beiden Randlinien $y = 0, l$ frei drehbar gelagert ist. Es müssen also längs dieser Ränder folgende Bedingungen erfüllt sein:

a) Die Durchbiegung w der Platte (sowie natürlich auch des Randträgers) muss verschwinden.

b) Die Krümmung der Platte in der y-Richtung $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ muss ebenfalls verschwinden, damit die Biegemomente $M_y = 0$ werden.

c) Die Normalkräfte N_y senkrecht zur Auflagerlinie müssen verschwinden.

d) Die Verzerrungen längs der Auflagerlinie müssen null werden, was unter der Voraussetzung von verschwindenden Normalkräften N_y nichts anderes bedeutet als: $N_x = 0$.

Wir suchen nun zwei Funktionen F und w, welche sowohl die Differentialgleichungen (6) und (7) als auch die eben zitierten Randbedingungen erfüllen. Es sind dies die Funktionen:

$$(14)\quad F = \sum_{m=1,2\ldots}^{\infty}(E_m \operatorname{Cos}\alpha_m x + F_m \operatorname{Sin}\alpha_m x + G_m \alpha_m x \operatorname{Cos}\alpha_m x + H_m \alpha_m x \operatorname{Sin}\alpha_m x)\sin\alpha_m y$$

$$w = \sum_{m=1,2\ldots}^{\infty}(A_m \operatorname{Cos}\alpha_m x + B_m \operatorname{Sin}\alpha_m x + C_m \alpha_m x \operatorname{Cos}\alpha_m x + D_m \alpha_m x \operatorname{Sin}\alpha_m x + P_m)\sin\alpha_m y$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{l}$$

$A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m, G_m$ und H_m sind Konstanten, welche mit Hilfe der Randbedingungen aus dem Abschnitt 3 zu bestimmen sind. P_m ist das Belastungsglied der Fourier-Reihe und kann mit Hilfe der Gleichung (7) bestimmt werden:

$$(15)\quad \sum_{m=1,2\ldots}^{\infty}(\alpha_m)^4 P_m \sin\alpha_m y = \frac{p}{D}$$

Die Belastungsfunktion $p(x, y)$ muss also zuerst in eine Fourier-Reihe entwickelt werden.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten sind natürlich acht Gleichungen nötig. Beachten wir, dass jede der vier Randbedingungen [s. Gleichungen (9), (12) und (13)] an zwei Rändern, nämlich für $x = \pm b/2$, erfüllt werden muss, so erhalten wir gerade die gewünschte Anzahl Beziehungen.

5. Numerische Auswertung für die Rechteckplatte mit symmetrischen Randträgern unter konstanter Belastung p

Als Anwendung untersuchen wir den einfachsten, praktisch häufig auftretenden Fall einer Platte, deren beide Randverstärkungen die selben Abmessungen besitzen. Der Querschnitt von Bild 3 ist dann symmetrisch zur y-Achse. Setzen wir nun noch eine konstante Lastverteilung p voraus, so ist die Beanspruchung und die Deformation der Platte ebenfalls symmetrisch zur y-Achse, wodurch die Konstanten B_m, C_m, F_m und G_m der Funktionen F und w [s. (14)] alle null werden. Die Randbedingungen für die beiden verstärkten Ränder sind identisch, wir müssen sie also nur für einen Rand (z. B. $x = +b/2$) erfüllen. Setzen wir die Funktionen (14) in die Gleichungen (9), (12) und (13) ein, so erhalten wir das System der Gleichungen 16 (Seite 704).

Zu der letzten Gleichung des Systems ist zu bemerken, dass wir in ihr den Faktor P_m durch den Wert ersetzt haben, welchen die erste Gleichung dafür liefert, weil sich der Ausdruck dann vereinfacht.

Den Belastungsfaktor P_m erhalten wir aus der Gleichung (15):

$$P_m = \frac{4\,p\,l^4}{m^5\pi^5 D}$$

Die grössten Spannungen treten längs der Mittellinie $y = l/2$ auf, was aus Bild 4 ohne weiteres hervorgeht. Wir haben deshalb im Mittelpunkt [$y = l/2$, $x = 0$] die Biegemomente M_x und M_y und die Normalkräfte N_x und N_y und ferner im Randpunkt [$y = l/2$, $x = b/2$] das Biegemoment M_y sowie die Normalkraft N_y berechnet. Alle diese Schnittgrössen greifen in der Plattenmittelfläche an. Sie sind pro Längeneinheit resp. Breiteneinheit gerechnet, deshalb besitzen die Momente die Dimension einer Kraft und die Kräfte die Dimension einer Kraft pro Längeneinheit. Für den Randträger haben wir ebenfalls im Mittel-

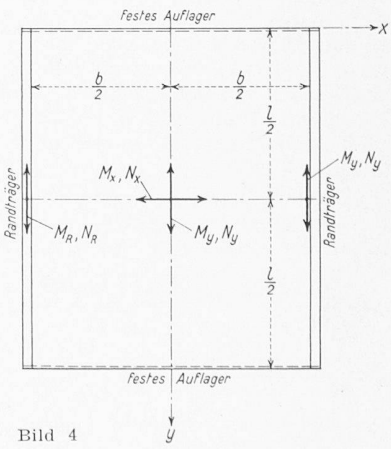

Bild 4

[6]) Für den Rand $x = -b/2$ ist dann allerdings das Gegenteil der Fall.

punkt ($y = l/2$) das Biegemoment und die Normalkraft bestimmt, wobei der Angriffspunkt dieser Schnittgrössen in der mittleren Faser liegt, also im allgemeinen Fall in einer von der Plattenmittelfläche entfernten Ebene.

Die Variation der Platten- und Randträgerabmessungen haben wir in vier Parametern berücksichtigt:

1. Parameter: Verhältnis der Spannweite zur Plattenbreite $= l/b$.

$$A_m \operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2}(1-\nu) + D_m\left[\frac{\alpha_m b}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2}(1-\nu) + 2\operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2}\right] = \nu P_m \tag{16}$$

$$E_m \operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2} + H_m\frac{\alpha_m b}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2} = 0$$

$$A_m\left[(EJ)_R\,\alpha_m \operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2} - D\operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2}(\nu-1)\right] +$$

$$+ D_m\left[(EJ)_R\,\alpha_m\frac{\alpha_m b}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2} - D\left(\frac{\alpha_m b}{2}\operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2}(\nu-1) + \operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2}(1+\nu)\right)\right] -$$

$$- s E_m \operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2} - s H_m\left(\frac{\alpha_m b}{2}\operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2} + \operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2}\right) = -(EJ)_R\,\alpha_m P_m$$

$$A_m \operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2} + D_m\left(\frac{\alpha_m b}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2} + 2\operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2}\right) +$$

$$+ E_m\left[\frac{\nu}{E h s}\operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2} + \frac{\nu}{E_R b_R h_R s\,\alpha_m}\operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2}\right] +$$

$$+ H_m\left[\frac{\nu}{E h s}\left(\frac{\alpha_m b}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2} + 2\operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2}\right) + \frac{\nu}{E_R b_R h_R s\,\alpha_m}\left(\frac{\alpha_m b}{2}\operatorname{Cos}\frac{\alpha_m b}{2} + \operatorname{Sin}\frac{\alpha_m b}{2}\right)\right] = 0\,.$$

2. Parameter: Verhältnis der Plattenbreite zur Randträgerbreite $= b/b_R$

3. Parameter: Verhältnis der Randträgerhöhe zur Plattenhöhe $= h_R/h$

4. Parameter: Abstand der mittleren Faser des Randträgers von der Plattenmittelfläche $= s$.

(Diese Abmessungen sind alle in Bild 3 dargestellt.)

Die Querdehnungszahl ν wurde so gewählt, dass sie dem Eisenbeton entspricht, nämlich $\nu = 0{,}16$.

Die Diagramme[7]) 1 und 2 zeigen die Abhängigkeit des Längsmomentes M_y im Plattenmittelpunkt von dem Verhältnis der Spannweite zur Breite. Das erste setzt dabei ein Verhältnis der Plattenbreite zur Randträgerbreite von 15, das zweite ein solches von 25 voraus. Für dazwischenliegende Verhältnisse kann linear interpoliert werden. Ferner ist für kleine Ueberschreitungen der Zahl 25 resp. Unterschreitungen von 15 eine lineare Extrapolation erlaubt. Das Verhältnis der Höhen wird mit n bezeichnet. Wir haben die vier Fälle $n = 0$ (das ist die normale Platte ohne Randträger), 2, 3 und 4 untersucht. Die Variation des 4. Parameters wird durch die Buchstaben s und s' und die Zahl 0 ausgedrückt. Dabei bezeichnet s eine Platte, deren Oberfläche mit dem oberen Rand des Randträgers zusammenfällt (Bild 5 a), 0 eine Platte, deren Plattenmittelebene mit der mittleren Faser des Randträgers zusammenfällt und s' den dazwischenliegenden Fall (Bild 5 b und 5 c).

Liegt die Platte unterhalb der mittleren Randträgerfaser, so gelten die selben Werte, also für $-s'$ diejenigen von s' und für $-s$ diejenigen von s. Ein positives Moment erzeugt oben Druck- und unten Zugspannungen.

Das Diagramm 3 bzw. 4 zeigt in der selben Art die Abhängigkeit des Längsmomentes M_y am Rand der Platte. Für die verschiedenen Parameter gelten die selben Erläuterungen wie oben. Wir sehen, wie für eine sehr breite Platte der Randträgereinfluss auf das Mittelmoment stark abnimmt und im Grenzfall verschwindet (Diagramm 1 und 2), wogegen das Plattenrandmoment mit zunehmender Breite immer mehr abnimmt, da dann der Randträger einen grösseren Prozentsatz der Beanspruchung übernimmt. Der Verlauf des M_y vom Plattenrand zur Plattenmitte ist angenähert parabelförmig. Dabei liegt der Scheitel der Parabel natürlich in der Mitte. Je länger die Platte im Verhältnis zu ihrer Breite wird, desto mehr nähern sich die beiden Werte, und von ca. $l/b = 4$ an ist das Plattenmoment M_y über die ganze Breite konstant. Diese Konstante ist als Zahl am rechten Ende des Diagramms angegeben. Das Längsmoment kann dann übrigens nach der klassischen Biegelehre berechnet werden, wobei die Platte samt beiden Randträgern wie ein einfacher Balkenquerschnitt anzusehen ist.

Zu der Darstellungsart der Diagramme ist noch zu bemerken, dass die dimensionslose Aufzeichnung gewählt wurde, indem die Abszisse die Variable l/b trägt und auf der Ordinate die Grösse M/pl^2 abgetragen wird. Wie wir früher gezeigt haben, besitzt M die Dimension einer Kraft, p die einer Kraft pro Fläche und l natürlich die einer Länge. Somit ist der Quotient eine reine Zahl.

Das Diagramm 5 bzw. 6 zeigt die Abhängigkeit des Längsmomentes M_R im Randträger von den verschiedenen Plattendimensionen. Für die Darstellungsart gelten die zu den Diagrammen 1—4 gemachten Bemerkungen. Die Dimension dieses Momentes ist eine Kraft mal eine Länge, denn es bezieht sich auf den ganzen Randträger und nicht nur auf die Einheit seiner Breite. Deshalb muss auch auf der Ordinate die Grösse M/pl^3 abgetragen werden, damit eine dimensionslose Darstellung möglich ist. Die Zahlen am rechten Ende der Kurven geben wiederum den Verlauf für l/b grösser als 4 an. Diese Werte sind aber noch mit dem Reziprokverhältnis b/l zu multiplizieren. Wäre der Ordinatenwert als M/pbl^2 aufgezeichnet, so würde das Moment für grosse Längen konstant bleiben, da man es wiederum nach der klassischen Biegelehre berechnen kann, indem die versteifte Platte als Balkenquerschnitt angesehen wird. Der Wert $p' = pb$ ist dann eine Last pro Längeneinheit und der Ordinatenwert müsste als $M/p'l^2$ abgetragen werden. Da wir aber der oben zitierten Darstellung den Vorzug gegeben haben, nimmt das Randträgermoment hyperbolisch ab gegen $l/b = \infty$. Im allgemeinen ist festzuhalten, dass der Randträger mit zunehmender Steifigkeit gegenüber der Platte natürlich dieser die Momente entzieht und dass sowohl im Träger als auch in der Platte die Biegemomente mit abnehmendem Abstand s (vgl. Bild 5) grösser werden.

Diagramm 7 bzw. 8 zeigt das Verhalten des Quermomentes M_x in der Plattenmitte. Es ist im Verhältnis zu den Längsmomenten klein, sofern die Randträger schwach sind oder die Spannweite l gross. Dagegen kann es für nahezu quadratische Platten mit relativ steifen Randträgern ziemlich hohe Werte annehmen.

Im ganzen ist zu bemerken, dass schon bei geringer Versteifung des Randträgers eine beachtliche Reduktion der Längsmomente M_y eintritt, welche nicht übersehen werden sollte, und dass für versteifte Plattenträger, deren Verhältnis $l/b > 4$ ist, die komplizierte Berechnung mit Hilfe der Plattentheorie für die Beanspruchung in der Längsrichtung durch die klassische Biegelehre ersetzt werden kann. Für die Querbeanspruchung dagegen liefert diese Berechnung keine Resultate!

Die Diagramme 9 bis 12 veranschaulichen die im Plattenmittelpunkt und am Rand auftretenden Normalkräfte in Längs- und Querrichtung. Dabei ist zu beachten, dass auf der Ordinatenachse der Wert

$$-\frac{h N}{p l^2}$$

abgetragen ist. Wir haben also die mit der Plattendicke h multiplizierte Normalkraft aufgetragen. Dies wiederum im Hinblick auf eine dimensionslose Darstellung. Ferner entsprechen die über der Abszisse liegenden Werte einer negativen Normalkraft, d. h. einer Druckkraft. Für den Fall von Bild 5 c, wo $s = 0$ wird, verschwinden sämtliche Normalkräfte. Liegt die Plattenmittelfläche unterhalb der Randträgerachse, so wechseln sie das Vorzeichen. Für $-s'$ resp. $-s$ erhalten wir

[7]) Die Diagramme 1 bis 14 sind auf Tafel 40/41 vereinigt.

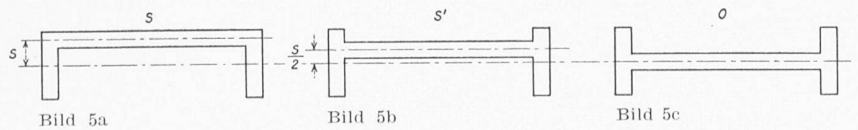

Bild 5a Bild 5b Bild 5c

Diagramme zur Berechnung des Randträgereinflusses bei Plattenbrücken

Von Dipl. Ing. Dr. sc. techn. *B. Gilg*, Zürich

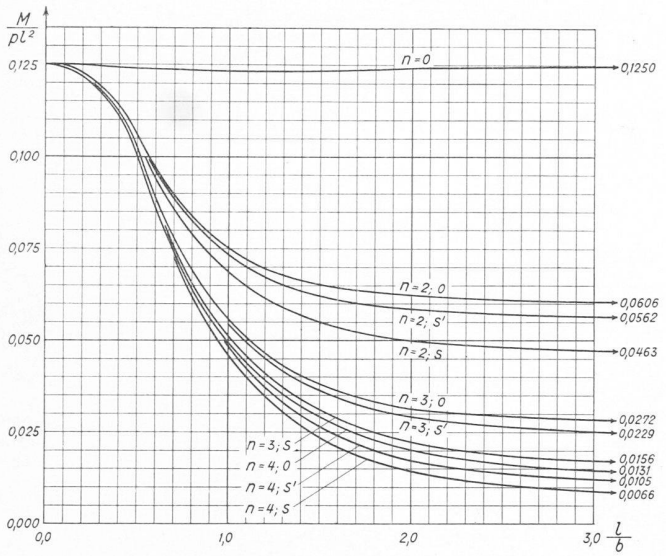

Diagramm 1: p = konst., M_y im Plattenmittelpunkt
$b/b_R = 15$; $h_R/h = n$

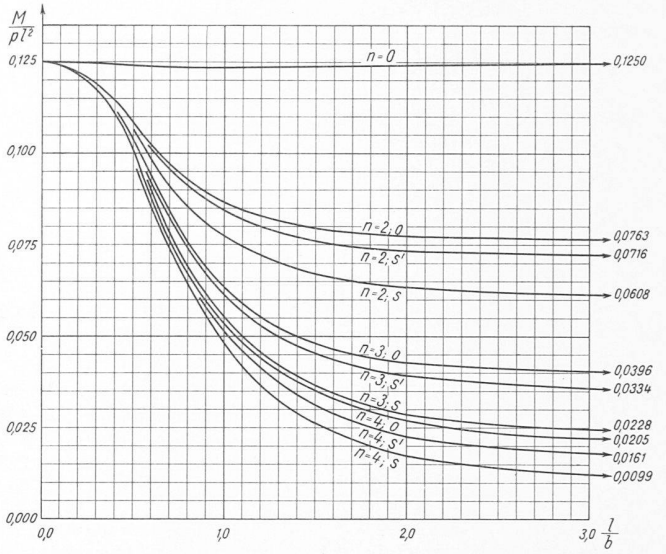

Diagramm 2: p = konst., M_y im Plattenmittelpunkt
$b/b_R = 25$; $h_R/h = n$

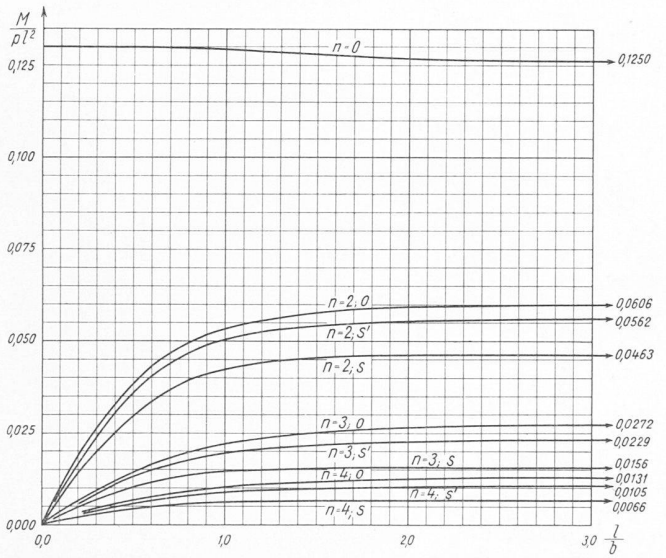

Diagramm 3: p = konst., M_y am Plattenrand
$b/b_R = 15$; $h_R/h = n$

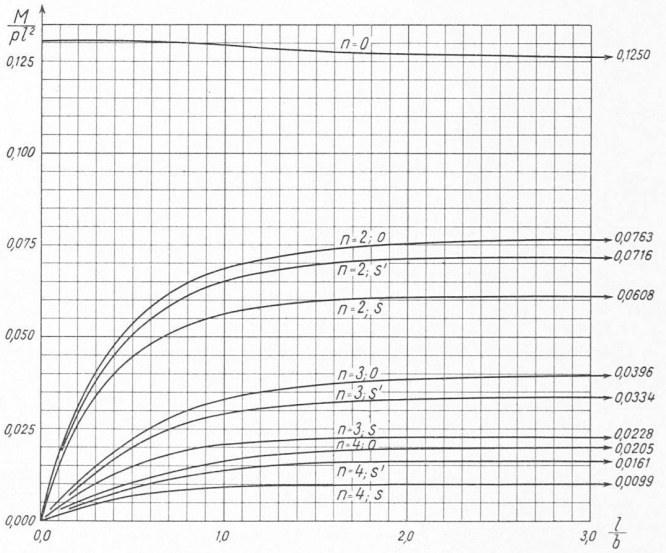

Diagramm 4: p = konst., M_y am Plattenrand
$b/b_R = 25$; $h_R/h = n$

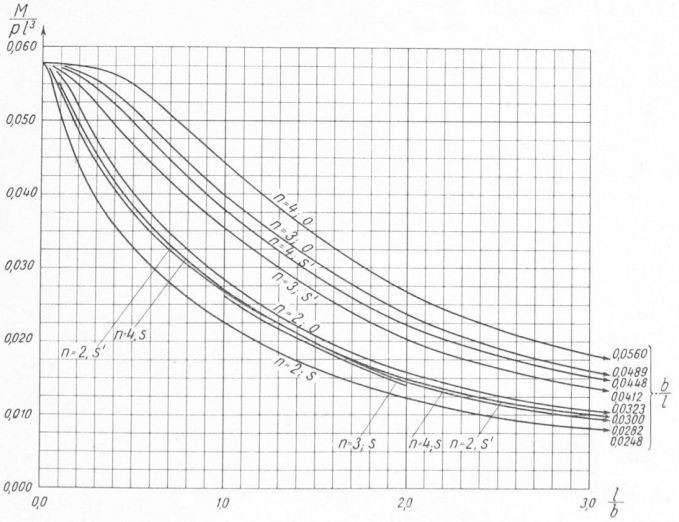

Diagramm 5: p = konst., M_R im Randträger
$b/b_R = 15$; $h_R/h = n$

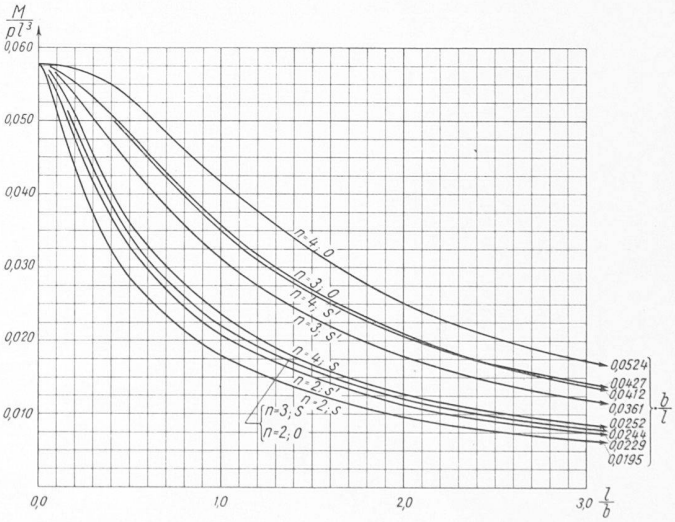

Diagramm 6: p = konst., M_R im Randträger
$b/b_R = 25$; $h_R/h = n$

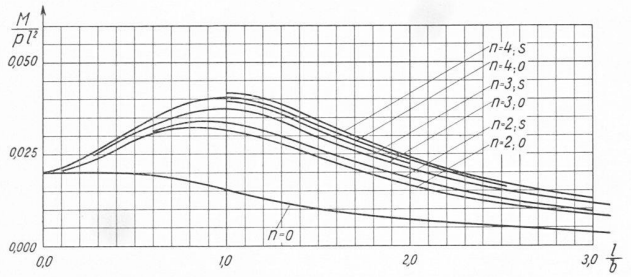

Diagramm 7: p = konst., M_x in Plattenmitte
$b/b_R = 15$; $h_R/h = n$

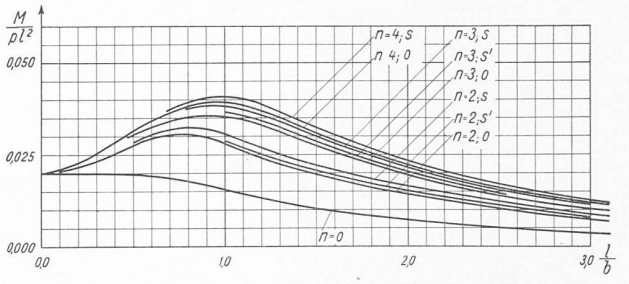

Diagramm 8: p = konst., M_x in Plattenmitte
$b/b_R = 25$; $h_R/h = n$

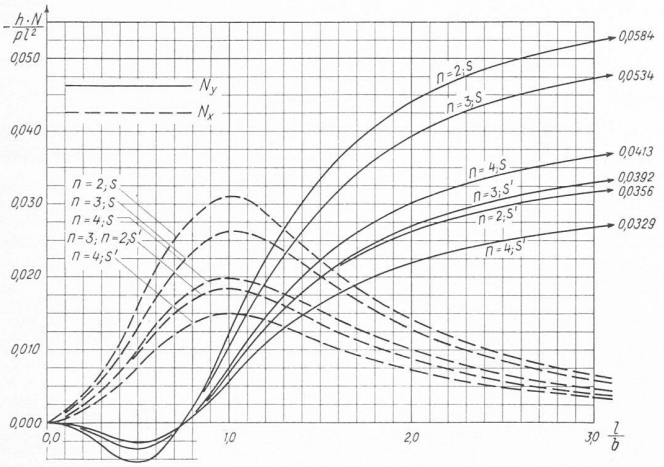

Diagramm 9: p = konst., N_y, N_x in Plattenmitte
$b/b_R = 15$; $h_R/h = n$

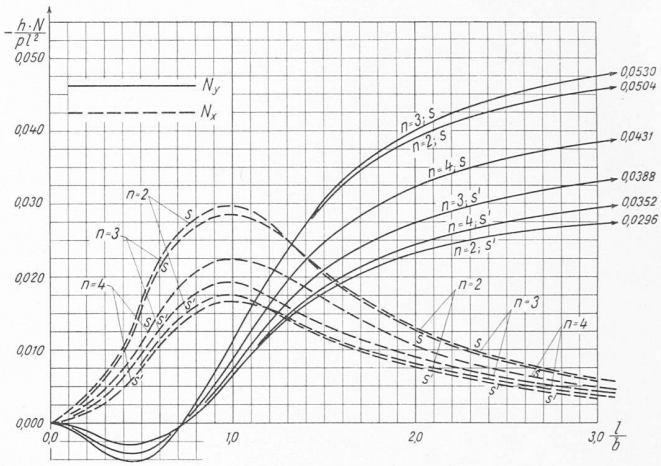

Diagramm 10: p = konst., N_y, N_x in Plattenmitte
$b/b_R = 25$; $h_R/h = n$

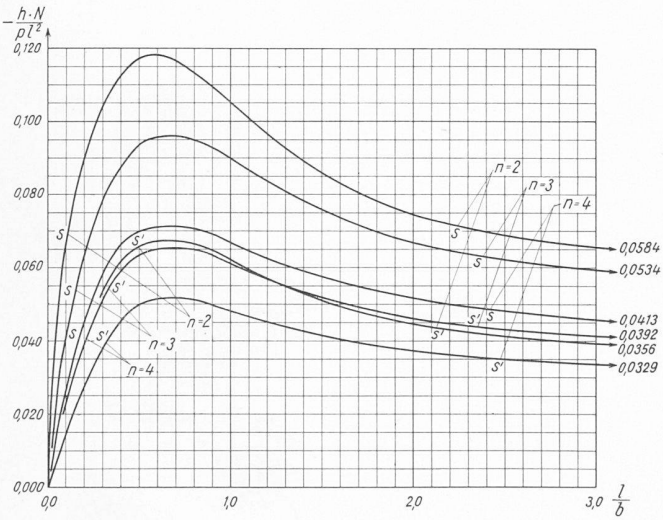

Diagramm 11: p = konst., N_y am Plattenrand
$b/b_R = 15$; $h_R/h = n$

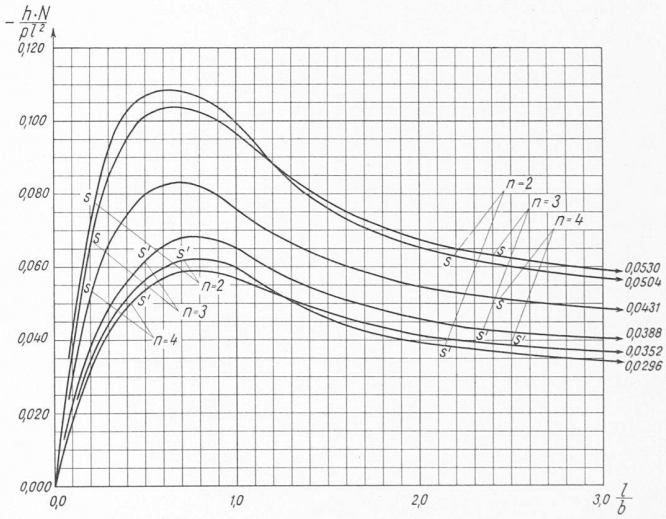

Diagramm 12: p = konst., N_y am Plattenrand
$b/b_R = 25$; $h_R/h = n$

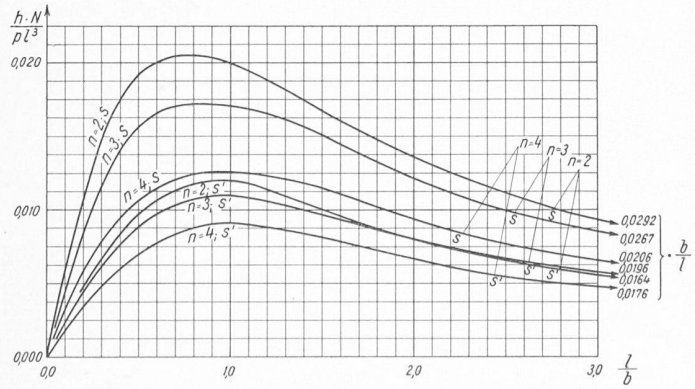

Diagramm 13: p = konst., N_R im Randträger
$b/b_R = 15$; $h_R/h = n$

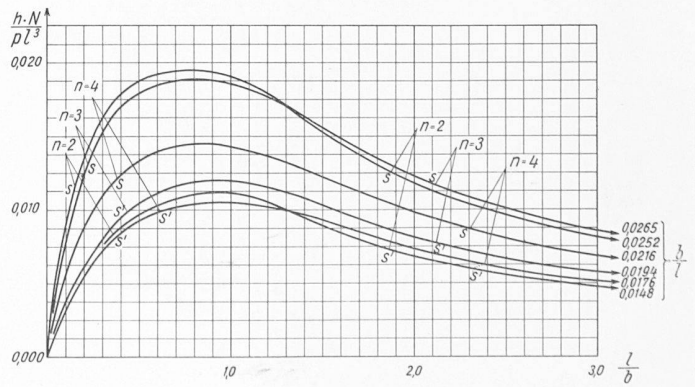

Diagramm 14: p = konst., N_R im Randträger
$b/b_R = 25$; $h_R/h = n$

also die selben Kräfte wie für s' resp. s, aber mit umgekehrtem Vorzeichen.

Was die Normalkräfte N_y in Längsrichtung anbelangt, so ist festzuhalten, dass sie für Platten mit kleinem Verhältnis l/b am Rand sehr gross sind und gegen die Mitte stark abnehmen, ja sogar in gewissen Fällen das Vorzeichen wechseln. Diese Abnahme ist wiederum angenähert parabelförmig. Wird l/b gross, so gleicht sich der Unterschied immer mehr aus, und wir erhalten eine konstante Verteilung der N_y entsprechend der Berechnung nach der klassischen Biegelehre. Die Normalkräfte N_x in Querrichtung sind für die quadratische Platte am grössten, verlieren aber für grosse Längen rasch an Bedeutung.

Die beiden letzten Diagramme 13 und 14 veranschaulichen das Verhalten der Normalkräfte N_R im Randträger. Während die Plattenkräfte — wie schon früher erläutert — die Dimension einer Kraft pro Länge besitzen, so ist die Dimension von N_R eine Kraft, da sie sich auf den ganzen Randträger bezieht. Wechselt s resp. s' das Vorzeichen, so wechselt es auch N_R.

Im allgemeinen ist folgendes über die Normalkräfte zu sagen:

a) Liegt die Platte in der Druckzone des Querschnittes, so erhält der Randträger eine zusätzliche Zugkraft, und umgekehrt.

b) Der Einfluss des Randträgers nimmt bei breiten Platten gegen den Mittelpunkt rasch ab, dagegen können lange Tragwerke ($l/b > 4$) ohne Berücksichtigung der Plattentheorie berechnet werden.

c) Beim Uebergang von s (Bild 5 a) zu s' (Bild 5 b) nimmt die Normalkraft ab, und zwar um ca. einen Drittel.

d) Nimmt das Höhenverhältnis n ab, so sehen wir, dass die Normalkräfte von $n = 4$ nach $n = 3$ immer zunehmen, von $n = 3$ nach $n = 2$ z. T. zunehmen und z. T. abnehmen. Da für $n = 1$ alle Normalkräfte unbedingt verschwinden, ist bei der Interpolation für nicht ganzzahlige Werte von n den Verhältnissen entsprechend vorzugehen. Lineare Interpolation dürfte im allgemeinen nicht am Platz sein.

Aus den Momenten und Normalkräften lassen sich natürlich sofort auch die Spannungen berechnen. Hierzu bedarf es noch einer Erklärung. Wir haben die bisherigen Ableitungen immer unter der Voraussetzung durchgeführt, dass wir es mit einem homogenen Material zu tun haben. Bei Eisenbeton z. B. ist das allerdings nicht der Fall. Da aber, wie die Erfahrung zeigt, Eisenbetonplatten unter den tatsächlich auftretenden Belastungen auch im Beton die Zugspannungen übertragen können, ohne nennenswerte Risse zu erhalten, so ist die Durchführung der Berechnung nach Stadium 1 (Mitwirken der Betonzugzone) durchaus zulässig. Das selbe Verfahren wird ja auch bei der Berechnung von Rahmentragwerken mit variablem Trägheitsmoment angewandt. Natürlich muss dann bei der Berechnung der Spannungen aus Sicherheitsgründen nach Stadium 4 vorgegangen werden. Dabei müssen wir uns aber bewusst sein, dass für eine kreuzweis armierte Platte das Stadium 4 erst bei Ueberlastung auftritt, so dass wir uns die noch zu untersuchende Frage erlauben, ob nicht beim heutigen Stand der Betonfabrikation bei Flächentragwerken eine teilweise Berücksichtigung der Zugzone am Platz wäre.

6. Weitere Anwendungen

Wir haben für eine zweiseitig frei drehbar gelagerte Rechteckplatte mit beliebiger Randverstärkung und unter beliebiger Last alle notwendigen Formeln abgeleitet [8]). Dabei wurde immer vorausgesetzt, dass der Querschnitt der Randträger ein rechteckförmiger sei. Bei Eisenkonstruktionen wird das nicht der Fall sein. Es ist natürlich leicht, die aufgestellten Formeln einer Stahlplatte mit profilierten Randträgern oder sogar einer Verbundkonstruktion (Betonplatte, Stahlrandträger) anzupassen. Doch können wir vorläufig nicht näher darauf eintreten.

Eine weitere Anwendung wäre der durchlaufende Plattenträger. Hier lassen sich — wie bei der gewöhnlichen durchlaufenden Platte — die gewonnenen Resultate als gute Näherung auf die Feldabschnitte zwischen den Momentennullinien übertragen, indem für deren Abstand die Länge l eingesetzt wird. Die Momentennullinien entsprechen direkt den Momentennullpunkten beim durchlaufenden Träger. Zu lösen bleibt dann nur noch das Problem der Verteilung des Stützenmomentes auf Platte und Randträger. Ist das Verhältnis l/b gross, so können die Momente und Normalkräfte wiederum nach der klassischen Biegelehre ohne Berücksichtigung der Plattentheorie bestimmt werden. Für kleine Verhältnisse l/b ergibt sich eine angenäherte Lösung dadurch, dass die Stützenmomente und -normalkräfte aus den Feldmomenten und -normalkräften analog den Verhältnissen eines durchlaufenden Balkens berechnet werden. Wir geben nachstehend das Vorgehen an: Ersetzen des Plattenträgers durch einen Balken — Bestimmung der Stützen- und Feldmomente sowie des Abstandes l der Momentennullpunkte für die verschiedenen Oeffnungen — Berechnung der Feldmomente und -normalkräfte nach dem oben beschriebenen Verfahren — Bestimmung des Verhältnisses $k = \frac{\text{Stützenmoment}}{\text{Feldmoment}}$ am Ersatzbalken für die verschiedenen Oeffnungen — Multiplikation der für den Plattenträger bestimmten Feldschnittgrössen mit dem Faktor k ergibt die Schnittgrössen über den Stützen.

[8]) Für $p\ (x, y) \neq$ konstant sollen in einer Fortsetzung noch numerische Auswertungen folgen.

Nebenbahnen und Verkehrsteilung Schiene - Strasse

DK 656.078.12

Anlässlich der Jahrestagung des Kuratoriums des Verkehrswissenschaftlichen Instituts an der Technischen Hochschule Stuttgart vom 2. Juli 1953 sprach der Leiter des Instituts, Professor Dr. *Carl Pirath,* über das Thema: «Die volkswirtschaftliche Bedeutung der Nebenbahnen als Grundlage für die Verkehrsteilung Schiene - Strasse in verkehrsschwachen Gebieten». Davon dürften u. a. folgende Feststellungen von Interesse sein.

Ganz allgemein betrachtet beträgt der Binnenverkehr der Nebenbahnen, d. h. der Verkehr, der in ihrem Bereich beginnt und endet, im Personenverkehr 40 bis 44 %, im Güterverkehr nur 1 % des Versands und Empfangs der Nebenbahnen. Der Rest ist Uebergangsverkehr nach und von den Hauptbahnen, an die sie angeschlossen sind, so dass die Nebenbahnen vor allem im Güterverkehr eine grosse Fernwirkung besitzen.

Dieser allgemeine Verkehrswert der Nebenbahnen bedarf einer Vertiefung durch den speziellen Verkehrswert, der darin zu sehen ist, dass die Nebenbahnen im Personenverkehr den Berufsverkehr besonders billig und sozial bedienten und im Güterverkehr trotz des verhältnismässig geringen Verkehrsbedarfs die Verkehrsleistungen sehr preiswert angeboten haben. Zur Klärung dieser Fragen wurden für die Nebenbahnen die räumliche Verteilung und der Umfang des von ihnen bedienten Berufsverkehrs festgestellt und der Güterverkehr nach Güterarten, Tarifklassen und Transportweiten erfasst.

Das hierbei gewonnene Bild über die Bedeutung der Nebenbahnen für die Versorgung der in ihrem Bereich vorhandenen Industrie und der von ihnen abseits liegenden gewerblichen Schwerpunkte mit Arbeitskräften lässt erkennen, dass bereits eine gewisse Verkehrsteilung zwischen den Nebenbahnen und der Strasse eingetreten ist, die als volkswirtschaftlich gesund angesehen werden kann, obgleich im Berufsverkehr die Eisenbahn noch rund 1 Dpf. pro Personenkilometer billiger ist als der Omnibusverkehr der Strasse.

Anders liegen die Verhältnisse im Güterverkehr. Die für ihn in umfangreichen Einzeluntersuchungen aufgestellte Stufenstatistik gibt ein sehr aufschlussreiches Bild darüber, wie sehr die Nebenbahnen am Versand und Empfang von Gütern mit grossen Transportweiten beteiligt sind und die Wirtschaft ihrer Einzugsgebiete sich weniger auf den Nahverkehrsbereich als vielmehr auf grossräumige Verkehrsbeziehungen stützen muss. Zweifellos ist dieser Tatbestand nicht zum wenigsten auf die gemeinwirtschaftliche Verkehrsbedienung der Eisenbahn zurückzuführen, durch die den wirtschaftsschwachen Gebieten weit unter Selbstkosten in Tarifeinheit mit den wirtschaftsstarken Gebieten die Verkehrsleistungen geboten wurden. Besonders auffallend ist der grosse Anteil der zu Ausnahmetarifen beförderten Güter. Er beträgt mengenmässig in vorwiegend landwirtschaftlichen Gebieten 80 bis 84 % gegenüber 67 bis 70 % im Gesamtgebiet der Deutschen Bundesbahn.

Im Vergleich der Transportkosten des Personen- und Güterverkehrs in der bisherigen Form auf den Nebenbahnen mit den Transportkosten Eisenbahn—Strasse ergibt sich der Transportkostenunterschied bei Fortfall der Nebenbahnen. Es wurden dabei sämtliche Kosten erfasst, die beim Trans-