

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 70 (1952)  
**Heft:** 39

**Artikel:** Die spannungsoptische Untersuchung elastischer Platten  
**Autor:** Kufner, Max  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59680>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Die spannungsoptische Untersuchung elastischer Platten

Von Dr. Ing. MAX KUFNER, München

### 4. Kreisplatten mit starker Durchbiegung

Die Theorie der Platten mit starker Durchbiegung wurde von Th. v. Kármán [4] gegeben, der zur Beschreibung des Zustandes der elastisch verformten Platte zwei partielle Differentialgleichungen 4. Ordnung angab. Bei Kreisplatten wurde die Integration bisher nur für den Fall der ringsum eingespannten und gleichmäßig belasteten Kreisplatte von Way [10] mit Hilfe von Reihenentwicklungen durchgeführt. Näherungslösungen für den selben Fall sind von Federhofer [2], [3], Nádai [6] und Timoshenko [8], [9] bekannt. Die numerischen Ergebnisse der Arbeiten von Way [10] und Federhofer [3] sind auf den Bildern 14 und 15 enthalten und den Ergebnissen der spannungsoptischen Versuche gegenübergestellt.

#### a) Versuchsdurchführung

Die Platten wurden in der auf Bild 14 gezeigten Weise an einen Druckkessel angeflanscht, der in einem Wärmeofen Platz fand und durch Schlauchleitungen mit einer Pumpe, einem Entlüftungshahn und einem Quecksilbermanometer verbunden war. Das Entstehen von Randeffekten konnte durch sorgfältiges Bedecken der mit Öl bestrichenen Platten mit sektorförmigen, einander überlappenden Aluminiumfolien zuverlässig verhindert werden. Die Erstarrungsversuche sind in der bereits beschriebenen Weise durchgeführt worden. Nach dem Erkalten hat man bei den Platten und den Eichstäben zunächst den Biegepfeil gemessen. Aus der Durchbiegung der Eichstäbe ergab sich der während des Versuches vorhandene Elastizitätsmodul. Sodann wurden aus den Platten je zehn Streifen von etwa 3 mm Dicke herausgeschnitten, deren Lage aus Bild 15 hervorgeht. Die Streifen 1 und 2 geben den Verlauf der Radialspannungen, die Streifen 3 bis 10 im Symmetrieschnitt den der Tangentialspannungen wieder. Insgesamt sind fünf Platten untersucht worden. Die wichtigsten Versuchswerte zeigt Tabelle 3.

Die Bilder 18a bis e zeigen die Symmetrieschnitte aus den fünf Platten, die zur Bestimmung der Radialspannungen dienten.

#### b) Diskussion der Versuchsergebnisse

Die Durchbiegungen sind in Bild 16 eingetragen. Die Biegepfeile der Platten 3 und 4 stimmen völlig mit den theoretischen Werten überein, wenn man berücksichtigt, dass die Querkontraktionszahl  $\mu$  von Dekorit beim Erstarrungsversuch nahe bei 0,5 liegt. Bei den Platten 1, 2 und 5 sind die Biegepfeile dagegen größer, als nach der Theorie zu erwarten ist. Diese Beobachtung wurde bei Versuchen mit Stahlplatten bereits von Nádai und Way gemacht. Nádai erzielte schon bei kleinen Durchbiegungen, also im Bereich der Kirchhoffschen Platte, bereits 6 bis 15 % höhere Werte ([6], S. 303). Dieses Verhalten wird von Nádai mit einer mit Gleitern verbundenen radialen Verschiebung der Platte innerhalb des Einspannkreises erklärt. Das Herausgleiten aus der Einspannung wirkt praktisch wie eine Vergrößerung des Einspannhalbmessers  $a$ . Auch die von Way mitgeteilten Versuchsergebnisse an Platten starker Durchbiegung zeigen die gleiche Tendenz. Bei diesen Platten kommt noch hinzu, dass sich aus der radialen Verschiebung am Einspannkreis eine Abnahme der Membranspannungen ergibt.

Im spannungsoptischen Versuch kann nun die Vergrößerung des Einspannhalbmessers festgestellt werden, wie an der linken Hälfte von Bild 18a erläutert werden soll. An der

DK 620.171.5:624.073

Schluss von Seite 549

Unterseite der Platte herrscht, abgesehen von dem in diesem Zusammenhang belanglosen Innendruck, praktisch ein einaxiger Spannungszustand. Im mittleren Bereich hat die Randspannung unten das negative Vorzeichen, nimmt an der ge-

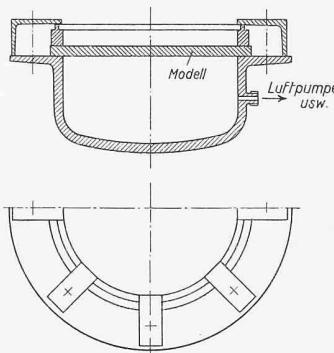


Bild 14. Befestigung der Modelle am Druckkessel

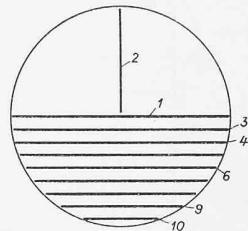


Bild 15. Lage der einzelnen Streifen

kennzeichneten Stelle der Isochromaten nullter Ordnung den Wert null an und steigt dann rasch bis zum positiven Höchstwert an der Einspannstelle. Hier geht der einaxige Spannungszustand in einen zweiaxigen über, da durch die Einspannung Druckkräfte auf die Platten übertragen werden. Die Isochromatenordnung ist nun proportional dem Durchmesser des Mohrschen Spannungskreises  $\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)$ . Deshalb muss an dieser Stelle, wo einer positiven Hauptspannung  $\sigma_1$  eine negative Hauptspannung  $\sigma_2$  überlagert wird, die Isochromatenordnung sprunghaft ansteigen. Auf diese Weise wurden die korrigierten Einspannradien der Tabelle 2 durch Ausmessen der spannungsoptischen Aufnahmen unter Berücksichtigung des Vergrößerungsmasstabes bestimmt.

Aus den in den Bildern 18a bis e gezeigten Symmetrieschnitten können die radialem Spannungen ermittelt werden. Die konvexe Seite ist lastfrei und die dort beobachteten Isochromatenordnungen geben direkt die Größe der aus Biege- und Membranspannung zusammengesetzten Gesamtspannung an. Am unteren, konkaven Rand herrscht dagegen ein zweiaxiger Spannungszustand, da hier der innere Ueberdruck angreift. Ueberall, wo Druckspannung vorliegt, muss daher der beim Versuch herrschende Ueberdruck addiert werden, während er von Zugspannungen subtrahiert werden muss. Das arithmetische Mittel der am selben Radius an der Ober- und Unterseite der Platte auf diese Weise bestimmten Spannungen entspricht dann der Membranspannung an dieser Stelle. Die Versuchsergebnisse sind in den Bildern 14 und 15 eingetragen.

Als erstes Ergebnis der fünf Versuche kann festgestellt werden, dass die theoretischen Spannungswerte bei keiner Platte überschritten wurden. Zu den einzelnen Platten ist noch besonders zu bemerken:

Platte 1: Bild 17 zeigt, dass die Biegespannungen trotz eines Biegepfeils  $w_0/h = 0,465$  (Tabelle 3) fast noch der Kirchhoffschen Theorie entsprechen. Die Angabe von Way, dass Platten bis zu einer Durchbiegung von 40% der Plattendicke mit einem Fehler von höchstens 10% nach der Kirchhoffschen Theorie berechnet werden können, wird durch die

Tabelle 3. Versuchswerte und Ergebnisse der Kreisplatten mit starker Durchbiegung

Platte Nr.	Korrigierter Einspann- radius $a$ em	Dicke $h$ cm	Biege- pfeil $w_0$ cm	$\frac{w_0}{h}$	Ueber- druck $P$ kg/cm <sup>2</sup>	Elastizi- täts- modul $E$ kg/cm <sup>2</sup>	$\frac{p a^4}{E h^4}$	Membranspannung		Biegespannung					
								$\frac{\sigma_r' a^2}{E h^2}$	in der Mitte	am Rand	$\frac{\sigma_r'' a^2}{E h^2}$	in der Mitte	am Rand		
1	8,1	0,99	0,46	0,465	0,8	1720	2,4	--	0,028	+	0,115	±	1,598	±	2,775
2	8,4	1,06	0,82	0,78	1,25	1000	4,92	+	0,30	+	0,64	±	2,82	±	3,89
3	8,0	0,98	0,90	0,92	1,5	673	9,9	+	0,405	—	0,005	±	2,465	±	3,74
4	8,4	0,99	0,98	0,99	1,6	750	11,0	+	0,59	+	0,44	±	3,60	±	5,09
5	8,35	0,59	1,73	2,93	0,8	500	65,7	+	3,765	+	2,03	±	3,145	±	12,08

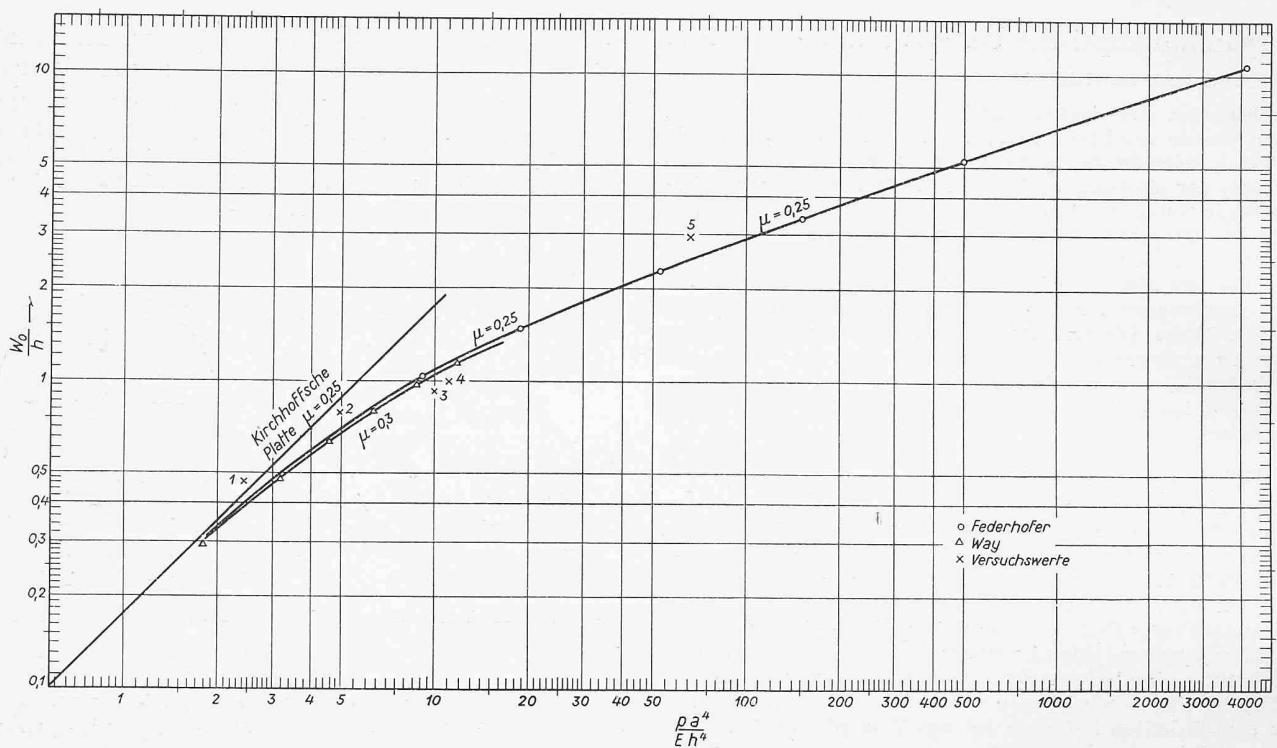


Bild 16. Durchbiegung von eingespannten Kreisplatten unter gleichmässig verteilter Belastung

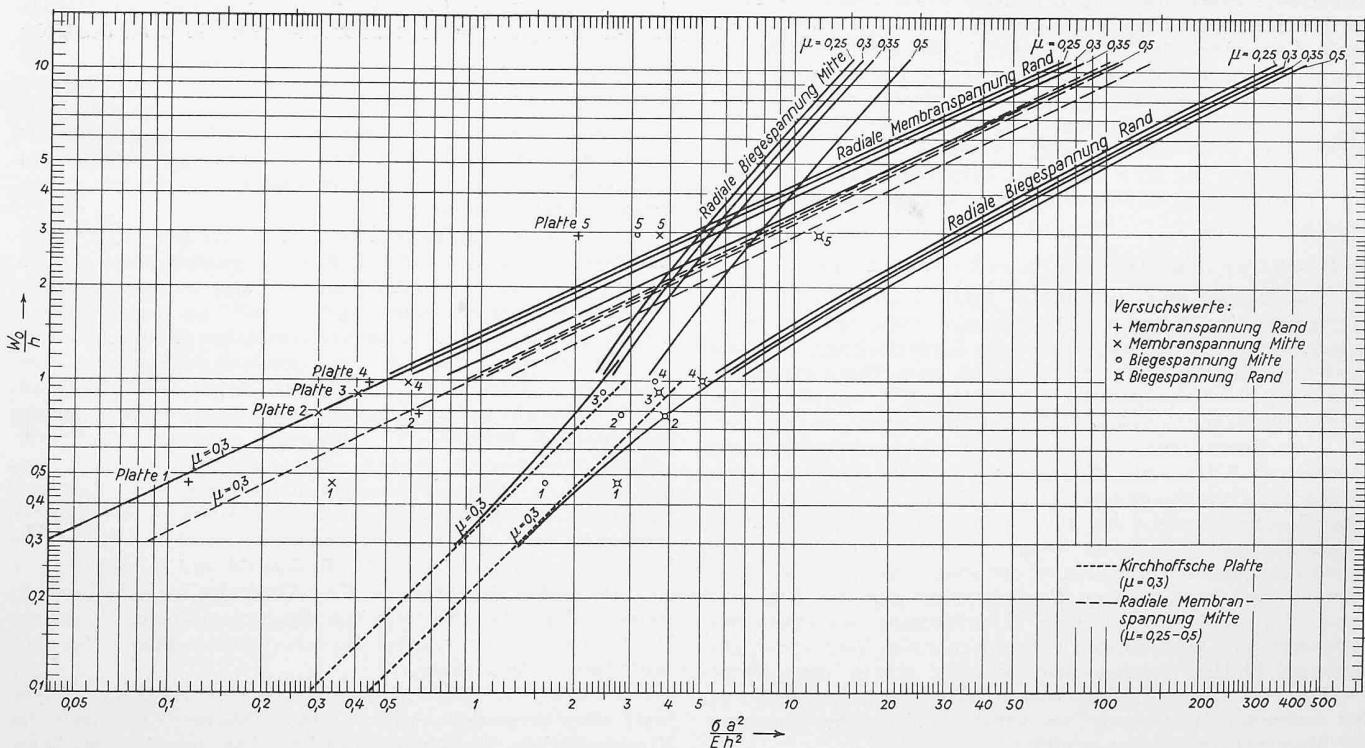


Bild 17. Spannungen in eingespannten Kreisplatten unter gleichmässig verteilter Belastung (nach Theorie berechnete Werte und Versuchsergebnisse)

sen Versuch auch in bezug auf die Spannungen bestätigt. Der aus Tabelle 3 zu ersehende Wert von  $-0,028$  für die Membranspannung in der Mitte liegt innerhalb der Versuchsgenauigkeit. Der niedrigste mögliche Wert ist null.

Platte 3 ist besonders bemerkenswert. Tabelle 3 zeigt, dass die radiale Membranspannung in der Mittelebene der Platte am Rand null beträgt, was im Gegensatz zur Theorie steht. Dies setzt eine nach dem Geradliniengesetz verteilte Biegespannung  $\sigma''$  und eine ihr überlagerte, über die ganze Plattendicke konstante Membranspannung  $\sigma'$  voraus. Unter dieser Voraussetzung kann bei dieser Platte angenommen werden, dass die radiale Verschiebung an der Einspannstelle null war und somit die Einspannbedingung tatsächlich erfüllt wurde.

Platte 4: Hier wurde der Verlauf der Spannungen über die ganze Platte bestimmt; Bild 19 zeigt ihren Verlauf. Er stimmt mit den gerechneten Werten von Nádai (Bild 20) ziemlich gut überein, wenn man berücksichtigt, dass der Biegepfeil  $w_0/h$  im Versuch 0,99, bei Nádai jedoch 1,49 beträgt. Die Membranspannungen sind beim Versuch nicht nur wegen der geringeren Durchbiegung kleiner, sondern auch wegen mangelhafter Erfüllung der Einspannbedingungen. Deswegen sind die Biegespannungen in der Mitte trotz der kleineren Durchbiegung grösser als bei Nádai, weil auf sie ein grösserer Anteil der Formänderungsarbeit entfällt. Ferner wird die Spannung  $\sigma'_r$  im Versuch im äusseren Bereich der Platte negativ. Auch dies deutet auf eine mangelhafte Erfüllung der Einspannbedingung hin, wie ein Vergleich mit dem

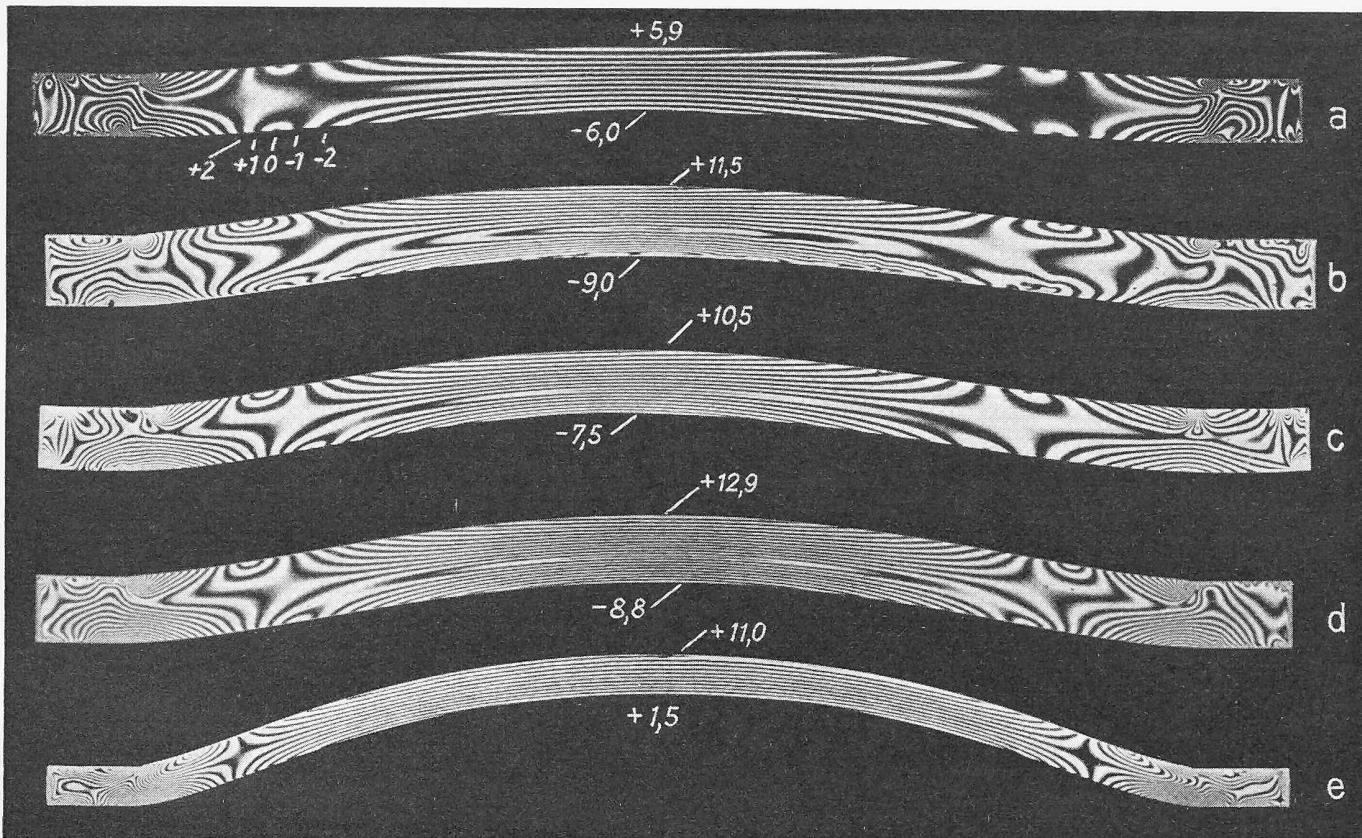
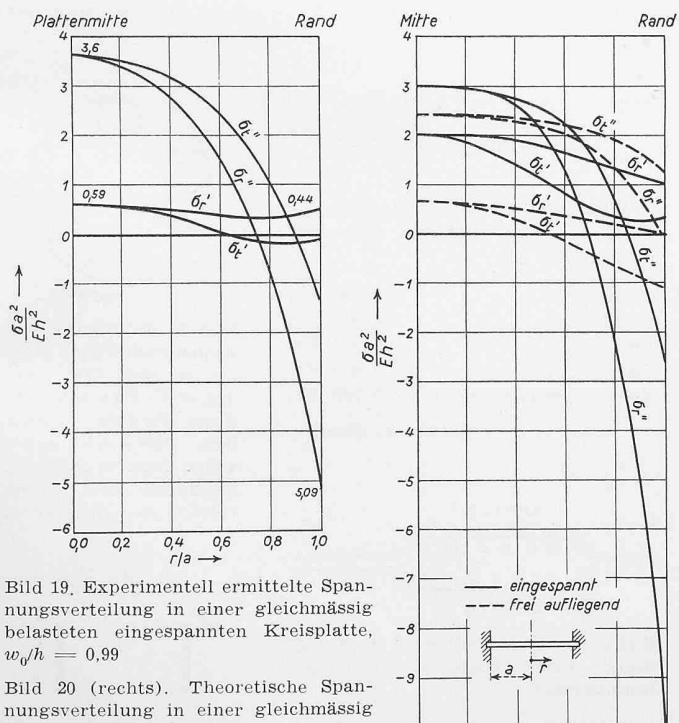


Bild 18. Symmetrieschnitte aus den Platten 1 bis 5

Bild 19. Experimentell ermittelte Spannungsverteilung in einer gleichmässig belasteten eingespannten Kreisplatte,  $w_0/h = 0,99$ Bild 20 (rechts). Theoretische Spannungsverteilung in einer gleichmässig belasteten eingespannten und in einer frei aufliegenden Kreisplatte nach Nádai,  $w_0/h = 1,49$  bzw. 1,45

Verlauf von  $\sigma_r$  in einer frei aufgelagerten Platte zeigt (Bild 20, gestrichelte Kurve).

Zusammenfassend kann über die Versuche gesagt werden:

1. Die theoretische Kurve für den Biegepfeil in Abhängigkeit von der Belastung stellt eine untere Grenzkurve dar, die wegen der praktisch kaum zu verwirklichenden Einspannbedingungen der Theorie selten erreicht und nie unterschritten wird.

2. Aehnlich verhält es sich mit den Spannungen als Funk-

tionen der Biegepfeile. Die theoretischen Zahlen stellen hier obere Grenzwerte dar, die im Versuch nirgends überschritten wurden.

3. Für überschlägige Rechnungen kann bei ringsum eingespannten Kreisplatten unter gleichmässig verteilter Belastung bis zu einem Biegepfeil  $w_0/h = 0,5$  nach der Kirchhoffschen Theorie gerechnet werden. Die erhaltenen Durchbiegungen sind dann um 10%, die maximalen Biegespannungen am Rand als Funktion dieses zu grossen Biegepfeils um 9,5% zu gross.

##### 5. Das Erstarrungsverfahren zur Untersuchung räumlicher Spannungszustände

Bei der Spannungsoptik ist zu unterscheiden zwischen der Spannungsdoppelbrechung als physikalischen Phänomen und der eigentlichen technischen Anwendung. Die Erscheinung der Spannungsdoppelbrechung ist seit mehr als hundert Jahren bekannt; so beschreibt z. B. Matthaei [20] eine spannungsoptische Apparatur, die Goethe zur qualitativen Untersuchung der Eigenspannungen rasch abgekühlter Gläser benutzte. Die technische Anwendung in der Hand des Konstrukteurs begann viel später, als folgende wichtige Fortschritte erzielt waren:

1. Beherrschung der Eigenschaften von Kunstharzen mit einem zwanzigmal grösseren spannungsoptischen Effekt als ihn das anfangs verwendete Glas aufweist.
2. Die Herstellung grossflächiger Polarisatoren statt Nicolscher Prismen.

Glasmmodelle und Nicolsche Prismen erfordern den Aufbau der spannungsoptischen Apparatur auf einer optischen Bank und die punktweise Bestimmung der Spannungsdoppelbrechung mit Hilfe eines Kompensators. Die Kosten für Apparatur und Modellherstellung sind hoch, der Zeitaufwand für die Untersuchungen ist gross, aber Glasmmodelle sind vollkommen elastisch und die Ergebnisse sind sehr genau. Eine aus Grossflächen-Polarisatoren bestehende Apparatur benötigt dagegen keine optische Bank, die Kunstharzmodelle sind rasch herzustellen, und die Auswertung besteht im Abzählen von Isochromatenordnungen, wenn man sich bei ebenen Modellen auf die Ermittlung der Spannungen am Rand beschränkt.

Trotz der erzielten Fortschritte sind beim spannungsoptischen Verfahren noch Verbesserungen möglich. Die vielfach verwendeten Phenol-Formaldehydharze haben z. B. die unangenehme Eigenschaft, beim Lagern in Luft in wenigen

Tagen Eigenspannungen zu zeigen. Dieser Randeffekt kann durch geeignete Behandlung ausgeschaltet werden, die von Mönch [21], [14] gezeigt wurde. Diese Behandlung bedeutet aber eine Mehrarbeit und ist insbesondere beim Erstarrungsversuch oft sehr störend. Aus diesem Grund wurde auch die Feststellung, dass elastische Spannungszustände in Kunsthärzmodelle «eingefroren» werden können, vorhin bei den beiden anderen grossen Fortschritten nicht aufgezählt, da die technische Anwendung wegen dieses Randeffektes noch keine grosse Verbreitung finden konnte. Das Erstarrungsverfahren erlaubt die Untersuchung beliebiger räumlicher Spannungszustände, da die Modelle mit eingefrorenen Spannungszuständen in beliebigen Schnitten untersucht werden können, wie hier an zwei Beispielen gezeigt wurde. Es ist klar, dass das einwandfreie Einhüllen in Aluminiumfolie bei komplizierteren Modellen sehr schwierig oder auch unmöglich werden kann. So wurde die Wärmebehandlung des bereits erwähnten Rohrbodenmodells [13] in einem Quecksilberbad vorgenommen, das dem Anlegen einer Aluminiumfolie gleichwertig ist.

Damit kann abschliessend über das Erstarrungsverfahren zur Untersuchung beliebiger räumlicher Spannungszustände gesagt werden, dass es eine außerordentlich wichtige Bereicherung der Verfahren der experimentellen Spannungsuntersuchung darstellt, aber wegen der Unzulänglichkeit der bisher verwendeten Kunsthärze noch nicht den Platz einnehmen konnte, der ihm gebührt. Es besteht nunmehr aber begründeter Anlass zu der Erwartung, dass in einigen Jahren Kunsthärze zur Verfügung stehen werden, die unter Beibehaltung der guten Eigenschaften der bisher verwendeten Stoffe frei von Randeffekt sind.

#### Literaturverzeichnis

##### Festigkeitslehre

- [1] *Federhofer*: Ueber die Berechnung der dünnen Kreisplatte mit grosser Ausbiegung. «Eisenbau» 9, 1918, S. 152.
- [2] *Federhofer*: Zur Berechnung der dünnen Kreisplatte mit grosser Ausbiegung. «Forsch. Ing. Wes.» 7, 1936, S. 148.
- [3] *Federhofer*: Berechnung der dünnen Kreisplatte mit grosser Ausbiegung. «Luftf. Forsch.» 21, 1944, S. 1.
- [4] *v. Kármán*: Enz. d. Math. Wiss., Band IV Mechanik, 4. Teilband, S. 350.
- [5] *Kuhn*: Beitrag zur Berechnung der Halbkreisplatte, «Ing. Arch.» 12, 1941, S. 307.
- [6] *Nádai*: Die elastischen Platten, Berlin 1925.
- [7] *Roark*: Formulas for Stress and Strain, New York-London 1943.
- [8] *Timoshenko*: Schwingungsprobleme der Technik, Berlin 1932, S. 344.
- [9] *Timoshenko*: Theory of Plates and Shells, New York-London 1940.
- [10] *Way*: Bending of Circular Plates with Large Deflection, «J. Appl. Mech.» 56, 1934, S. 627.

##### Spannungsoptik

- [11] *Drucker*: The Photoelastic Analysis of Transverse Bending of Plates in the Standard Transmission Polariscopic, «J. Appl. Mech.» 9, 1942, A-161.
- [12] *Favre*: Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies, SEZ 1950, Nr. 19 (S. 253\*).
- [13] *Föppl*: Beispiele zur Anwendung der Spannungsoptik. «Z. VDI» 93, 1951, S. 105.
- [14] *Föppl-Mönch*: Praktische Spannungsoptik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.



Bild 1. Zentralafrikanischer Pavillon im Bau

- [15] *Frocht*: Photoelasticity, Vol. I New York-London 1941, Vol. II New York-London 1948.
- [16] *Goodier-Lee*: An Extension of the Photoelastic Method of Stress Measurement to Plates in Transverse Bending, «J. Appl. Mech.» 8, 1941, A-27.
- [17] *Hetényi*: The Application of Hardening Resins in Three-Dimensional Photoelastic Studies, «J. Appl. Phys.» 10, 1939, S. 295.
- [18] *Hirschfeld*: Spannungsoptische Untersuchung von Platten, «Bauingenieur» 25, 1950, S. 455.
- [19] *Kuhn*: Experimentelle Untersuchung elastischer Platten mit Hilfe der Spannungsoptik, Diss. München 1948.
- [20] *Matthaei*: Goethes naturwissenschaftliche Begründung einer Harmonielehre, «Kosmos» 47, 1949, S. 298.
- [21] *Mönch*: Praxis des spannungsoptischen Versuchs mit Dekorit als Modellwerkstoff, «Ing. Arch.» 16, 1948, S. 267.
- [22] *Oppel*: Polarisationsoptische Untersuchung räumlicher Spannungs- und Dehnungszustände, «Forsch. Ing. Wes.» 7, 1936, S. 240.
- [23] *Poertner*: Photoelastic Analysis of the Bending Stresses in Thin Plates, Diss. Washington University Saint Louis, Miss., 1943.

## Die Wissenschaft im Aufbauwerk der UNESCO

DK 37

Die 1945 gegründete «United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization» (UNESCO) umfasst heute 64 Nationen. Die Schweiz gehört ihr seit 1949 an. Ihr oberstes Prinzip ist, den Menschen zu dienen durch tatkräftige Hilfe. Dabei begegnet sie krassen Unterschieden in der technischen Entwicklung und in der Teilhaftigkeit an den Gütern des täglichen Lebens. Es gibt hochentwickelte Kulturländer und daneben stark zurückgebliebene Länder. Daraus ergeben sich Gleichgewichtsstörungen, die den Bestand unserer Kultur gefährden. Bei dem heutigen dichten Netz von Verkehrs- und Nachrichtenlinien sind wir uns alle so nahegekommen, dass sich die heute noch bestehenden Unterschiede mit den Auffassungen über das, was Kultur ist, nicht mehr vereinbaren lassen. So liegt es im Plan des Aufbauwerkes der Unesco, die Grundlage zu einem Kulturausgleich zu schaffen. Dem entsprechend ist das grundlegende Programm sehr weit gefasst. Es gliedert sich in folgende

### Projekt für eine Feriensiedlung bei Mörigen am Bielersee

Voraussichtliche Baukosten der Feriensiedlung gemäss den Bildern 6 bis 12:

Pavillon 1	58 000 Fr.
Pavillon 2	4 000 Fr.
Pavillon 3	5 000 Fr.
Pavillon 4	5 000 Fr.
Zwei Pavillons 5	9 000 Fr.
Total	81 000 Fr.

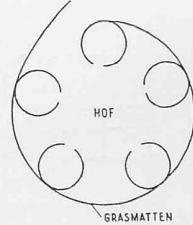


Bild 4. In Französisch-Aequatorialafrika gruppieren sich eine oder mehrere Familien mit ihren Pavillons zusammen. Um sich gegen wilde Tiere zu schützen, umzäunen sie sie mit geflochtenen Grasmatten

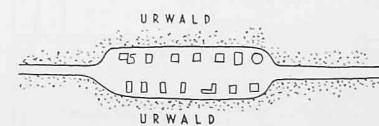


Bild 2. Die Negersiedlungen im Kongo liegen direkt längs der staubigen Hauptstrasse

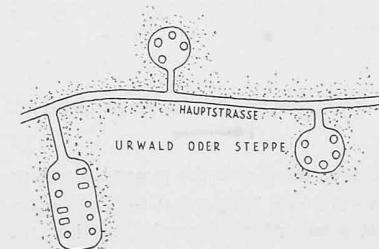


Bild 3. Die Franzosen bauen ihre Negersiedlungen abseits der Durchfahrtsstrasse

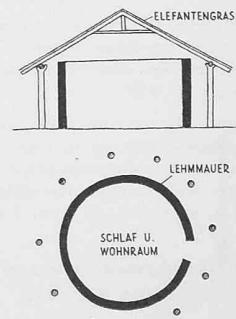


Bild 5. Bei sämtlichen Wohnpavillons wird zuerst die Holzkonstruktion montiert. Die Lehmmauer wird unabhängig und der Lüftung wegen nie bis zum Dach erstellt