

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	70 (1952)
Heft:	39
Artikel:	Die Berechnung des Reibungsverlustes und des Wirkungsgrades von Umlaufradgetrieben
Autor:	Brandenberger, Heinrich
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-59679

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Berechnung des Reibungsverlustes und des Wirkungsgrades von Umlaufradgetrieben

Von Ing. Dr. HEINRICH BRANDENBERGER, Zürich

DK 621.833.67.004.15

Unter einem Umlaufradgetriebe versteht man ein Uebersetzungsgetriebe mit einem System I, zum Beispiel Antriebsystem (Bilder 1 und 2), einem zu I auf gleicher Achse liegenden System II, zum Beispiel Abtriebsystem, und einem Stegsystem III, das auf I und II gelagert ist und ebenfalls umläuft, und das, je nach den Drehverhältnissen, ein An- oder Abtrieb sein kann. Im Folgenden soll mit II jenes System bezeichnet werden, das bei stillstehendem Steg gegen aussen die höhere absolute Drehzahl aufweist. Bei einem solchen Getriebe sind sowohl die Drehzahlen als auch die Drehmomente, die Leistungen, der Reibungsverlust und der Wirkungsgrad zu berechnen.

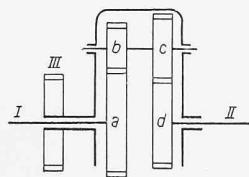


Bild 1. Umlaufradgetriebe mit positiver Uebersetzung

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \text{pos.}$$

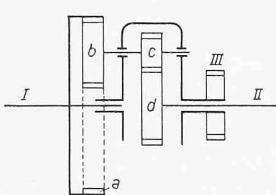


Bild 2. Umlaufradgetriebe mit negativer Uebersetzung

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \text{neg.}$$

Die Berechnung der Umlaufradgetriebe beruht auf einigen grundlegenden Erkenntnissen, auf die besonders hingewiesen wird. Ausserdem wird gezeigt, wie man die Drehzahlen, die Drehmomente, die Leistungen und selbst den Reibungsverlust graphisch darstellen kann. Erst durch eine solche Darstellung erhält man einen klaren Einblick in die Arbeitsverhältnisse, der notwendig ist, um mit Sicherheit eine Berechnung vornehmen zu können. Insbesondere wird anschaulich gezeigt, aus welchen Gründen sich der Wirkungsgrad ändert, wenn man den Richtungssinn des Antriebes umkehrt.

Für die Berechnung der Drehzahlen n_1 , n_2 , n_3 der drei Systeme geht man mit Vorteil von der Ueberlegung aus, dass sich an den relativen Drehzahlen der drei Systeme zueinander nichts ändert, wenn man allen drei Systemen eine gleiche zusätzliche Drehung erteilt. Man wählt diese zusätzliche Drehbewegung mit Vorteil so, dass das Stegsystem zum Stillstand kommt. Alsdann lassen sich die Drehzahlen aus der Gleichung eines einfachen Uebersetzungsgetriebes berechnen. Wir fügen also den Drehzahlen der drei Systeme die negative Stegdrehzahl $-n_3$ zusätzlich hinzu. Die beiden Zentralsysteme I und II nehmen dann die Drehzahlen $n'_1 = n_1 - n_3$ und $n'_2 = n_2 - n_3$ an, und es ergibt sich wegen des stillstehenden Steges die Gleichung

$$(1) \quad n_2 - n_3 = (n_1 - n_3) \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

wobei das Verhältnis der Zahnezahlen der Räder $a/c/b/d$ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem für stillstehenden Steg die beiden Zentralsysteme I und II im gleichen oder

im entgegengesetzten Sinne umlaufen (Bilder 1 und 2). Demnach kann man die Umlaufradgetriebe in positive und negative einteilen. Dabei besteht für die Drehzahlen der drei Systeme nur die eine Bedingungsgleichung (1), so dass man die Drehzahlen zweier Systeme frei wählen und die des dritten daraus bestimmen kann.

Geht man vom Uebersetzungsgetriebe mit stillstehendem Steg aus, so erhält man die verschiedenen möglichen Drehzahlverhältnisse, indem man allen drei Systemen eine gleiche zusätzliche Drehung erteilt. Graphisch lässt sich dieser Vorgang dadurch darstellen, dass man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y an der Stelle $x = 0$, das heißt für $n_3' = 0$, die Drehzahlen $n'_1 = n_1 - n_3$ und $n'_2 = n_2 - n_3$ aufträgt, die dem Umlaufradgetriebe für stillstehenden Steg entsprechen (Bilder 3 und 4). Die verschiedenen Drehzahlkombinationen der drei Systeme werden nun dadurch erhalten, dass man durch die drei Punkte 0, n'_1 und n'_2 parallele Geraden, zum Beispiel solche unter 45° , legt. Die drei Schnittpunkte auf einer zur x -Achse senkrecht stehenden Linie stellen drei zueinander gehörende Drehzahlen der drei Systeme dar, und zwar für den Fall, dass gegenüber dem Umlaufradgetriebe für stillstehenden Steg allen drei Systemen eine zusätzliche Drehung erteilt wurde. Bei beiden Arten von Umlaufradgetrieben, bei den positiven (Bild 3), wie bei den negativen (Bild 4), erhält man je vier verschiedene Bereiche 1, 3, 5, 7, in denen sich die Drehzahlen der drei Systeme zueinander befinden können, neben drei Einzelfällen 2, 4, 6, bei denen eines der drei Systeme stillsteht.

Für die Berechnung der Drehmomente stehen zwei Gleichungen zur Verfügung, nämlich: die Summe aller Momente muss gleich Null sein

$$(2) \quad M_1 + M_2 + M_3 = 0$$

und die Summe aller Leistungen muss ebenfalls gleich Null sein. Nun ist bekanntlich das Drehmoment M einer mit n U/min rotierenden Welle $M = 71620 N/n$ cm kg. Man kann also das Produkt $M n = 71620 N$ als Mass der Leistung ansehen.

Erteilt man allen drei Systemen eines Umlaufradgetriebes eine zusätzliche Drehung, ohne an den Drehmomenten etwas zu ändern, so wird auch an den inneren Leistungen nichts geändert, und man kann an Stelle der allgemeinen Leistungsgleichung

$$(3) \quad M_1 n_1 + M_2 n_2 + M_3 n_3 = 0$$

die Leistungsgleichung für stillstehenden Steg nehmen

$$(3') \quad M_1 (n_1 - n_3) + M_2 (n_2 - n_3) = 0$$

Dass sich die Gleichung (3') unmittelbar aus Gleichung (3) ergibt, erkennt man, wenn man den Wert für M_3 aus Gleichung (2), nämlich $M_3 = -(M_1 + M_2)$ in Gleichung 3 einsetzt und das Verhältnis M_2/M_1 bildet; man erhält dann

$$\frac{M_2}{M_1} = - \frac{n_1 - n_3}{n_2 - n_3} = - \frac{n_1'}{n_2'}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2) ergeben sich die auf den Bildern 3 u. 4 wiedergegebenen Darstellungen der Drehmomente. Ein Drehmoment entspricht der Grösse nach dem Abstand der Geraden, durch welche die Drehzahlen der beiden anderen Systeme graphisch dargestellt werden. Für die Berechnung der Drehmomente stehen somit die zwei Gleichungen (2) und (3') zur Verfügung, so dass man nur ein Drehmoment frei wählen kann, wodurch die beiden anderen bestimmt werden.

Ferner können wir die Leistungen, wie sie gegen aussen zur Wirkung kommen, durch Flächen darstellen. Dem Diagramm auf Bild 5 liegt ein Umlaufradgetriebe entsprechend den Bildern 1 und 3 mit positiver Uebersetzung zugrunde. Bewegt sich zum Beispiel dieses Getriebe entsprechend der Stelle A, so kann man sich für diese Stelle die, die Drehzahlen n_1 ,

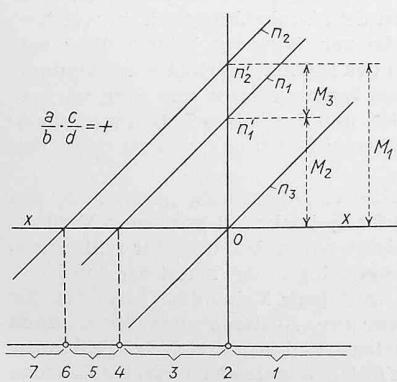


Bild 3. Graphische Darstellung der Drehzahlen und der Drehmomente eines Umlaufradgetriebes ohne Reibung mit positiver Uebersetzung

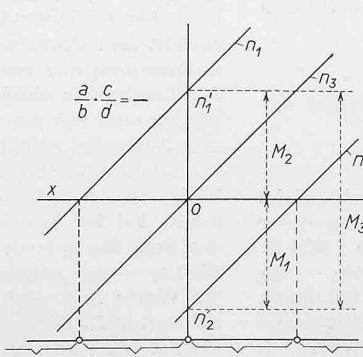


Bild 4. Graphische Darstellung der Drehzahlen und der Drehmomente eines Umlaufradgetriebes ohne Reibung mit negativer Uebersetzung

n_2, n_3 darstellenden vertikalen Strecken um 90° , das heisst in die x -Axe gedreht denken, und man erhält mit den vertikalen Strecken, die M_1, M_2, M_3 darstellen, Rechtecke, deren Flächeninhalte den Leistungen $M_1 n_1, M_2 n_2, M_3 n_3$ entsprechen.

Nehmen wir zum Beispiel an, dass das System I treibend sei, so erhält man die in Tabelle I dargestellten Vorzeichen. Entsprechend der Stelle A sind alle drei Drehzahlen negativ. Die Leistung $M n$ des Systems I können wir als treibend mit positiven Vorzeichen angeben. Daher muss das Drehmoment des Systems I ebenfalls die Drehzahl n_1 negatives Vorzeichen erhalten. Wie sich aus der graphischen Darstellung der Drehmomente ergibt, müssen die Drehmomente der Systeme II und III, Bilder 3 und 5, die gegenüber System I bei der angenommenen Art von Umlaufradgetrieben ein entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen, positiv sein. Daraus ergeben sich die Leistungen der Systeme II und III, $M_2 n_2$ und $M_3 n_3$, beide negativ. Schraffiert man die positiven Leistungen vertikal und die negativen Leistungen horizontal, so kann man sich leicht davon überzeugen, dass der Grösse nach die Antriebsleistung gleich der Abtriebsleistung ist.

Für die Berechnung der Umlaufradgetriebe bei auftretender Reibung ist der Umstand von Bedeutung, dass die beiden Drehmomente der Zentraltriebe I und II sich entsprechend dem Wirkungsgrad der Zahnradgetriebe für stillstehenden Steg verändern. Um dies zu erkennen, muss man den Einfluss der Zahnflankenreibung auf die Drehmomente untersuchen. Dabei ergibt sich mit Hilfe der Bilder 6 und 7 für den Fall, dass der Eingriffspunkt der beiden Zahnflanken ausserhalb des Teilrisspunktes C der beiden eingreifenden Zahnräder liegt, dass der Antrieb (System I) gegenüber dem Abtrieb (System II) ein grösseres Drehmoment als bei Reibungsfreiheit aufbringen muss. Die Veränderung der Drehmomente bei auftretender Reibung hängt somit der Grösse nach davon ab, welches von beiden Systemen I oder II für stillstehenden Steg das treibende ist.

Man muss also feststellen, dass 1. bei auftretender Reibung die Drehzahlen der Grösse nach erhalten bleiben und 2. dass die Leistungsveränderung gegenüber Reibungsfreiheit sich aus der Veränderung der Drehmomente ergibt, wobei es nicht gleichgültig ist, welches der beiden Systeme für stillstehenden Steg, das heisst auf den Steg bezogen, das treibende System ist.

Man erhält die Beziehung der Drehmomente der beiden Zentralsysteme, indem man für stillstehenden Steg die Leistungsgleichung unter Berücksichtigung des Wirkungsgrades des Zahnradgetriebes als Vorgelege aufstellt. Die bei auftretender Reibung geänderten Drehmomente sollen zum Unterschied der Drehmomente ohne Reibung mit M_1', M_2', M_3' bezeichnet werden. Falls für stillstehenden Steg System I treibend wirkt, erhalten wir mit η als Wirkungsgrad der Zahnräder zwischen System I und II im Umlaufradgetriebe

$$M_1' (n_1 - n_3) \eta + M_2' (n_2 - n_3) = 0$$

und falls System II auf den Steg bezogen das treibende System ist, die Beziehung

$$M_1' (n_1 - n_3) + M_2' (n_2 - n_3) \eta = 0$$

Das Drehmoment des Stegsystems ergibt sich jedesmal aus der Gleichung

$$M_1' + M_2' + M_3' = 0$$

Auf den Bildern 8 und 9 sind für ein Umlaufradgetriebe mit positivem Uebersetzungsverhältnis die Veränderungen der Drehmomente dargestellt, einmal für einen positiven (Bild 8) und das andere Mal für einen negativen Wert $M_1 (n_1 - n_3)$ (Bild 9). Wie man sieht, wird entsprechend Bild 8 bei einem positiven Wert $M_1 (n_1 - n_3)$ das Drehmoment des Steges M_3' grösser, während bei Bild 9 für einen negativen Wert von $M_1 (n_1 - n_3)$ das Stegmoment M_3' kleiner als bei Reibungsfreiheit ist. Man erkennt, dass in dem auf Bild 9 dargestellten Fall das Drehmoment des Steges M_3' schliesslich auch den Wert Null annehmen kann, was besagt, dass bei dieser Art

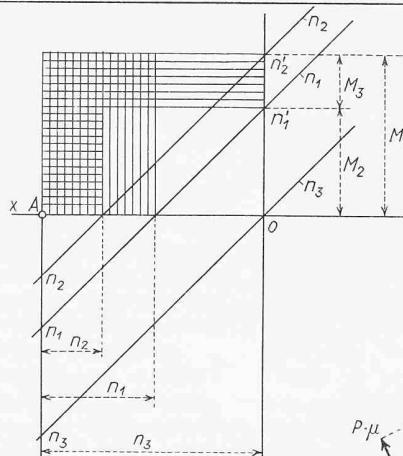


Bild 5. Graphische Darstellung der Leistungen eines Umlaufradgetriebes ohne Reibung mit positiver Uebersetzung

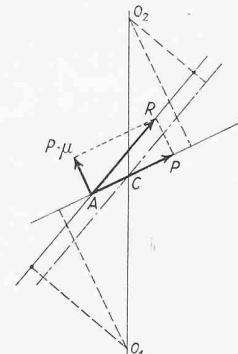


Bild 6. Die Kraftverhältnisse eines Zahntriebes mit Reibung für eine Eingriffsstelle vor dem Teilrisspunkt C

Tabelle 1.
Vorzeichen der Werte des Umlaufradgetriebes für Stelle A des Bildes 5

	I	II	III
n	—	—	—
M	—	+	+
$M n$	+	—	—

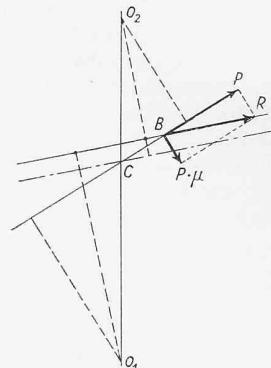


Bild 7. Die Kraftverhältnisse eines Zahntriebes mit Reibung für eine Eingriffsstelle nach dem Teilrisspunkt C

der Verwendung des Umlaufradgetriebes die Leistung des Stegsystems ebenfalls den Wert Null annimmt. Wird dabei dieses Umlaufradgetriebe so verwendet, dass das eine der beiden Systeme I oder II festgehalten wird, das heisst ein einfaches Uebersetzungsgetriebe vorliegt und das System III dabei als Abtrieb benutzt wird, so haben wir es mit dem Fall der Selbsthemmung zu tun. Dies tritt dann ein, wenn ins Schnelle getrieben wird und der Wirkungsgrad η des Vorgeleges gleich dem Verhältnis $b d/a c$ ist, da dann $M_1' = -M_2'$ wird.

In Bild 8 ist angenommen, dass die Leistung des Systems I für stillstehenden Steg treibend ist, das heisst, dass der Ausdruck $M_1 (n_1 - n_3)$ einen positiven Wert aufweist. Dementsprechend muss das bei System II entstehende Drehmoment M_2' wegen der auftretenden Reibung um den Faktor η kleiner sein als das Drehmoment M_2 bei Reibungsfreiheit. Das Drehmoment des Systems III ist wegen $M_1' + M_2' + M_3' = 0$ grösser als bei Reibungsfreiheit. Weiter sind in Bild 8 die Leistungen $M n$ für alle drei Systeme durch Flächen dargestellt. Da der Wert $M_1 (n_1 - n_3)$ wie angenommen als Antriebsleistung für stillstehenden Steg positiv ist, so muss, wegen des positiven Wertes $n_1 - n_3$, auch das Drehmoment M_1 als positiv angenommen werden. Daraus ergeben sich die in Tabelle 2 angegebenen Vorzeichen. In Bild 8 sind die Strecken, welche die Drehzahlen an der Stelle A darstellen, um 90° gedreht, so dass durch die Strecken für die Drehzahlen n_1, n_2, n_3 und der Drehmomente M_1', M_2', M_3' die Leistungen $M_1' n_1, M_2' n_2, M_3' n_3$ durch Rechtecke dargestellt werden. Schraffiert man die Antriebsleistungen vertikal und die Abtriebsleistungen horizontal, so erkennt man, dass der Leistungsverlust infolge Reibung durch das stark ausgezogene Rechteck dargestellt wird. Dieses Rechteck ist unabhängig von der jeweils gewählten Stelle A, das heisst von dem Drehzahlbereich, in welchem man das Umlaufradgetriebe zur Wirkung bringt. Dies entspricht dem Umstand, dass der Reibungsverlust eines Umlaufradgetriebes nur von den im Innern relativ zum Steg wirkenden Leistungen abhängig ist, und dass diese Leistungen unabhängig sind von der zusätzlichen Bewegung, welche man allen drei Systemen erteilt.

In Bild 9 ist die graphische Darstellung gezeigt für den Fall, dass bei einem Umlaufradgetriebe mit positivem Verhältnis $a/c/b/d$ der An- und Abtrieb so erfolgt, dass für stillstehenden Steg das System I als Abtrieb gilt, das heisst der Ausdruck $M_1 (n_1 - n_3)$ negativ ist. In Tabelle 3 sind die Vorzeichen für die Werte n, M und $M n$ der drei Systeme angegeben. Auch bei dem auf Bild 9 dargestellten Fall ergibt sich der Reibungsverlust als eine für das Umlaufradgetriebe charakteristische Grösse, die nur von den Momenten und den Relativdrehzahlen $n_1 - n_3$ und $n_2 - n_3$ abhängig ist, und nicht von dem Drehzahlbereich selbst, in welchem das Umlaufradgetriebe verwendet wird.

Tabelle 2.
Vorzeichen der Werte des Umlaufradgetriebes für Stelle A des Bildes 8

	I	II	III
n	—	—	—
M	+	—	—
Mn	—	+	+

Tabelle 3.
Vorzeichen der Werte des Umlaufradgetriebes für Stelle A des Bildes 9

	I	II	III
n	—	—	—
M	—	+	+
Mn	+	—	—

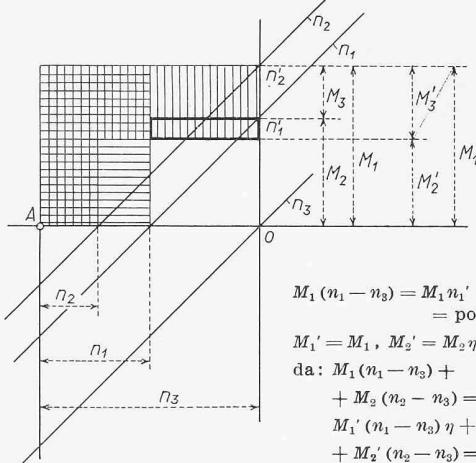


Bild 8. Graphische Darstellung der Leistungen eines Umlaufradgetriebes mit Reibung für ein positives Übersetzungsverhältnis und einem Antrieb des Systems I bezogen auf den Steg, während gegen aussen System I als Abtrieb wirkt

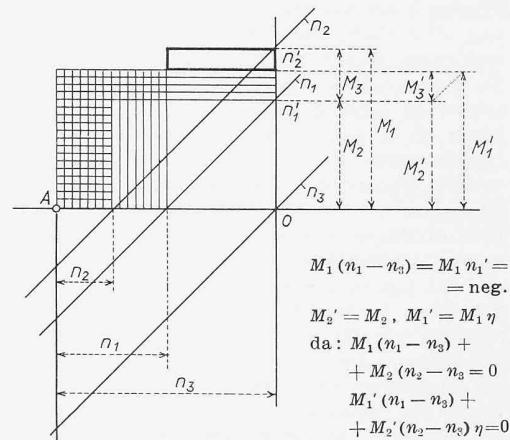


Bild 9. Graphische Darstellung der Leistungen eines Umlaufradgetriebes mit Reibung für ein positives Übersetzungsverhältnis und einem Abtrieb des Systems I bezogen auf den Steg, während System I gegen aussen als Antrieb wirkt

Um zu erreichen, dass ein vorhandenes Umlaufradgetriebe sich mit einem bestimmten Drehzahlverhältnis zum Beispiel an der Stelle A (Bild 5) bewegt, muss man zwei der drei Systeme durch eine Zahnradübersetzung zwingen, sich in dem gewünschten Verhältnis zu drehen. So sind in Bild 10 die beiden Systeme II und III miteinander verbunden, in Bild 11 die Systeme I und III und in Bild 12 die Systeme I und II.

Wie sich aus den Tabellen 2 und 3 ergibt, wirken die Systeme II und III stets im gleichen Sinne auf das Umlaufradgetriebe und beide gegenüber System I im entgegengesetzten Sinn. Beim Getriebe nach Bild 10 wirken die Systeme II und III gegen aussen im gleichen Sinn. Beim Getriebe nach Bild 11 wird auf der Seite des Systems I, falls Tabelle 2 in Betracht kommt, aussen nicht der ganze Abtrieb erhalten, der vom Umlaufradgetriebe geliefert wird, weil ein Teil davon verwendet werden muss, um bei III ebenfalls anzutreiben. Das selbe gilt für ein Getriebe nach Bild 12 und Tabelle 2, indem die aus dem Umlaufradgetriebe erhaltene Abtriebsleistung jetzt verwendet werden muss, um bei II das Umlaufradgetriebe anzutreiben. In den Getrieben nach den Bildern 11 und 12 zirkulieren im Vorgelege Leistungen, die gegen aussen im An- und Abtrieb nicht zur Geltung kommen.

Die Berechnung des Gesamtwirkungsgrades eines solchen Getriebes bietet unter Berücksichtigung des jeweiligen Leistungsflusses und der Wirkungsgrade der Zahnradgetriebe des Vorgeleges keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Beispiel. Bei einem Getriebe nach Bild 10 seien die Zähnezahlen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{50}{24} \cdot \frac{30}{42} = 1,49$$

und

$$\frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{40}{44} \cdot \frac{20}{64} = 0,284$$

sowie die Wirkungsgrade der Zahnradgetriebe a/b , c/d , e/f , g/h der Reihe nach η_1 , η_2 , η_3 und η_4 . Der Antrieb liege auf Seite II und weise eine Drehzahl von $n_2 = 1500$ U/min auf. Die Drehzahlen der Systeme I und III und die Drehmomente der drei Systeme des Umlaufradgetriebes sollen für eine Abtriebsleistung $N_{An} = 3$ PS bestimmt werden. Ebenso die Abtriebsleistung und der Gesamtwirkungsgrad des Umlaufradgetriebes.

Erreicht man allen drei Systemen I, II und III die negative Stegdrehzahl $-n_3$, so ergibt sich für stillstehenden Steg die Beziehung

$$(4) \quad n_2 - n_3 = (n_1 - n_3) \frac{a}{b} \frac{c}{d}$$

Zwischen den beiden Systemen II und III besteht die Drehzahlgleichung

$$(5) \quad n_2 = n_3 \frac{e}{f} \frac{g}{h}$$

Aus der Gleichung (4) ergibt sich

$$(4') \quad n_2 = n_1 \frac{a}{b} \frac{c}{d} + n_3 \left(1 - \frac{a}{b} \frac{c}{d}\right)$$

Ersetzt man in dieser Gleichung den Wert n_3 aus Gleichung (5), so erhält man

$$(6) \quad n_2 = n_1 \frac{a}{b} \frac{c}{d} + \frac{n_2}{e g} \left(1 - \frac{a}{b} \frac{c}{d}\right)$$

Daraus ergibt sich

$$(6') \quad n_1 = n_2 \frac{b}{a} \frac{d}{c} + n_2 \frac{f}{e} \frac{h}{g} \left(1 - \frac{b}{a} \frac{d}{c}\right)$$

Für $n_2 = 1500$ erhält man unter Berücksichtigung der oben angegebenen Werte aus Gleichung (6') $n_1 = 2740$ und aus Gleichung (5) $n_3 = 5280$.

Bezüglich der Drehmomente und Leistungen bei Berücksichtigung des Reibungsverlustes muss zunächst festgestellt werden, welches der beiden Zentralsysteme I oder II für stillstehenden Steg antreibend wirkt. Von den Drehzahlen wissen wir, dass $n_3 > n_2 > n_1$ ist, so dass entsprechend einem Umlaufradgetriebe mit positiver Übersetzung nach Bild 3 der Bereich 7 in Betracht kommt, und zwar die Stelle A nach Bild 5. Da die Drehzahlen der beiden Zentralsysteme für stillstehenden Steg als positive Richtung angenommen werden, so sind sämtliche drei Drehzahlen als negativ anzusehen. Bezüglich des

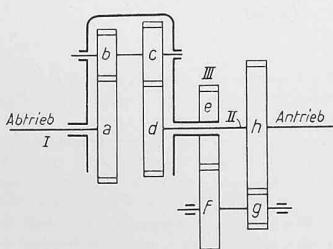


Bild 10. Umlaufradgetriebe entsprechend Stelle A von Bild 5 erreicht durch zwangsläufige Verbindung der Systeme II und III

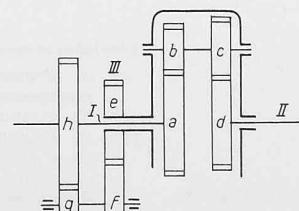


Bild 11. Umlaufradgetriebe entsprechend Stelle A von Bild 5 erreicht durch zwangsläufige Verbindung der Systeme I und III

$$n_2 = \frac{e}{f} \frac{g}{h} n_3$$

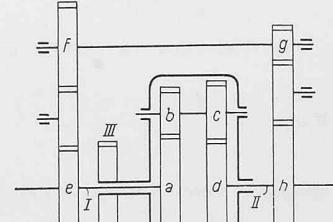


Bild 12. Umlaufradgetriebe entsprechend Stelle A von Bild 5 erreicht durch zwangsläufige Verbindung der Systeme I und II

$$n_2 = \frac{e}{f} \frac{g}{h} n_1$$

Der Vorzeichen der Leistungen steht zunächst nur fest, dass System I ein Antrieb ist, während man von den Systemen II und III zunächst nur weiß, dass eines von beiden ein Antrieb sein muss. Bezüglich der Drehmomente können wir weiter nur die Entscheidung treffen, dass das Drehmoment des Systems I positiv zu nehmen ist, da sowohl die Drehzahl n_1 als die Leistung $M_1 n_1$ negativ sind. Entsprechend der Darstellung der Drehmomente, Bild 5, weisen die Drehmomente der Systeme II und III gegenüber dem Drehmoment des Systems I das entgegengesetzte Vorzeichen auf, weil sich alle drei Momente zu Null ergänzen müssen. Wir erhalten somit, was die Drehmomente anbelangt, ebenso wie in Tabelle 2 für die Systeme II und III Drehmomente mit negativen Vorzeichen. Wegen der negativen Vorzeichen der Drehzahlen der Systeme II und III erhalten wir für die Leistungen dieser Systeme ein positives Vorzeichen. Daraus ergibt sich, dass sowohl System II und III als Antrieb zur Wirkung kommen. Es liegen somit für alle Werte die Vorzeichen entsprechend Tabelle 2 vor.

Weiter kann festgestellt werden, dass für stillstehenden Steg das System I als treibendes System zu gelten hat, da sowohl M_1 als $n_1 - n_3$ gleiche Vorzeichen haben, während M_2 und $n_2 - n_3$ verschiedene Vorzeichen aufweisen. Als Leistungsgleichung für stillstehenden Steg ist daher die Gleichung aufzustellen

$$(7) \quad M_1' (n_1 - n_3) \eta_1 \eta_2 + M_2' (n_2 - n_3) = 0$$

Es liegen daher die Verhältnisse entsprechend Bild 8 vor. Interessant ist dabei, obwohl System II als treibend im Umlaufradgetriebe von aussen wirkt, es im Innern, dem Steg gegenüber, als Antrieb zur Geltung kommt, und gegenüber Reibungsfreiheit dieses antriebende System II eine Verkleinerung des Drehmomentes durch die auftretende Reibung erleidet. Durch die Verkleinerung des Drehmomentes des Systems II wird das Drehmoment des Systems III grösser, was sich nun für die gesamte aufzuwendende Leistung stärker auswirkt, weil System III mit der grössten absoluten Drehzahl bewegt wird.

Aus Gleichung (7) ergibt sich

$$M_2' = -M_1' \frac{n_1 - n_3}{n_2 - n_3} \eta_1 \eta_2$$

und mit Hilfe von Gleichung (4)

$$(7') \quad M_2' = -\frac{M_1'}{\frac{a}{b} \frac{c}{d}} \eta_1 \eta_2$$

Weiter ist

$$(8) \quad M_3' = -(M_1' + M_2') = -M_1' \left(1 - \frac{\eta_1 \eta_2}{\frac{a}{b} \frac{c}{d}}\right)$$

Das für M_3' vom Antrieb aufzuwendende Drehmoment $M_{An}^{x'}$ kann aus der Leistungsgleichung des vorgelagerten Getriebes gefunden werden, welche unter Berücksichtigung, dass das Drehmoment M_3' für das Nachbargetriebe das Vorzeichen umkehrt, lautet

$$(9) \quad M_{An}^{x'} n_2 \eta_3 \eta_4 + (-M_3') n_3 = 0$$

so dass

$$(9') \quad M_{An}^{x'} = +M_3' \frac{n_3}{n_2} \frac{1}{\eta_3 \eta_4}$$

Setzt man $n_3/n_2 = f h/e g$, so ergibt sich

$$M_{An}^{x'} = +\frac{M_3'}{\frac{e g}{f h}} \frac{1}{\eta_3 \eta_4}$$

Mit Hilfe von Gleichung (8) erhält man

$$(9'') \quad M_{An}^{x'} = -M_1' \left(1 - \eta_1 \eta_2 \frac{b d}{a c}\right)$$

Die gesamte vom Antrieb aufzubringende Leistung ist somit

$$(10) \quad M_{An}' = M_2' + M_{An}^{x'} = -\frac{M_1'}{\frac{a}{b} \frac{c}{d}} \eta_1 \eta_2 -$$

$$-\frac{M_1'}{\frac{e g}{f h} \eta_3 \eta_4} \left(1 - \eta_1 \eta_2 \frac{b d}{a c}\right)$$

Der Wirkungsgrad des ganzen Getriebes wird erhalten aus

$$\eta' = \frac{M_1' n_1}{M_{An}' n_2} = \frac{n_1 / n_2}{\frac{M_{An}'}{M_1'}} =$$

$$= \frac{\frac{b d}{a c} + \frac{f h}{e g} \left(1 - \frac{b d}{a c}\right)}{\frac{b d}{a c} \eta_1 \eta_2 + \frac{f h}{e g} \frac{1}{\eta_3 \eta_4} \left(1 - \frac{b d}{a c} \eta_1 \eta_2\right)}$$

Man erkennt, dass für $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 1$ auch $\eta' = 1$ wird. Für $\eta_1 \eta_2 = \eta_3 \eta_4 = 0,9$ erhält man

$$\eta' = 0,85$$

Da die Leistung des Antriebes zu $N = 3$ PS angenommen wurde, so ist

$$M_{An}' = 71620 \frac{3}{1500} = 143,24 \text{ cm kg}$$

und zwar ist, da die zugehörige Drehzahl n_2 negativ ist, das Moment M_{An}' ebenfalls negativ.

Man erhält aus Gleichung 10

$$(10') \quad M_1' = -\frac{M_{An}'}{\frac{b d}{a c} \eta_1 \eta_2 + \frac{1 - \frac{b d}{a c} \eta_1 \eta_2}{\frac{e g}{f h} \eta_3 \eta_4}}$$

$$M_1' = +66,7 \text{ cm kg}$$

Für Reibungsfreiheit mit $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 1$ ergibt sich aus Gleichung (10')

$$M_1 = +78,2 \text{ cm kg}$$

Es ist

$$\frac{M_1'}{M_1} = \frac{66,7}{78,2} = 0,85 = \eta'$$

Weiter ergibt sich aus Gleichung (7')

$$M_2' = -40,3 \text{ cm kg}$$

und ohne Reibung

$$M_2 = -52,5 \text{ cm kg}$$

Aus Gleichung (8) erhält man

$$M_3' = -26,4 \text{ cm kg}$$

und ohne Reibung

$$M_3 = -25,8 \text{ cm kg}$$

Man kann sich überzeugen, dass

$$M_2' + M_3' = -66,7 \text{ cm kg} = -M_1'$$

und

$$M_2 + M_3 = -78,3 \text{ cm kg} = -M_1$$

Die Abtriebsleistung beträgt

$$N_1' = \frac{M_1' n_1}{71620} = \frac{66,7 \cdot 2740}{71620} = 2,55 \text{ PS}$$

und ohne Reibung

$$N_1 = \frac{M_1 n_1}{71620} = \frac{78,2 \cdot 2740}{71620} = 3 \text{ PS}$$

Literaturverzeichnis

- [1] H. Brandenberger: Wirkungsgrad und Aufbau einfacher und zusammengesetzter Umlaufrädergetriebe. «Maschinenbau», 1929, Nr. 8 und 9, S. 249 und 290.
- [2] H. Brandenberger: The influence of tooth friction and of the mass forces on the tooth — pressure curve and the importance of grinding for the highly stressed, rapidly rotating gear wheels. World Engineering Congress Tokyo 1929, Paper No. 664.
- [3] H. Brandenberger: Der Einfluss der Zahreibung und der Zahnenflankenfehler auf die Ruhe des Ganges raschlaufender geradverzahnter Räder. «Schweizerische Technische Zeitschrift» 1933, Nr. 9.
- [4] H. Brandenberger: Der Wirkungsgrad selbsthemmender Umlaufgetriebe bei Umkehrung der Bewegungsrichtung. Vortrag an der Tagung für Getriebetechnik des Vereins Deutscher Ingenieure, Berlin 1951 (VDI-Sonderheft, im Erscheinen).