Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 70 (1952)

Heft: 44

Artikel: Berechnung von Verzahnungen mit Profilverschiebung

Autor: Baumgartner, Arthur

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59699

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nachdruck von Bild oder Text nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich

Nummer 44

Berechnung von Verzahnungen mit Profilverschiebung

Von ARTHUR BAUMGARTNER, Masch.-Techniker, Zürich

Einleitung

DK 621.833

Wer Einblick in die Zahnradherstellung hat, muss feststellen, dass immer noch viele Konstrukteure die Möglichkeiten nicht ausschöpfen, welche die normalen Abwälz-Werkzeuge für die Erzeugung von Evolventen-Verzahnungen bieten. Die Nachteile der Normal-Verzahnung bestehen zur Hauptsache darin, dass für gegebene Zähnezahlen und Moduli die Achsdistanzen festgelegt sind, und dass bei kleinen Zähnezahlen die Zahnformen und Eingriffsverhältnisse ungünstig, oft sogar ungenügend werden. Zum Teil werden diese Nachteile unnötigerweise in Kauf genommen, oder es werden Spezial-Werkzeuge ange-

schafft, welche das Lager kostspieliger Verzahnungswerkzeuge unnütz vergrössern.

In nachfolgendem Aufsatz, der sich auf verschiedene Veröffentlichungen und eigene Studien stützt, werden zunächst die grundlegenden Zusammenhänge für Stirnräder in einfacher Weise aufgezeigt und anschliessend eine einwandfreie Methode zur Berechnung von Rädern mit schrägen Zähnen mit parallelen und gekreuzten Achsen gezeigt sowie Angaben für negative Profilverschiebung gemacht. Gerade das letztgenannte Problem ist in der bestehenden Literatur ungenügend behandelt, enthält

Tabelle 1. Korrekturwerte für Evolventenverzahnungen (Eingriffswinkel des Grundwerkzeuges 20°)

d	$\frac{x_1+x_2}{z_m}$	α'	$\frac{y}{z_m}$	d	d	$\frac{x_1 + x_2}{z_m}$	a'	$\frac{y}{z_m}$	d
66	- 0,02036	16 0 00′	- 0,02244	82	145	0,02238	23 0 00′	0,02084	12
00	- 0,01970	10'	0.02162	00	147	0,02383	10'	0,02211	10
68	-0.01902	20'	- 0,02079	83	147	0,02530	20'	0,02339	12
69	- 0,01833	30′	- 0,01995	84	150	0,02680	30'	0,02468	12
71	-0,01333 $-0,01762$	40'	-0,01939 $-0,01910$	85	153	0,02833	40'	0,02598	13
73				86	154				13
74	- 0,01689	50'	- 0,01824	87	158	0,02987	50'	0,02730	13
75	- 0,01615	17 0 00′	- 0,01737	88	159	0,03145	24 0 00'	0,02862	13
	-0.01540	10'	-0.01649	00	100	0,03304	10'	0,02996	10
77	- 0,01463	20'	- 0,01560	89	162	0,03466	20'	0,03131	13
79	- 0,01384	30'	-0,01471	89	165	0,03631	30'	0,03267	13
80				91	167		40'		13
82	- 0,01304	40'	- 0,01380	92	170	0,03798		0,03405	13
84	— 0,01222	50'	- 0,01288	93	173	0,03968	50'	0,03544	14
85	- 0,01138	180 00′	- 0,01195	94	175	0,04141	25 0 00'	0,03684	14
0.7	- 0,01053	10'	- 0,01101	6.5	150	0.04316	10'	0,03825	
87	- 0,01055 - 0,00966	20'	-0,01101 $-0,01006$	95	178	0,04494	20'	0,03967	14
88				96	180	0,04434	30'		14
91	- 0,00878	30'	- 0,00910	97	183			0,04111	14
92	- 0,00787	40'	- 0,00813	98	186	0,04857	40'	0,04256	14
94	- 0,00695	50'	- 0,00715	99	189	0,05043	50′	0,04403	14
95	- 0,00601	19 000′	- 0,00616	100	191	0,05232	26 0 00'	0,04550	1
	- 0,00506	10'	- 0,00516			0,05423	10'	0,04700	
98	- 0,00408	20'	- 0,00415	101	195	0,05618	20'	0,04850	13
99				102	197		30'		1
.01	- 0,00309	30'	- 0,00313	103	200	0,05815		0,05001	1
.03	- 0,00208	40'	- 0,00210	105	203	0,06015	40'	0,05154	1
.05	— 0,00105	50'	- 0,00105	105	206	0,06218	50'	0,05309	15
.07	0,00000	20 0 00'	0,00000	106	209	0,06424	27 0 00′	0,05464	15
	0,00107	10'	0,00106	100	242	0,06633	10'	0,05621	
09		20'	0,00214	108	212	0,06845	20'	0,05780	15
10	0,00216	30'		109	215		30'	0,05939	15
13	0,00326	100.76	0,00323	109	218	0,07060			16
15	0,00439	40'	0,00432	111	221	0,07278	40'	0,06100	10
16	0,00554	50'	0,00543	112	225	0,07499	50'	0,06263	10
19	0,00670	21 0 00'	0,00655	113	227	0,07724	28 0 00'	0,06427	10
21	0,00789	10'	0,00768	114	231	0,07951	10'	0,06592	10
21	0,00910	20'	0,00882			0,08182	20'	0,06759	10
23	0,01033	30'	0,00997	115	234	0,08416	30'	0,06927	
25		40'	0,01113	116	238	0,08654	40'	0,07097	17
.27	0,01158	50'	0,01113	117	240	0,08894	50'	0,07268	17
.30	0,01285	50	0,01250	119	244	0,00094			17
31	0,01415	22 0 00'	0,01349	120	247	0,09138	29 0 00'	0,07440	17
.34	0,01546	10'	0,01469	120	251	0,09385	10'	0,07614	17
.36	0,01680	20'	0,01589	122	253	0,09636	20'	0,07790	17
	0,01816	30'	0,01711		258	0,09889	30'	0,07966	17
138	0,01954	40'	0,01835	124		0,10147	40'	0,08145	1
.40	0,02094	50'	0,01959	124 125	261 265	0,10408	50′	0,08325	18
LI	0,02238	23 0 00'	0,02084	120	1 200	0,10673	30 0 00′	0,08506	

doch beispielsweise DIN Blatt 870 Richtlinien, welche zu unbrauchbaren Getrieben führen können und in allen Publikationen wiederzufinden sind.

Das Verfahren, günstige Zahnformen mit normalen Werkzeugen herzustellen, ist nicht neu. Maag hat wohl als erster die Möglichkeiten systematisch erfasst, hielt aber seine Berechnungs-Unterlagen bis heute geheim. Erstmals dürften die Berechnungsgrundlagen von Fölmer veröffentlicht worden sein. Leider fehlt aber immer noch ein einfaches Berechnungsverfahren, das erlaubt, relativ rasch und vor allem mit der für den heutigen Präzisionsgetriebebau nötigen Genauigkeit die erforderlichen Korrektur- und Messwerte zu bestimmen.

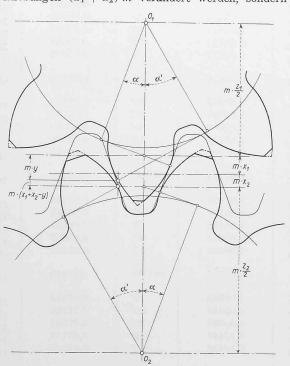
Die Bedingungen, die an eine gute Verzahnung gestellt werden, enthalten oft widersprechende Forderungen: Kräftige, unterschnittfreie Zähne, kleine Zahndrücke, lange Eingriffsdauer, kleine spezifische Gleitung. Um eine gute Verzahnung zu erreichen, ist es also nötig, Kompromisse zu machen. Folgende Bedingungen sollten aber unbedingt eingehalten werden: Vermeidung des Unterschnittes, genügender Ueberdeckungsgrad, richtige Lage der Eingriffs-Strecke auf der Eingriffs-Linie.

Bei der Evolventen-Verzahnung besteht für richtigen Zahneingriff nur die Bedingung, dass ein Räderpaar die gleiche Grundkreis- bzw. Eingriffsteilung aufweist; ferner sollen die Aussendurchmesser und die Zahndicken so bemessen sein, dass nach Einbau in eine gegebene Achsdistanz ein zweckmässiges Kopf- und Flankenspiel vorhanden ist. Es ist somit möglich, die Räder mit Werkzeugen herzustellen, welche verschiedene Eingriffswinkel, aber gleiche Eingriffsteilungen besitzen oder, wenn beide Räder mit dem gleichen Werkzeug nach dem Abwälzverfahren hergestellt werden, das Bezugszahnstangenprofil von der normalen Lage abzurücken. In der Praxis ist der zweite Fall von grösster Bedeutung. — Die nachstehenden Ausführungen beziehen sich auf das Modul-System. Die Gleichungen und Tabellen können aber auch auf das Diametral-Pitch-System angewendet werden, wenn in den Gleichungen m durch den Ausdruck 1/DP ersetzt wird.

1. Grundlagen

Bild 2

Bild 1 zeigt, wie das Zahnprofil eines Ritzels durch die Lage des Bezugsprofils beeinflusst werden kann. Der Betrag der Abrückung wird zweckmässig auf den Modul 1 bezogen und mit xm bezeichnet. Bringt man ein derart hergestelltes Radpaar mit dem Bezugsprofil in Eingriff (Bild 2, Werte wieder auf Modul 1 bezogen), so wird man zwischen den Radflanken ein beträchtliches Spiel feststellen, welches für den praktischen Gebrauch unzulässig ist. Für spielfreien Eingriff darf die Achsdistanz also nicht um den Betrag der Profilverschiebungen $(x_1 + x_2)$ m verändert werden, sondern nur



α = 20° x = 0 α = 20° X = 0,7 $\alpha = 20^{\circ}$ X = 0.47

Bild 1.

um den Wert y m. Will man das ursprüngliche Kopfspiel wahren, darf der Kopfkreisradius nur um den Betrag $(y-x_2) m$ bzw. $(y-x_1)$ m vergrössert werden.

Der Zusammenhang zwischen Profilverschiebung, Laufeingriffswinkel und spielfreier Achsdistanz ist aus Bild 3 ersichtlich, in der der Einfachheit halber die Werte wieder für den Modul 1 eingetragen wurden. Die Räder müssen für spielfreien Eingriff um den Betrag $\overline{D_1\,D_2}$ zusammengerückt werden und kämmen dann mit dem neuen Eingriffswinkel α' . Die neue Eingriffslinie wird nun gebildet durch die dann in einer Flucht liegenden Strecken $\overline{E_2 D_2}$ $\overline{D_1 E_1}$. Die Strecke $\overline{0_1 C}$ ist gleich der Summe der Strecken $\overline{A_1\,B_1'}+\overline{A_2\,B_2'}$, oder, nach der Definition der Evolvente, gleich $\widehat{A_1B_1} + \widehat{A_2B_2}$. Es ist also:

$$\begin{split} \left(\frac{z_1}{2} + x_1 + \frac{z_2}{2} + x_2\right) \sin \alpha &= \\ \frac{z_1}{2} \cos \alpha \left(\alpha + \operatorname{tg} \alpha' - \alpha'\right) + \\ + \frac{z_2}{2} \cos \alpha \left(\alpha + \operatorname{tg} \alpha' - \alpha'\right) \end{split}$$

$$\frac{z_1+z_2}{2}+x_1+x_2=\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(\alpha+\lg\alpha'-\alpha')$$

Wird tg $\alpha' - \alpha' = \text{inv } \alpha'$ gesetzt, so lässt sich nach Umformung die Gleichung schreiben:

(1)
$$\frac{x_1 + x_2}{\frac{z_1 + z_2}{2}} = \operatorname{ctg} \alpha (\alpha + \operatorname{inv} \alpha') - 1 = \frac{\operatorname{inv} \alpha' - \operatorname{inv} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Die neue Achsdistanz a wird (für Modul 1 betrachtet) nach Bild 2:

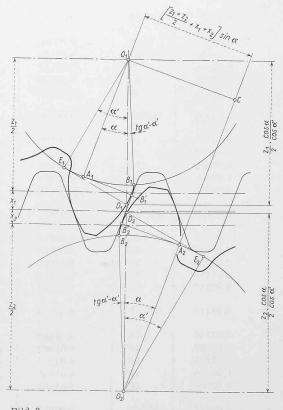


Bild 3.

Tabelle 2. K-Werte zur Berechnung der ideellen Zähnezahl z_v bei einem Erzeugungseingriffswinkel lpha= 20 0 . $z_v=z\,rac{{
m inv}\,lpha_a}{{
m inv}\,lpha}=z\,K$.

												-inv α		
d	α_a^{0}	cos β	K	d	d	α_a	$\cos \beta$	K	d	d	α_a 0	cos β	K	T
	20,0000	1,000	1,0000			23,6783	0,830	1,6944	200		28,6929	0,665	3,1224	
925				144	1276	23,8059	0,825	1,7233	289	1825	28,8754	0,660	3,1869	
	20,0925	0,995	1,0144		1289	23,9348	0,820	1,7528	295	1846	29,0600	0,655	3,2532	
33	20,1858	0,990	1,0291	147	1302	20,9040	0,620	1,1020	303	4000	29,0000	0,055	5,2552	
41	20,2799	0,985	1,0441	150		24,0650	0,815	1,7831		1868	20.0100	0.050	0.0040	-
50	20,2100	0,000	1,0111	153	1316	24,1966	0,810	1,8140	309	1000	29,2468	0,650	3,3212	
	20,3749	0,980	1,0594	1	1329	24,3295	0,805	1,8456	316	1890	00 4050	0.015	0.0011	
58	20,4707	0,975	1,0749	155	1040	24,3293	0,000	1,0400	000	1912	29,4358	0,645	3,3911	
67	20,5674	0,970	1,0908	159	1343	04.4620	0.000	1 0770	323	1935	29,6270	0,640	3,4630	
76				161	1357	24,4638	0,800	1,8779	331		29,8205	0,635	3,5369	
	20,6650	0,965	1,1069		1991	24,5995	0,795	1,9110	991	1958	30,0163	0,630	3,6128	
85	20,7635	0,960	1,1234	165	1371				339	1982				
94	20,8629	0,955	1,1403	169	1385	24,7366	0,790	1,9449	347	2005	30,2145	0,625	3,6909	
03	20,0020	0,000	1,1100	171		24,8751	0,785	1,9796			30,4150	0,620	3,7711	
00	20,9632	0,950	1,1574	171	1400	25,0151	0.780	2,0150	354	2030	30,6180	0,615	3,8537	
12	20,8082	0,950	1,1014	175	1415				364	2054				
12	21,0644	0,945	1,1749	110	1430	25,1566	0,775	2,0514	371	2079	30,8234	0,610	3,9387	
21	21,1665	0,940	1,1927	178		25,2996	0,770	2,0885			31,0313	0,605	4,0261	
31				182	1445	25,4441	0,765	2,1266	381	2104				-
	21,2696	0,935	1,2109		1460	25,5901			389		31,2417	0,600	4,1160	
41	21,3737	0,930	1,2295	186	1477		0,760	2,1655	400	2130				-
50	21,4787	0,925	1,2484	189		25,7378	0,755	2,2055		2157	31,4547	0,595	4,2086	
60		the state of the s		194	1492				408		31,6704	0,590	4,3038	
71	21,5847	0,920	1,2678	197	- F00	25,8870	0,750	2,2463	440	2183	31,8887	0,585	4,4020	
0.00	21,6918	0,915	1,2875		1508	00.0000	0 = 1 =	0.0000	419	2210	00 100	0.500	4 5000	1
81	21,7999	0,910	1,3076	201	1525	26,0378	0,745	2,2882	429	2238	32,1097	0,580	4,5030	1
90	and the second	0,905	1,3282	206	1542	26,1903	0,740	2,3311	440	2265	32,3335	0,575	4,6071	1
01	21,9089	0,905	1,5202	209		26,3445	0,735	2,3751			32,5600	0,570	4,7143	
01	00.0100	0.000	1 0101	209	1558	26,5003	0,730	2,4201	450	2294	32,7894	0,565	4,8249	1
11	22,0190	0,900	1,3491	214	1576		100		462	2323	the second second			1
11	22,1301	0,895	1,3705		1594	26,6579	0,725	2,4663	474	2353	33,0217	0,560	4,9387	1
23				219		26,8173	0,720	2,5137		2000	33,2570	0,555	5,0562	-
33	22,2424	0,890	1,3924	223	1611	26,9784	0,715	2,5622	485	2382				_ 1
	22,3557	0,885	1,4147	228	1628	27,1412	0,710	2,6120	498		33,4952	0,550	5,1772	
44	22,4701	0,880	1,4375		1647				511	2412	00 5001	0 5 4 5	F 000-	- 1
55	22,5856	0,875	1,4608	233		27,3059	0,705	2,6631		2443	33,7364	0,545	5,3021	1
67	Access to a second control of the co		and the second second	237	1666			~ = . = .	523		33,9807	0,540	5,4308	1
78	22,7023	0,870	1,4845	243	1005	27,4725	0,700	2,7154	F07	2475	34,2282	0,535	5,5637	
	22,8201	0,865	1,5088		1685	07.0410	0.005	0.7001	537	2506	24 4700	0.520	5,7009]
90	22,9391	0,860	1,5336	248	1703	27,6410	0,695	2,7691	551	2539	34,4788	0,530	100 miles	1
01			and the second second	254	1723	27,8113	0,690	2,8242	566	2571	34,7327	0,525	5,8424	1
14	23,0592	0,855	1,5590	250		27,9836	0,685	2,8808			34,9898	0,520	5,9885	
14	00 1000	0.050	7 5046	259	1743	90 1570	0.600	2 0200	580	2605	35,2503	0.515	6,1394	
26	23,1806	0,850	1,5849	265	1763	28,1579	0,680	2,9388	596	2639		0,515		
26	00 0000	0.045	1 0114	200	1783	28,3342	0,675	2,9984	612	2673	35,5142	0,510	6,2953	
38	23,3032	0,845	1,6114	270		28,5125	0,670	3,0596		2013	35,7815	0,505	6,4563	1
50	23,4270	0,840	1,6384	277	1804	20 6020	O CCE	2 1 2 2 4	628	2709				_ :
	23,5520	0,835	1,6661	100 0 100		28,6929	0,665	3,1224			36,0524	0,500	6,6227	
63	23,6783	0,830	1,6944	283										

$$a = \frac{z_1 + z_2}{2} + y$$

nach Bild 3:

$$a = \frac{z_1}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} + \frac{z_2}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{z_1 + z_2}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

somit

$$\frac{z_1 + z_2}{2} + y = \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

oder

(2)
$$\frac{y}{z_1 + z_2} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1$$

Aus den Gleichungen (1), (2) und den Tafeln für trigonometrische und Evolventenfunktionen lassen sich somit für gegebene Profilverschiebungen der spielfreie Achsabstand, oder umgekehrt, wenn Zähnezahlen und Achsabstand gegeben sind, die Summe der Profilverschiebungen für Modul 1 berechnen. Für andere Moduli müssen die Werte sinngemäss mit dem Modul multipliziert werden. Die Gleichungen gelten auch für negative Profilverschiebungen; die Grössen x_1, x_2 und y sind bei den folgenden Anwendungen immer mit den entsprechenden Vorzeichen einzusetzen. Wird die algebraische Summe von $x_1 + x_2$ negativ, so wird y ebenfalls negativ; der Faktor für die Kopfkürzung $x_1 + x_2 - y$ aber positiv, d. h. die gemeinsame Zahnhöhe wird in jedem Fall kleiner als bei Normalverzahnung.

Sind die beiden Profilverschiebungsfaktoren dem Absolutwerte nach gleich gross, tragen aber entgegengesetzte Vorzeichen, so wird $x_1+x_2=0$, und der Achsverschiebungsfaktor y wird nach den Gleichungen (1) und (2) ebenfalls 0; mit andern Worten, Achsdistanz und Eingriffswinkel werden nicht geändert (V-Nullgetriebe oder AEG Verzahnung; Räder, deren Profilverschiebungen eine Achsdistanzänderung bedingt, werden V-Getriebe genannt).

Werden in analoger Weise die Gleichungen für Innenverzahnungen abgeleitet, so erhält man:

(1a)
$$\frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)} = \frac{\operatorname{inv} \alpha' - \operatorname{inv} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$(2a) \quad \frac{y}{\frac{1}{2}(z_2-z_1)} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} - 1$$

Um die Rechnung noch weiter zu vereinfachen, wurden die Funktionswerte

$$f(\alpha') = rac{ ext{inv } lpha' - ext{inv } lpha}{ ext{tg } lpha}$$
 $f(\alpha') = rac{\cos lpha}{\cos lpha'} - 1$

für den Erzeugungseingriffswinkel $\alpha=20^{\circ}$ in Tabelle 1 zusammengestellt; es lässt sich somit für einen gegebenen Wert

$$\frac{x_1 + x_2}{\frac{1}{2} (z_1 + z_2)} \text{ bzw. } \frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{2} (z_2 - z_1)}$$

sofort der zugehörige Laufeingriffswinkel α' und der Wert

$$\frac{y}{\frac{1}{2}(z_1+z_2)}$$
 bzw. $\frac{y}{\frac{1}{2}(z_2-z_1)}$

aufschlagen, und umgekehrt.

2. Berechnung der Getriebeabmessungen

A. Stirnräder

a) Grundkreisdurchmesser d_b

Die Grundkreisdurchmesser werden durch die Profilverschiebung nicht geändert; sie betragen

$$(3a) d_{b_1} = z_1 m \cos \alpha$$

(3b)
$$d_{b_2} = z_2 m \cos \alpha$$

Die Werte $m\cos\alpha$ können für den Werkzeugeingriffswinkel $\alpha=20^{\,0}$ und die gebräuchlichen Moduli der Tabelle 3 entnommen werden.

b) Kopfkreisdurchmesser d_k

Der Radius des Kopfkreises wird für normales Kopfspiel

$$r_{k_1} = rac{z_1}{2} \, m \, + \, x_1 \, m \, + \, 1 \, m \, - \, (x_1 \, + \, x_2 \, - \, y) \, m$$

somit der Aussendurchmesser des Rades 1

(4a)
$$d_{k_1} = m[z_1 + 2(1 - x_2 + y)]$$

und des Rades 2

(4b)
$$d_{k_2} = m[z_2 + 2(1 - x_1 + y)]$$

Für Getriebe mit negativem y sind r_{k_1} und r_{k_2} nach Abschnitt 3 zu kontrollieren!

c) Fusskreisdurchmesser d_f

(5a)
$$d_{f_1} = m [z_1 - 2 (1 + c_0 - x_1)]$$

(5b)
$$d_{f_2} = m [z_2 - 2 (1 + c_0 - x_2)]$$

Hierin bedeutet c_0 das Kopfspiel am Werkzeug.

d) Lauf-Wälzkreisdurchmesser d'

(6a)
$$d_{1'} = \frac{2 a z_1}{z_1 + z_2}$$

(6b)
$$d_{2}' = \frac{2 a z_{1}}{z_{1} + z_{2}}$$

Die Berechnung der Lauf-Wälzkreise ist für Stirnräder in den meisten Fällen nicht nötig.

e) Achsdistanz a

$$(7) \qquad a = m\left(\frac{z_1 + z_2}{2} + y\right)$$

f) Zahnhöhe h

(8a)
$$h_1 = \frac{d_{k_1} - d_{f_1}}{2}$$

(8b)
$$h_2 = \frac{d_{k_2} - d_{f_2}}{2}$$

Die gemeinsame Zahnhöhe h' ist

$$(9) h' = r_{k_1} + r_{k_2} = a$$

g) Kontrollmass Wz' (Bild 4, 5)

Leider hat sich das Messen nach dieser, von Wildhaber [10] vorgeschlagenen Methode immer noch nicht gebührend eingeführt. Das Mass Wz' setzt sich zusammen aus einer Anzahl Eingriffsteilungen t_b und einer auf den Grundkreis bezogenen Zahnstärke $\widehat{s_b}$.

Misst man über z^\prime Zähne, so wird für Räder mit Profilverschiebung:

für Rad 1

(10 a)
$$Wz'=m\cos\alpha\left[\left(z'-0.5\right)\pi+z_1\operatorname{inv}\alpha\right]+2\,m\,x_1\sin\alpha$$
 für Rad 2

(10 b)
$$Wz' = m \cos \alpha [(z' - 0.5) \pi + z_2 \text{ inv } \alpha] + 2 m x_2 \sin \alpha$$

Die Anzahl Zähne, über die gemessen werden soll, bestimmt sich aus $% \left(1\right) =\left(1\right) +\left(1\right)$

(11)
$$z' = z \frac{a^0}{180^0} + 0.5$$

Tabelle 3. Grundkreismoduli m_b und Grundkreisteilungen t_b für $lpha=20^{\circ},~m_b=m\cos{lpha},~t_b=m\,\pi\cos{lpha}$

m	m_b	t_b	m	m;	- t _b -
0,3	0,281 908	0,885 639	1,75	1,644 46	5,166 23
0,325	0,305 400	0,959 442	2	1,879 39	5,904 26
0,35	0,328 892	1,033 25	2,25	2,114 31	6,642 29
0,375	0,352 385	1,107 05	2,5	2,349 23	7,380 33
0,4	0,375 877	1,180 85	2,75	2,584 15	8,118 36
0,45	0,422 862	1,328 46	3	2,819 08	8,856 39
0,5	0,469 846	1,476 07	3,25	3,054 00	9,594 43
0,55	0,516 831	1,632 67	3,5	3,288 92	10,332 46
0,6	0,563 816	1,771 28	3,75	3,523 85	11,070 49
0,7	0,657 785	2,066 49	4	3,758 77	11,808 52
0,75	0,704 769	2,214 10	4,5	4,228 62	13,284 59
0,8	0,751 754	2,361 70	5	4,698 46	14,760 65
0,9	0,845 723	2,656 92	5,5	5,638 16	17,712 79
1	0,939 693	2,952 13	6	6,108 00	19,188 85
1,125	1,057 15	3,321 15	6,5	6,577 85	20,664 92
1,25	1,175 62	3,690 16	7	7,517 54	23,617 05
1,375	1,292 08	4,059 18	8	8,457 23	26,569 18
1,5	1,409 54	4,428 20	9	9,396 93	29,521 31
			10	5,168 31	16,236 72

wobei z' auf die nächste ganze Zahl auf- oder abzurunden ist. Bei sehr grossen Profilverschiebungen ist das Mass Wz' gegebenenfalls um eine Eingriffsteilung $t_b = \pi \, m \cos \alpha$ zu vergrössern oder zu verkleinern. Für die Wz'-Masse von Normalverzahnungen bestehen Tabellen; alsdann reduziert sich die Rechnung auf das Addieren bzw. Subtrahieren des Betrages $2 \, m \, x \, \sin \alpha$. Der auf das Rad entfallende Anteil des Zahnspieles j wird vom Mass Wz' subtrahiert. Normalerweise beträgt dieser Anteil j/2. Hat das Rad 1 sehr wenig Zähne, so wird das Mass Wz' für das Rad 2 um den vollen Betrag j verkleinert.

Zum Messen sollen Tellermikrometer, bei sehr grossen Rädern Schiebelehren verwendet werden. Für das Messen grosser Serien sind Grenz-Rachenlehren zu empfehlen. Das Messen der Zahndicke mit der sogenannten Zahnradschiebelehre ist möglichst zu vermeiden, da die Abnützung der Messkanten und die Ungenauigkeiten des Radaussendurchmessers die Messgenauigkeit beeinträchtigen.

h) Eingriffsdauerε (Bild 6)

Die Eingriffsdauer ist gleich dem Verhältnis

$$arepsilon = rac{ ext{Eingriffsstrecke} \; \overline{H_1 \, H_2}}{ ext{Eingriffsteilung} \; t_b} = rac{\overline{H_1 \, H_2}}{m \, \pi \, \cos lpha}$$

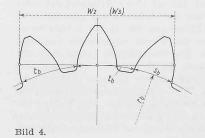
 ε soll immer grösser sein als 1,15. Zweckmässig wird ε graphisch bestimmt, indem nach Bild 6 die Achsdistanz a, die Grund- und Kopfkreisradien r_{b_1} , r_{b_2} , r_{k_1} , r_{k_2} und die Eingriffslinie $\overline{E_1}$ $\overline{E_2}$ aufgetragen wird. Die Strecke $\overline{H_1}$ $\overline{H_2}$ wird abgemessen, auf die natürliche Grösse reduziert und durch $t_b = m\pi \cos \alpha$ dividiert (t_b aus Tabelle 3).

Soll ε rechnerisch ermittelt werden, so ist nach ten Bosch [1] aus Bild 6

$$\overline{H_1\,H_2} = \overline{E_1\,H_1} + \overline{E_2\,H_2} - \overline{E_1\,E_2}$$

somit

(12)
$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{k_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{k_2}^2 - r_{b_2}^2} - a \sin \alpha'}{m \pi \cos \alpha}$$



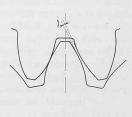
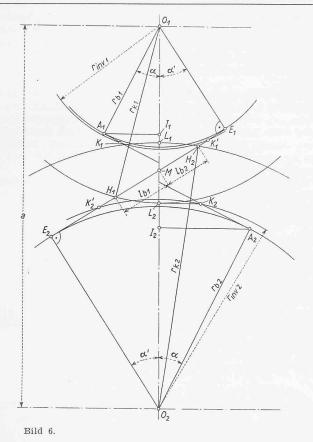


Bild 5.



Für Getriebe mit negativem y ist ε aus den Gleichungen 49 a. 49 b zu berechnen.

B. Räder mit schrägen Zähnen und parallelen Achsen

Legt man einen Normalschnitt durch die Eingriffszone eines solchen Radpaares, so bildet sich darin ein Verzahnungsbild ab, welches mit demjenigen eines gedachten, «ideellen» Radpaares mit geraden Zähnen zur Uebereinstimmung gebracht werden kann. Setzt man an Stelle der Zähnezahlen z_1, z_2 des Radpaares mit schrägen Zähnen die entsprechenden ideellen Zähnezahlen z_{v_1} , z_{v_2} sinngemäss in die Rechnung, so können weitgehend die selben Gleichungen und Tabellen Anwendung finden.

Nach Bagh [9] wird, abgeleitet aus den Gleichungen von Wildhaber [10] für die Zahnweiten:

Ideelle Zähnezahl des Rades 1

$$z_{v_1} = z_1 \frac{\operatorname{inv} \alpha_a}{\operatorname{inv} \alpha}$$

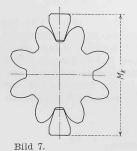
oder

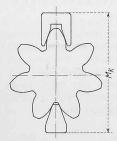
(13a) $z_{v_1} \equiv z_1 K$

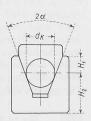
und entsprechend

(13b)
$$z_{v_2} = z_2 K$$

worin $K=\operatorname{inv}\alpha_a/\operatorname{inv}\alpha$, als Funktion von cos β für den Werkzeugeingriffswinkel $\alpha=20^{\,0}$ der Tabelle 2 entnommen werden kann. Zur Bestimmung der Profil- und Achsverschiebungsfaktoren setzt man als mittlere Zähnezahl statt $^{1}/_{2}$ (z_1+z_2)







den Wert $^1/_2(z_{v_1}+z_{v_2})$ ein und berechnet die gesuchten Grössen x_1+x_2 bzw. y aus Tabelle 1.

a) Erzeugungs-Teilkreis

(14 a) $d_1 = z_1 m_a$ (Rad 1)

(14 b) $d_2 = z_2 m_a$ (Rad 2)

b) Erzeugungsmodul im Stirnschnitt

$$(15) m_a = \frac{m}{\cos \beta}$$

c) Erzeugungseingriffswinkel im Stirnschnitt

(16)
$$\operatorname{tg} \alpha_a = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}$$

 α_a kann aus Tabelle 2 entnommen werden.

d) Grundkreis-Durchmesser

(17 a) $d_{b_1} = d_1 \cos \alpha_a$

(17b) $d_{b_2} = d_2 \cos lpha_a$

Die oben angeführten Grössen werden durch die Profilverschiebung nicht beeinflusst.

e) Kopf kreisdurchmesser, für ursprüngliches Kopfspiel

(18 a) $d_{k_1} = d_1 + 2 m (1 - x_2 + y)$

(18 b) $d_{x_0} = d_2 + 2 m (1 - x_1 + y)$

f) Fusskreisdurchmesser

(19 a) $d_{f_1} = d_1 - 2 m (1 - x_1)$

(19 b) $d_{f_2} = d_2 - 2 m (1 - x_2)$

g) Gemeinsame Zahnhöhe s. Räder mit geraden Zähnen

h) Achsdistanz

(20)
$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} + my$$

i) Kontrollmass Wz'

(21 a) $Wz_1' \equiv m \cos \alpha \left[(z' = 0.5) \pi + z_{v_1} \operatorname{inv} \alpha \right] + 2 m x_1 \sin \alpha$

(21b) $Wz'_2 \equiv m \cos \alpha \, [\, (z' = 0.5) \, \pi + z_{v_2} \, {\rm inv} \, \alpha] \, + \, 2 \, m \, x_2 \, {\rm sin} \, \alpha$

(22)
$$z' = z_v \frac{a^0}{180^0} + 0.5$$

z' ist wieder auf die nächste ganze Zahl auf- oder abzurunden. Das Messverfahren kann nur angewendet werden, wenn die Radbreite b grösser als Wz' sin β ist; andernfalls wird das Messen mit Kimmen empfohlen.

k) Kontrollmass M_K

Nach Bild 7 wird der Durchmesser d_K der Kontrollrolle zur Bestimmung von H_1 und H_2 .

(23) $d_K = \frac{1}{2} \pi m \cos \alpha = \frac{1}{2} t_b$

Kontrollmass für gerade Zähnezahl

(24 a) $M_{K_1} = d_1 + 2 m x_1 + 2 H_1$

(24 b) $M_{K_0} = d_2 + 2 m x_2 + 2 H_2$

Kontrollmass für ungerade Zähnezahl

(25 a) $M_{K_1} = d_1 + 2 m x_1 + H_1 + H_2$

(25 b) $M_{K_2} = d_2 + 2 m x_2 + H_1 + H_2$

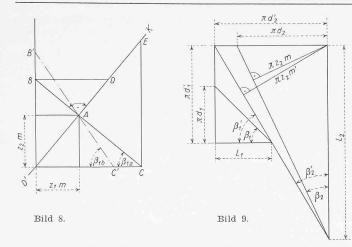
l) Flankenspiel im Normalschnitt

Das Kontrollmass Wz' ist um den Normal-Flankenspielanteil j/2 zu verkleinern, das Mass M_K um den Betrag j/2 sin α (vgl. Abschnitt 2. A).

m) Steigung L

(26a)
$$L_1 = \pi d_1 \operatorname{ctg} \beta = \frac{z_1 m \pi}{\sin \beta}$$

(26b)
$$L_2 \equiv \pi \, d_2 \, {
m ctg} \, eta \equiv rac{z_2 \, m \, \pi}{\sin eta}$$



n) Laufzahnschrägewinkel β'

(27)
$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\pi \, d_{1'}}{L_{1}} = \frac{\pi \, d_{2'}}{L_{2}} = \frac{\operatorname{tg} \beta \cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

o) Lauf-Stirneingriffswinkel α'α

(28)
$$\cos \alpha_{a'} = \frac{r_{b_1} + r_{b_2}}{a}$$

p) Eingriffsdauer a

ε setzt sich zusammen aus dem Stirn-Ueberdeckungsgrad $arepsilon_a$ und dem Ueberdeckungsgrad $arepsilon_q$, herrührend von der Zahnschräge.

(29)
$$\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_q$$

 ε_a wird in gleicher Weise berechnet wie für Räder mit geraden Zähnen, indem nach Bild 6 die Eingriffsverhältnisse im Stirnschnitt aufgezeichnet werden, und die Strecke $\overline{H_1\,H_2}$ durch die Stirn-Eingriffsteilung t_{ba} dividiert wird. ϵ_a kann auch aus Gleichung (30) berechnet werden.

(30)
$$\varepsilon_{a} = \frac{\sqrt{r_{k_{1}}^{2} - r_{b_{1}}^{2}} + \sqrt{r_{k_{2}}^{2} - r_{b_{2}}^{2}} - a \sin \alpha'_{a}}{m_{a} \cos \alpha_{a}}$$

(31)
$$\varepsilon_q = rac{ ext{Teilungssprung } q}{ ext{Stirnteilung } t_a} = rac{b ext{ tg } eta}{\pi \, m_a}$$

Anmerkung

Bei den Stossrädern sind die besondern Verhältnisse bezüglich Zahnschrägewinkel und Stirnmodul zu beachten. Das Fellows-System bezieht den Erzeugungsmodul auf den Stirnschnitt, für die Berechnung der Profil- und Achsverschiebungsfaktoren sind somit die effektiven Zähnezahlen massgebend.

C. Stirn-Schraubgetriebe

Bei diesen Getrieben lässt sich eine Profilverschiebung meist vermeiden, wenn in eine gegebene Achsdistanz eine gegebene Uebersetzung eingebaut werden soll. Es ist empfehlenswert, für den Berechnungsvorgang die von Metral-le Ray [6] vorgeschlagene Methode anzuwenden.

Ist für ein Getriebe die Achsdistanz gegeben und m, z_1 und z_2 gewählt, lässt sich aus Bild 8 der Zahnschrägewinkel β folgendermassen bestimmen: Auf den Koordinaten werden die Werte $z_1 m$ und $z_2 m$ aufgetragen. Durch den Schnittpunkt Alegt man die Strecke $\overline{BC}=2\,a$ derart, dass die Endpunkte auf die Koordinaten zu liegen kommen. Lässt sich die Strecke einbringen, so bestehen meist zwei Lösungen, und der günstigere Zahnschrägewinkel ist auf Grund der Gleitverhältnisse zu wählen. Ergibt sich keine Lösung, so ist der Vorgang mit einem andern Modul oder mit andern Zähnezahlen zu wiederholen. Mit dem so ermittelten Zahnschrägewinkel kontrolliert man die Achsdistanz nach der Gleichung 32.

$$(32) \quad \frac{z_1}{\cos \beta_1} + \frac{z_1 m}{\cos \beta_2} = 2 a$$

Die Differenz d a aus der so ermittelten und der gegebenen Achsdistanz wird eingesetzt in die Gleichung (33).

$$(33) d\beta_1 = \frac{2 d a}{\overline{E} D}$$

worin $d \beta_1$ die Korrektur für den Zahnschrägewinkel β_1 bezeichnet. \overline{ED} folgt aus Bild 8, wobei D'K senkrecht zu BC steht und durch A geht. Das Verfahren gilt auch für Stirnschraubgetriebe, deren Achsen sich nicht unter $\Sigma=90\,^{\circ}$ kreuzen; die Koordinaten werden dann unter dem gegebenen Winkel arSigmagezogen.

Ergibt die oben angegebene Methode keine Lösung, so ist nach Bild 8 die günstigste Annäherung abzuschätzen und es sind z_1 , z_2 , m und β_1 ' festzulegen. Bei der nun folgenden Rechnung muss beachtet werden, dass die Räder nach dem Einbau unter diesem Lauf-Eingriffswinkel kämmen müssen, und dass, von β_1 ' ausgehend, die Erzeugungs-Eingriffswinkel β_1 und β_2 berechnet werden müssen.

Bild 9 stellt die Abwicklungen der Lauf- und Erzeugungswälzzylinder dar. Für das Schraubgetriebe mit Profilverschiebung gilt, wenn m' den Laufmodul bezeichnet

(34)
$$\frac{z_1 m'}{\cos \beta_1'} + \frac{z_2 m'}{\cos \beta_2'} = 2 a$$

oder

(35)
$$m' = \frac{2a}{\frac{z_1}{\cos \beta_1'} + \frac{z_2}{\cos \beta_2'}}$$

(36 a)
$$\sin \beta_1 = \frac{m}{m'} \sin \beta_1'$$

(36 b)
$$\sin \beta_2 = \frac{m}{m'} \sin \beta_2'$$

Damit lassen sich die Radabmessungen, wie unter 2, B angegeben, berechnen. Für die ideelle Zähnezahl ist natürlich der β_1 bzw. β_2 entsprechende Faktor massgebend, also

$$z_{v_1} \equiv z_1 \, K_1$$
 , $z_{v_2} \equiv z_2 \, K_2$.

D. Innengetriebe mit geraden Zähnen

Diese Getriebe werden fast ausschliesslich mit dem Stossrad hergestellt. Neben dem genormten Bezugsprofil findet öfters Stumpfverzahnung Anwendung. Beim Entwurf von Innengetrieben muss den Einschränkungen Rechnung getragen werden, die durch die verschiedenen Interferenzmöglichkeiten gegeben sind [3]. Hat ein Getriebe ohne Profilverschiebung die Abmessungen

Werkzeug: Modul m Eingriffswinkel α Erzeugungstehkreis d_{f_1} Fusskreisdurchmesser d_{f_1} Kopfkreisdurchm. d_{k_2} Ritzel:

Innenrad: Fusskreisdurchmesser d_{f_2}

so werden die Abmessungen mit Profilverschiebung:

a) Kopfkreisdurchmesser d_k , wenn das ursprüngliche Kopfspiel eingehalten werden soll:

(37 a)
$$d_{k_1}' = d_{k_1} + 2 m (x_2 - y)$$
 (Ritzel)

(37b)
$$d_{k_2}{}' \equiv d_{k_2} + 2 \, m \, (x_1 + y)$$
 (Innenrad)

b) Fusskreisdurchmesser $d_{f'}$

(38 a)
$$d_{f_1'} \equiv d_{f_1} + 2 \ m \ x_1$$
 (Ritzel)

(38b)
$$d_{f_2}' = d_{f_2} + 2 m x_2$$
 (Innenrad)

Für den Eingriff Innenrad-Stossrad ist die Rechnung in analoger Weise durchzuführen; ferner sind die verschiedenen Interferenzmöglichkeiten nachzuprüfen und das Eingriffsschema aufzuzeichnen. Massgebend für die Ausführung ist der grösste resultierende Kopfkreisdurchmesser $d_{k'_2}$

c) Grundkreisdurchmesser s. Gl. (3a), (3b)

d) Kontrollmass Wz's. Gl. (10a), (10b). Für das Innenrad wird an Stelle des Tellermikrometers ein Mikrometer oder eine Schiebelehre mit genügend ausgerundeten Messschnäbeln verwendet. Bei sehr kleinen Zahnteilungen ist es zweckmässiger, die Kontrolle mit Messrollen vorzunehmen. Nach Buckingham [3] wird, wenn d_R den Durchmesser der Messrolle und α_R den Hilfswinkel bezeichnen, das Kontrollmass für gerade Zähnezahl M_R

(39)
$$M_R = m z_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_R} - d_R = \frac{d_{b_2}}{\cos \alpha_R} - d_R$$

Kontrollmass für ungerade Zähnezahl $M_{R'}$

$$(40) M_{R'} = m z_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_R} \cos \frac{90^{\circ}}{z_2} - d_R = \frac{d_{b_2}}{\cos \alpha_R} \cos \frac{90^{\circ}}{z_2} - d_R$$

(41) inv
$$\alpha_R = \text{inv } \alpha + \frac{0.5 \pi + 2 x_2 \text{ tg } \alpha}{z_2} - \frac{d_R - 0.5 j}{m z_2 \cos \alpha}$$

Der Messrollendurchmesser soll so gewählt werden, dass

die Rolle wenig über den Zahnkopf vorsteht. Für Räder mit geringer Profilverschiebung wird $d_R=1,440\,$ m-empfohlen.

Die Profilverschiebungen an Innengetrieben mit schrägen Zähnen lassen sich auf die gleiche Weise berechnen, sofern Stossmesser verwendet werden, bei denen das Nennmodul auf den Stirnschnitt bezogen ist; andernfalls ist die Rechnung mit Hilfe der ideellen Zähnezahl vorzunehmen.

Schluss folgt

Berechnung der Druckspannungs-Kurve im Stahlbeton-Biegequerschnitt

Von Dipl. Ing. H. HAMANN, Mülheim-Ruhr

Haberstock bezeichnet die Klärung der Druckspannungsverteilung im Biegequerschnitt als das Hauptproblem der n-freien Rechnung und sagt schliesslich, dass eine exakte Aussage über die Form der Spannungsverteilung und über die Höchstspannung im Druckgurt derzeit nicht möglich sei [2] 1). Die Durchführung direkter Spannungsmessungen, die dieses Problem einer abschliessenden Lösung entgegenführen könnte, ist bislang nicht bekannt geworden.

Bei dem Versuch, die Spannungsverteilung zutreffend zu beurteilen, tauchen immer wieder zwei Grundgedanken schon in den ersten Arbeiten der dreissiger Jahre auf:

- 1. Annahme einer Affinität der an mittig gedrückten Prismen gefundenen Spannungs-Stauchungslinie mit der Spannungsverteilung im Biegequerschnitt.
- 2. Bestimmung des Völligkeitsgrades und des Randabstandes des Druckschwerpunktes durch Auswertung von Bruchversuchen mittels Tastrechnung, wobei man sich zur besseren Veranschaulichung meist auch ein Bild der Spannungsverteilung entwirft.

Es soll hier ein Weg gezeigt werden, der genauere Aussagen zu machen gestattet. Er fusst auf Pucherschen Grundgedanken [5], weswegen auch die von Pucher gewählte Bezeichnungsweise im Wesentlichen beibehalten wurde.

Die Ableitung, die für den Rechteckquerschnitt durchgeführt wird, beruht auf folgenden Voraussetzungen:

- a) Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese. Es sei ausdrücklich betont, dass mit einem ganz geringen Mehraufwand auf die Verwendung dieser Hypothese in folgender Entwicklung verzichtet werden könnte. Es kann bewiesen werden, dass ein Abgehen von dieser Hypothese das Charakteristikum des Endergebnisses nicht wesentlich verändert [3].
- b) Die Spannungs-Stauchungslinien aller Fasern der Balkendruckzone sind annähernd gleich. Diese Annahme erscheint berechtigt, da die Stauchungsdifferenz einer Faser gegenüber der darunterliegenden Faser, somit auch die gegenseitige Beeinflussung, immer gleich ist.
- c) Keine Mitwirkung der Betonzugzone. Diese Annahme wurde getroffen, weil bei den Versuchsunterlagen gewisse Angaben fehlten. Der Einfluss dieser Vernachlässigung auf das Endergebnis ist nicht wesentlich.

Die verwendeten Bezeichnungen gehen aus Bild 1 hervor. Beim Bruch geht die Randstauchung ε_{br} in die Bruchstauchung ε_{bB} und die Betonrandspannung σ_{br} in die Betonbruchrandspannung σ_{bB} über. Es wird weiter verwendet:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{bB}} \le 1;$$

$$\varphi' = \frac{\sigma_{br}}{\sigma_{bB}} \ge 1;$$

$$(1) \quad x = \frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{br} + \varepsilon_{e}} h = \xi h \quad \text{a.s.}$$

Für den Belastungszustand φ wird mit der dimensionslosen Integrationsvariablen α

 $u = \frac{\alpha}{\varphi} x; du = \frac{\xi}{\varphi} h d\alpha$

Bild 1. Bezeichnungen

$$D_b = \int_{a=0}^{u=x} \sigma_b b \, du = \xi \, \sigma_{bB} \, b \, h \frac{1}{\varphi} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} \varphi'(\alpha) \, d\alpha = k \, \xi \, \sigma_{bB} \, b \, h$$

1) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis

DK 624.072.2.012.4

Das Moment von
$$\mathcal{D}_b$$
 um die Nullinie wird

$$M_0 = \int_0^u \sigma_b \, b \, u \, du = \, \xi^2 \, \sigma_{bB} \, b \, h^2 \, \frac{1}{\varphi^2} \int_0^{\varphi} \varphi'(\alpha) \, \alpha \, d\alpha$$

Bezeichnen wir mit $\lambda=1-rac{1}{arphi^2k}\intarphi'\left(lpha
ight)lpha\,d\,lpha$, so ergibt

$$z = h - x + \frac{M_0}{D_b} = h (1 - \lambda \xi)$$

Es gilt die Gleichgewichtsbedingung

(2)
$$k \, \xi \, \sigma_{bB} \, b \, h = F_e \, \sigma_e$$
 $k = \mu \, \frac{\sigma_e}{\sigma_{bB}} \, \frac{1}{\xi}$

und

$$M = k \xi \sigma_{bB} b h z = k \xi \sigma_{bB} b h^2 (1 - \lambda \xi)$$

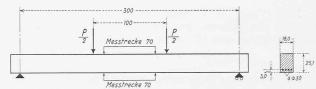


Bild 2. Versuchsbalken

Wir führen unsere Ueberlegungen an einem stark bewehrten Versuchsbalken nach Bild 2 weiter. Misst man bei stufenweiser Aufbringung der Belastung jeweils die einander zugeordneten Verlängerungen der Stahleinlagen und die Zusammendrückungen der Betons an der oberen Balkenfläche bis zum Bruch, so erhält man eine Funktion $\varepsilon_e \ (\varphi) = \Phi \ (1)$ etwas umgewandelt in (2) eingesetzt ergibt nämlich mit $\sigma_e = E_e \ \varepsilon_e \ :$

$$k = \mu \frac{E_e \, \varepsilon_e}{\sigma_{bB}} \left(1 + \frac{\varepsilon_e}{\varphi \, \varepsilon_{bB}} \right)$$

$$\frac{1}{\varphi} \int_0^{\varphi} \varphi'(\alpha) \, d\alpha = \frac{\mu \, E_e}{\sigma_{bB}} \, \Phi \left(1 + \frac{\Phi}{\varphi \, \varepsilon_{bB}} \right)$$

$$(3) \qquad \varphi'(\varphi) = \frac{\mu \, E_e}{\sigma_{bB}} \left[\frac{d}{d \, \varphi} \left(\varphi \, \Phi \right) + \frac{1}{\varepsilon_{bB}} \frac{d}{d \, \varphi} \, \Phi^2 \right] + c$$

Diese Funktion gilt allgemein, also nicht nur für eine bestimmte Faser des gedrückten Querschnittes. Die Konstante c wollen wir hier nicht weiter beachten, da wir annehmen wollen, dass unsere Balken bei Versuchsbeginn spannungsfrei sind, das heisst z. B. keiner Schwindvorspannung unterliegen.

In den meisten Fällen wird es ausreichen, $\varepsilon_e\left(\varphi\right)$ durch eine Parabel 2. Grades anzunähern:

$$\Phi = a_1 \varphi + a_2 \varphi^2$$

Wir erhalten dann nach Gleichung (3)

$$(4) \qquad \varphi'\left(\varphi\right) = \frac{\mu E_e}{\sigma_{bB}} \times \\ \times \left[\frac{4 a_2^2}{\varepsilon_{bB}} \varphi^3 + \left(\frac{6 a_1 a_2}{\varepsilon_{bB}} + 3 a_2 \right) \varphi^2 + \left(\frac{2 a_1^2}{\varepsilon_{bB}} + 2 a_1 \right) \varphi \right]$$

Die Betonbruchrandspannung erhält man, wenn man arphi=arphi'=1 setzt:

(5)
$$\sigma_{bB} = \frac{2 \mu E_e}{\epsilon_{bB}} \left[2 a_2^2 + 3 a_1 a_2 + 1.5 a_2 \epsilon_{bB} + a_1^2 + a_1 \epsilon_{bB} \right]$$