

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 70 (1952)  
**Heft:** 33

**Artikel:** Knickprobleme an geraden Stäben, Kreisbogensegmenten und Zylindern  
**Autor:** Juillard, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59656>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass es heute durchaus möglich ist, akustisch gute Kirchen zu bauen, ohne ihre architektonische Konzeption unzulässig zu beeinflussen; das grösste Hindernis für eine befriedigende Lösung

sind häufig die Forderungen der Orgelfachleute, die auf die primäre Wichtigkeit einer genügenden Sprachverständlichkeit keinerlei Rücksicht nehmen.

## Knickprobleme an geraden Stäben, Kreisbogensegmenten und Zylindern

Von Oberingenieur H. JUILLARD, Bern

DK 624.075.2:624.19

Fortsetzung von Seite 454

### 1. Fall des eingespannten Bogens

Die Veröffentlichung des Verfassers «Influence de l'encastrément latéral dans les grands barrages»<sup>1)</sup> enthält eine Berechnung der Beanspruchung und der Durchbiegungen des eingespannten Kreisbogensegmentes für radiale Einzellasten und für einen gleichmässig verteilten Druck. Dabei wurde der Einfluss aller inneren Spannungen, d. h. der Normal-, Bieungs- und Querkkräfte auf die Deformation berücksichtigt. Für die gleichmässig verteilte Last beträgt die Beanspruchung in einem Schnitt mit Winkel  $x$  gegenüber der Symmetrieaxe (Bild 7):

axiale Normalkraft:

$$N = pr(1 - \Delta \cos x)$$

Bieungsmoment:

$$M = pr^2 \times \left( \cos x - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

Querkraft:

$$Q = pr \Delta \sin x$$

wo

$$\Delta = \frac{\sin \alpha \left( \frac{i}{r} \right)^2}{\frac{a\alpha}{2} + \frac{b \sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}}$$

$$i^2 = \frac{J}{F} = \frac{e^2}{12}; \quad e = \text{Bogenstärke}$$

$$a = 1 + \left( \frac{E}{G} + 1 \right) \left( \frac{i}{r} \right)^2$$

$$b = 1 - \left( \frac{E}{G} - 1 \right) \left( \frac{i}{r} \right)^2$$

Die radiale Deformation  $y$  beträgt:

$$(5) \quad y = \frac{pr^2}{EF} \left[ 1 - \cos(\alpha - x) - \sin \alpha \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}} \right]$$

wo

$$(5a) \quad \begin{aligned} \frac{EJ}{r^3} \delta_{mx} &= \frac{b}{2} \sin \alpha \sin(\alpha - x) - \frac{a}{2} \sin x(\alpha - x) - \\ &- \frac{\sin \alpha}{\alpha} [1 - \cos(\alpha - x)] \\ \frac{EJ}{r^3} \delta_{xx} &= \frac{a\alpha}{2} + \frac{b \sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

Es ist hervorzuheben, dass der Zähler der statisch unbestimmten Grösse  $\Delta$  nur von der Deformation unter dem Einfluss der Normalkräfte abhängig ist. Wenn dieser Einfluss vernachlässigt wird, ergibt sich  $\Delta = 0$  und  $N = pr$ ;  $M = 0$  und  $y = 0$ . Aus diesem Ergebnis geht der Unterschied zwischen dem Bogensegment und dem vollen Zylinder hervor. Während im Zylinder die Normalkräfte nur eine in allen radialen Schnitten gleich grosse elastische Deformation und somit keine Abweichung von der Kreisform verursachen, ist dies beim Segment nicht der Fall. Die Differentialgleichung, die zur Formel (4) führte und nur den Einfluss der Momente berücksichtigt, ist für den vollen Zylinder zweckmässig; ihre Anwendung beim eingespannten Bogensegment wäre hingegen unzulässig.

Bei der Ableitung der Formel (5) für die Durchbiegung  $y$  wurde der Einfluss der Veränderung der Belastung infolge der elastischen Deformation nicht berücksichtigt. Diese bei allen Problemen der Baustatik ohne weiteres zulässige Ver-

einfachung gestattet aber eine strenge mathematische Analyse der Knickvorgänge nicht. Die unter Berücksichtigung des Einflusses der Deformation auf die Lage und die Grösse der wirkenden Belastung durchgeführte Berechnung der im Querschnitt mit Winkel  $x$  gegenüber der Symmetrieaxe auftretenden Beanspruchung ergibt:

$$M_1 = pr^2 \left[ \Delta_1 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos x \right) - \frac{y_x}{r} + \int_0^\alpha \frac{y_x}{r\alpha} dx \right]$$

$$N_1 = pr \left[ 1 - \frac{y_x}{r} - \Delta_1 \cos x \right]$$

$$Q_1 = -pr \Delta_1 \sin x$$

worin  $\Delta_1$  die statisch unbestimmte Grösse bezeichnet, die in der horizontalen Schweraxe des Bogens wirkt (Bild 8). Es ergibt sich aus einer längeren, jedoch einfachen Berechnung, die gleich wie in der oben zitierten Publikation des Verfas-

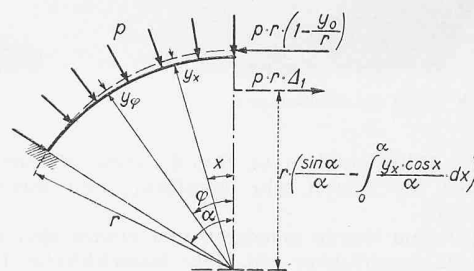


Bild 8

sers vom Jahre 1921 nach der Methode der virtuellen Arbeiten durchgeführt wurde:

$$(6a) \quad \Delta_1 = \frac{\left( \frac{i}{r} \right)^2 \sin \alpha - \int_0^\alpha \frac{y_x}{r} \left( \cos x - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) dx}{\frac{a\alpha}{2} + \frac{b \sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}}$$

und

$$(7) \quad \begin{aligned} y_x &= \frac{pr^4}{EJ} \left\{ \Delta_1 \left[ \frac{a \sin x(\alpha - x)}{2} - \frac{b \sin \alpha \sin(\alpha - x)}{2} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\sin \alpha}{\alpha} (1 - \cos(\alpha - x)) \right] - \\ &- \int_x^\alpha \frac{y_\varphi}{r} \sin(\varphi - x) d\varphi + [1 - \cos(\alpha - x)] \times \\ &\times \left[ \left( \frac{i}{r} \right)^2 + \int_0^\alpha \frac{y_\varphi}{r\alpha} d\varphi \right] \right\} \end{aligned}$$

oder auch zum Vergleich mit der Formel (5a)

$$\begin{aligned} y_x &= \frac{p}{E} \left\{ \frac{r^2}{F} \left[ 1 - \cos(\alpha - x) - \sin \alpha \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}} \right] + \right. \\ &+ \frac{r^4}{J} \left[ (1 - \cos(\alpha - x)) \int_0^\alpha \frac{y_\varphi}{r\alpha} d\varphi - \right. \\ &- \left. \int_x^\alpha \frac{y_\varphi}{r} \sin(\varphi - x) d\varphi + \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}} \int_0^\alpha \frac{y_\varphi}{r} \times \right. \\ &\times \left. \left( \cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) d\varphi \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

1) SBZ, Bd. 78, S. 271\* (3. Dez. 1921).

Die beiden Werte  $\delta_{mx}$  und  $\delta_{xx}$  ergeben sich aus den Formeln (5a).

Die Formel (7) gibt für den eingespannten Kreisbogen eine mathematische Relation zwischen der gleichmässig verteilten Last  $p$  und der Durchbiegung  $y_x$ . Jedem Wert von  $p$  innerhalb des zulässigen Belastungsbereiches entspricht eine eindeutige elastische Linie. Bei Erreichung der Knicklast wird es hingegen plötzlich für  $y$  keine endlichen Werte geben, die der Gleichung (7) Genüge leisten. Praktisch kann man die Funktion nicht integrieren. Es würde aber in einem konkreten Falle nichts im Wege stehen, sie durch sukzessive Approximationen (wie vorstehend bei der Berechnung 4 der axial belasteten Säule) auszurechnen. Der erste Teil des zweiten Gliedes ist mit dem Ausdruck der Durchbiegung gemäss Formel (5) identisch. Der zweite Teil bringt den Einfluss der Aenderung der Belastung infolge der Verformung zum Ausdruck.

## 2. Fall der durch Aussendruck belasteten Stollenpanzerungen

Zylindrische Stollenpanzerungen bilden, wenn sie von aussen statt von innen belastet werden, einen interessanten Spezialfall der Kreissegmente.

Die theoretische Lösung des Problems der Stabilität von durch Aussendruck beanspruchten Blechverkleidungen verlangt weitgehende Untersuchungen. Es ist deshalb wiederholt versucht worden, es auf eine vereinfachte Art zu behandeln. Je nach den getroffenen Annahmen fallen die Ergebnisse solcher Untersuchungen verschieden aus. Vor weiteren Ueberlegungen ist es aber zweckmässig, zuerst auf die beim Druckschachtbau gemachten Erfahrungen hinzuweisen, um die Untersuchung auf Fälle von praktischer Bedeutung zu beschränken.

Die Reduktion der Wandstärke einer Stollenpanzerung durch Uebertragung eines möglichst grossen Teiles des inneren Wasserdruckes auf den äusseren Rohrmantel (Fels) ist nur dann gerechtfertigt, wenn der Zwischenraum zwischen der Panzerung und dem Gebirge tatsächlich mit einem festen Material vollständig ausgefüllt wird. Obwohl dieser Raum im allgemeinen nicht breit genug ist, um zugänglich zu sein, sodass die Qualität der Betonierung direkt kontrolliert werden könnte, ist es jedoch möglich, die erforderliche satte Rohrhinterfüllung durch zweckmässige Anwendung erprobter Bauverfahren zu gewährleisten. Dabei kommt der systematischen Durchführung von Zementinjektionen eine besondere Bedeutung zu. Mit solchen werden nicht nur allfällig nach der Betonierung verbleibende Hohlräume oder Schwindspalten ausgefüllt, sondern es ist auch ohne weiteres möglich, die Panzerung unter eine Druckvorspannung zu setzen. Bezüglich Schwinden ist daran zu erinnern, dass diese Erscheinung nur bei Beton, der dem Austrocknungsprozess ausgesetzt wird, vorkommt; bei nasser Lagerung weist der Beton im Gegenteil eine Tendenz zum Quellen auf. In seiner dreissigjährigen Praxis im Kraftwerkstollenbau ist dem Verfasser nie ein Fall begegnet, bei welchem die Bedingungen für ein Schwinden des Betonmantels erfüllt gewesen wären.

Die Untersuchung der Stabilität von einbetonierten Stollenpanzerungen muss also in erster Linie den Fall der Injektionen berücksichtigen. Je nach den Verhältnissen kann auch Bergwasserdruck in Frage kommen. Die sicherste Regel, um daraus entstehende nachteilige Auswirkungen zu vermeiden, besteht darin, die Rohrleitung so zu dimensionieren, dass die Injektionen jedenfalls mit einem Druck, der höher ist als der zu erwartende grösste Bergwasserdruck, durchgeführt werden können. Diese Massnahme gewährleistet zum vornehieren eine volle Sicherheit für die Stabilität der entleerten Leitung im Sinne einer Belastungsprobe; nach der Erhärtung des injizierten Zementes werden die Verhältnisse bedeutend günstiger als während der Durchführung der Injektionen. Liegt nach der Betonierung die Umhüllung auf grösseren Flächen nicht satt an die Panzerung an, was ohne weiteres durch Abklopfen wahrgenommen werden kann, so muss die Injektionsarbeit mit besonderer Sorgfalt vorgenommen werden, weil die Knickgefahr in diesem Stadium der Arbeitsausführung am grössten ist. Wenn die Rohrleitung einigermaßen satt eingebettet ist, zeigt die Erfahrung, dass eine Einbeulung von nicht ausgesteiften Rohren aus weichem Stahl bei einem Injektionsdruck entsprechend einer Ringspannung von rd. 2 t/cm<sup>2</sup> auftritt. Eine Reduktion der Beanspruchung der Panzerrohre durch Injektionen auf 1,5 t/cm<sup>2</sup> hat sich praktisch bewährt

und bietet eine genügende Sicherheit. Zur Festsetzung des zweckmässigsten Injektionsdruckes ist einerseits zu bemerken, dass im allgemeinen kleinere Drücke genügen würden, um die erwünschte Vorspannung der Panzerung zu erzielen; nur bei Leitungen, die ein Gewicht von weniger als 20 Prozent desjenigen eines freiliegenden Rohres aufweisen, wird es darauf ankommen, systematisch den maximal zulässigen Injektionsdruck anzuwenden. Andererseits lässt sich die Injektionsarbeit rascher und zuverlässiger durchführen, wenn sie mit einem hohen Druck vorgenommen werden kann. Für die einwandfreie Durchführung von Injektionen hinter Stollenpanzerungen muss ein routiniertes, aber auch überlegungsfähiges Personal zur Verfügung stehen. Dies ist für die Sicherheit der Anlage mehr wert als eine Verstärkung der Rohrleitung um einige mm. Wie weit in dieser Beziehung gegangen werden kann, zeigt das Beispiel des Druckschachtes des Kraftwerkes Innertkirchen, der ohne jeglichen Anstand ausgeführt werden konnte. Bei den Abpressversuchen dieser Anlage mit 100 at am unteren Ende hätte die theoretische Beanspruchung der Blechrohrverkleidung, wenn sie nicht durch den Beton- und Felsmantel entlastet gewesen wäre, 8700 kg/cm<sup>2</sup> oder das fünffache der für die freien Rohre zulässigen Probespannung betragen. Die tatsächliche Beanspruchung blieb aber wesentlich unter derjenigen einer gewöhnlichen Druckrohrleitung.

Bei Stollen, die einen relativ geringen Betriebsdruck aufweisen und aus Dichtigkeits- oder andern Gründen mit einer Blechverkleidung versehen werden, wird das wirtschaftliche Verhältnis der Wandstärke zum Radius der Panzerrohre so klein, dass der für die leere Leitung zulässige Aussendruck bald überschritten wird. In einem solchen Falle ist es vorteilhaft, von Aussteifungen und eventuell von Verankerungen Gebrauch zu machen. Kommt eine solche Lösung auch nicht in Betracht, so ist für eine wirksame Drainierung des Bergwassers zu sorgen; die Durchführung der Injektionen wird aber durch die Aussteifungen, die Verankerungen oder die Drainagen erschwert. In allen Fällen stellt sich gleichwohl das Problem der Injektionen und mit ihm dasjenige der Stabilität der Panzerungen.

### a) Satte Einbetonierung, jedoch ohne Vorspannung des Panzerrohres

Die nachstehende Untersuchung beruht auf folgender Voraussetzung, die bei sachgemässer Bauausführung ohne weiteres gewährleistet werden kann: der Beton, der den Raum zwischen der Panzerung und der Felshülle füllt, ist in dem Sinne unachgiebig, dass er jede Bewegung des Rohres nach aussen verhindert; wenn also dieses unter dem äusseren Wasserdruck deformiert und streckenweise gegen den Betonmantel ange-drückt wird, so behält es über die Berührungsflächen den gleichen Krümmungsradius wie im unbelasteten Zustand. Damit wird aber nicht gesagt, dass keine relativen Bewegungen des Rohres gegenüber der Betonunterlage stattfinden können. Es wird vielmehr angenommen, dass das Rohr sich unter der Wirkung des Aussendruckes auf seinen ganzen Umfang vom Betonmantel löst. Bei mässigem Aussendruck deformiert das Rohr konzentrisch, bis die Belastung genügt, um das Knicken des vollen Kreises nach Formel (4b) einzuleiten. Von diesem Moment an wird ein gewisser Teil des Rohrumfanges auf dem Beton liegen und kreisförmig bleiben, während das restliche Bogensegment frei steht und ähnliche wie im vorstehenden Abschnitt ermittelte Beanspruchungen und Deformationen erleidet. Zum Unterschied mit diesem letzten Fall sind aber die Widerlager des Bogensegmentes nicht mehr fest. Ein solches Segment ist wegen seiner kürzeren Spannweite trotz der in ihm wirkenden Biegemomente stabiler als der freie Kreis und demnach fähig, eine grössere Last zu tragen. Mit der Steigerung der Belastung nimmt die Spannweite bis zu einem Grenzwert, bei welchem das Knicken erfolgt, allmählich ab.

Um den ungünstigsten Fall zu berücksichtigen, wird in den nachstehenden Berechnungen angenommen, dass sich der ganze Rohrumfang unter dem Aussendruck verkürzt, gleich wie bei einem freien Rohr, und ferner, dass beim Einknicken sich nur ein einzelnes Segment von der Betonunterlage abhebt.

$ABC$  sei das freie Bogensegment (Öffnungswinkel  $2\alpha$ ) im belasteten Zustande des ganzen Rohrumfanges durch den äusseren Druck  $p$  (Bild 9a). Vor der Belastung lag der Punkt  $A$  in  $A'$  (Bild 9b) und der Punkt  $C$  in  $C'$ . Das an den äusseren

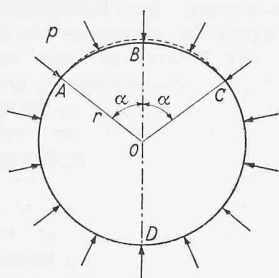


Bild 9a

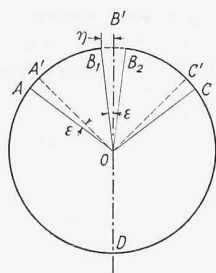


Bild 9b

Mantel anliegende Rohrsegment ADC hat infolge der Belastung eine Verkürzung um den Betrag  $2\eta$  erlitten.

$$\eta = AA' = CC' = B_1B' = B_2B' = \frac{pr^2(\pi - \alpha)}{EF}$$

Um von Bild 9b zu Bild 9a überzugehen, muss im Bogen-scheitel eine Zugkraft und ein Biegemoment angebracht werden, so dass die beiden Punkte  $B_1$  und  $B_2$  mit B zusammenfallen. Auch müssen die beiden symmetrischen Bogenhälften in B eine gemeinschaftliche horizontale Tangente aufweisen und hierfür eine Drehung  $\varepsilon$  der Bogenenden  $B_1$  und  $B_2$  um den Winkel  $B_1OB'$  erfahren.

$$\varepsilon = \frac{pr(\pi - \alpha)}{EF}$$

Die Berechnung wird am zweckmässigsten für das halbe Segment, d. h. für die Bogenstrecke AB (Bild 10) durchgeführt. Sie geht von dem statisch bestimmten System mit der gleichmässigen Belastung  $p$  und der Ringkraft  $pr$  ( $1 - y_0/r$ ) im Scheitel aus. Als statisch unbestimmte Werte wirken im Bogen-scheitel die Kraft  $pr\theta$  und das Moment  $pr^2Z$ . Die entsprechenden Beanspruchungen betragen:

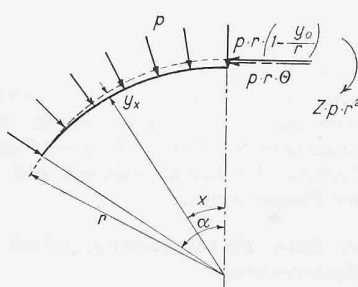


Bild 10

Momente:

$$M = -pr^2 \left[ \frac{y_x}{r} + \theta \left( 1 - \cos x + \frac{y_x}{r} \cos x \right) - Z \right]$$

Normalkräfte:

$$(8a) \quad N = pr \left[ 1 - \frac{y_x}{r} + \theta \cos x \right]$$

Schubkräfte:

$$(8b) \quad Q = pr\theta \sin x$$

Der Bogen AB ist in A nicht eingespannt, aber seine Beanspruchung gegeben; sie muss mit derjenigen auf der Strecke ADC (Bild 9) übereinstimmen und setzt sich in erster Linie aus der Ringkraft  $pr$  und einem sekundären Biegemoment, dessen Wert sich aus folgender Ueberlegung ergibt, zusammen:

Unter der Ringkraft allein würde der Krümmungsradius des Kreisbogens  $A'DC'$  kleiner werden, sein Öffnungswinkel aber unverändert bleiben. Wie aus Bild 9 hervorgeht, verhält es sich im vorliegenden Fall umgekehrt, die Bogenkrümmung bleibt die gleiche, und der Öffnungswinkel wird um die Segmente  $A'O A + C'O C = 2\varepsilon$  kleiner. Das hierfür erforderliche Biegemoment  $M_a$  ergibt sich aus der Bedingung:

$$\varepsilon = \int_{\pi}^{\alpha} \frac{M_a r dx}{EJ} = \frac{pr(\pi - \alpha)}{EF}$$

$$M_a = -pr^2 \left( \frac{i}{r} \right)^2$$

Aus der obenstehenden Formel des Biegemomentes  $M$  ergibt sich für  $x = \alpha$  und  $y_\alpha = 0$

$$Z = - \left( \frac{i}{r} \right)^2 + \theta (1 - \cos \alpha)$$

$$(8c) \quad M = -pr^2 \left[ \frac{y_x}{r} + \left( \frac{i}{r} \right)^2 + \theta (\cos \alpha - \cos x) \right]$$

$\theta$  sowie ein zweiter Wert für  $Z$  ergeben sich aus den beiden Bedingungen, dass das statisch bestimmte System AB im Bild 9b unter den Beanspruchungen gemäss den Formeln (8) im Punkte B eine horizontale Verschiebung  $= -\eta$  und eine Drehung  $= \varepsilon$  erfahren muss.

Horizontale Verschiebung,

$$(9) \quad -\eta = - \frac{pr^2}{EF} (\pi - \alpha) = - \int_0^{\alpha} \frac{M \left( 1 - \cos x + \frac{y_x}{r} \cos x \right) r^2 dx}{EJ} + \int_0^{\alpha} \frac{N \cos x r dx}{EF} + \int_0^{\alpha} \frac{Q \sin x r dx}{GF}$$

Drehung,

$$\varepsilon = \frac{pr}{EF} (\pi - \alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{M r dx}{EJ}$$

Bei der Ausrechnung dieser Integrale werden die Werte  $(y_x)^2/r$  und  $\theta y_x/r$  vernachlässigt, denn  $y_x/r$  und  $\theta$  sind in allen Fällen bereits sehr kleine Beträge. Ferner werden die gleichen Abkürzungen  $a$  und  $b$  wie bei der Ableitung der Formel (5a) benützt. Es ergibt sich aus der ersten Bedingung

$$(9a) \quad - \left( \frac{i}{r} \right)^2 \pi = \int_0^{\alpha} (1 - \cos x) \frac{y_x}{r} dx + \theta \times \left[ \alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \frac{a\alpha}{2} - \frac{(2-b) \sin 2\alpha}{4} \right]$$

und der zweiten

$$(9b) \quad \left( \frac{i}{r} \right)^2 \pi = - \int_0^{\alpha} \frac{y_x}{r} dx + \theta (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

Aus der Addition von (9a) und (9b) folgt

$$(10a) \quad \theta = \frac{\int_0^{\alpha} \cos x \frac{y_x}{r} dx}{\frac{a\alpha}{2} - \frac{(2-b) \sin 2\alpha}{4}}$$

und aus (9b)

$$(10b) \quad \theta = \frac{\left( \frac{i}{r} \right)^2 \pi + \int_0^{\alpha} \frac{y_x}{r} dx}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}$$

Aus den Gleichungen (10a) und (10b) kann ein dritter Wert für  $\theta$  ermittelt werden, indem Zähler und Nenner der zweiten durch  $\sin \alpha / \alpha$  multipliziert werden.

$$\theta = \frac{\int_0^{\alpha} \cos x \frac{y_x}{r} dx}{\frac{a\alpha}{2} - \frac{(2-b) \sin 2\alpha}{4}} = \frac{\left( \frac{i}{r} \right)^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \pi + \int_0^{\alpha} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{y_x}{r} dx}{\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2}}$$

Durch Subtraktion der Zähler und der Nenner der Proportion folgt



$$(10c) \quad \theta = \frac{\int_0^{\alpha} \frac{y_x}{r} \left( \cos x - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) dx - \left( \frac{i}{r} \right)^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \pi}{\frac{a \alpha}{2} + \frac{b \sin 2 \alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}}$$

Dieser neue Ausdruck für  $\theta$  wird in den nachstehenden Ableitungen nicht weiter verwendet. Er gestattet aber einen direkten Vergleich mit dem bei der Berechnung des eingespannten Bogens ermittelten statisch unbestimmten Komplement zum Bogenschub gemäss der Formel (6a). Die Vorzeichen von  $\mathcal{J}_1$  und  $\theta$  sind verkehrt, da die positive Richtung der entsprechenden Kräfte nicht im gleichen Sinne angenommen wurde.  $\theta$  ist bei dünnen Bogen, die der Knickgefahr ausgesetzt sind, bestimmt eine Druckkraft; bei einem dickeren Bogen ist  $\mathcal{J}_1$  hingegen eine Zugkraft. Der einzige Unterschied zwischen  $\mathcal{J}_1$  und dem obenstehenden Wert von  $\theta$  liegt im Faktor  $\pi/\alpha$ , mit welchem im letzteren  $(i/r)^2 \sin \alpha$  multipliziert wird. Für  $\alpha = \pi$  besteht Uebereinstimmung der beiden Belastungsfälle.

Die Gleichung (10a) kann zur Bestimmung des in den Formeln 8 und 11 unbekannten Wertes  $\theta$  benützt werden. 10b gibt eine Relation zwischen dem Winkel  $\alpha$  und der Durchbiegung bzw. der Belastung. Eine zweite Relation zwischen diesen Werten wird aus der direkten Berechnung der Durchbiegung des Bogens AB abgeleitet. Für eine bestimmte Belastung  $p$  wird es dann möglich sein, den Winkel  $\alpha$  und die Durchbiegung  $y_x$  und schliesslich die Beanspruchungen zu rechnen.

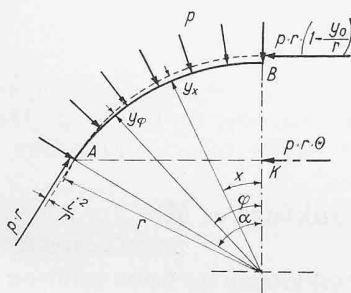


Bild 11

Zur Ermittlung der Durchbiegung benützen wir wiederum das Prinzip der virtuellen Arbeiten und führen eine Hilfskraft = 1 im Punkt  $m$  ein, deren Arbeit gleich der Durchbiegung ist.

$$M_\varphi = r \sin (\varphi - x)$$

$$N_\varphi = \cos (\varphi - x)$$

$$Q_\varphi = -\sin (\varphi - x)$$

$$y_x = \int_x^{\alpha} \left( \frac{M M_\varphi}{E J} + \frac{N N_\varphi}{E F} + \frac{Q Q_\varphi}{G F} \right) r d\varphi$$

Die Ausrechnung führt zum Ausdruck:

$$(11) \quad y_x = \frac{p r^4}{E J} \left\{ \theta \left[ -\frac{a(\alpha - x) \sin x}{2} + \frac{b \sin \alpha \sin (\alpha - x)}{2} - \cos \alpha (1 - \cos (\alpha - x)) \right] - \left( 1 + \left( \frac{i}{r} \right)^2 \right) \int_x^{\alpha} \frac{y_\varphi}{r} \sin (\varphi - x) d\varphi \right\}$$

In Analogie zum Wert  $\delta_{mx}$  für den eingespannten Bogen gemäss der Formel (5a) setzen wir:

$$-\frac{a(\alpha - x) \sin x}{2} + \frac{b \sin \alpha \sin (\alpha - x)}{2} - \cos \alpha [1 - \cos (\alpha - x)] = \frac{E J}{r^3} \gamma_{mx}$$

$\gamma_{mx}$  stellt die horizontale Bewegung des Punktes  $K$  infolge der Last 1 im Punkt  $m$  dar. Wird dieser Wert, sowie derjenige von  $\theta$  gemäss Formel (10a) in Formel (11) eingesetzt, so folgt:

$$(11a) \quad \frac{y_x}{r} = \frac{p r^3}{E J} \left\{ \frac{E J}{r^3} \gamma_{mx} \int_0^{\alpha} \frac{y_\varphi}{r} \cos \varphi d\varphi - \left[ \frac{a \alpha}{2} - \frac{(2-b) \sin 2 \alpha}{4} \right] \pi \left( \frac{i}{r} \right)^2 \right\}$$

$$- \left[ 1 + \left( \frac{i}{r} \right)^2 \right] \int_x^{\alpha} \frac{y_\varphi}{r} \sin (\varphi - x) d\varphi \right\}$$

Es ist erkenntlich, dass dieser Ausdruck unverändert bleibt, wenn in beiden Gliedern  $y$  durch den Wert  $\mu y_1$  ersetzt wird, wobei  $\mu$  eine Konstante und  $y_1$  die Ordinate einer relativen Durchbiegungslinie bezeichnen. In beiden Gliedern kann dann  $\mu$  gekürzt werden. Mit andern Worten gibt uns die Gleichung nur die Form und nicht den effektiven Masstab der Durchbiegungslinie. Sie führt aber gleichwohl zu einer direkten Bestimmung des Faktors  $p r^3/EJ$ , aus welchem dann die Knickbelastung ermittelt werden kann.

Aus den Gleichungen 10a und 10b ergibt sich

$$\int_0^{\alpha} \cos x \frac{y_x}{r} dx = \frac{\frac{a \alpha}{2} - \frac{(2-b) \sin 2 \alpha}{4}}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \times \left[ \left( \frac{i}{r} \right)^2 \pi + \int_0^{\alpha} \frac{y_x}{r} dx \right]$$

oder nach Einsetzen von  $y_x = \mu y_1$

$$(12) \quad \frac{\mu}{r} = \frac{\left[ \frac{a \alpha}{2} - \frac{(2-b) \sin 2 \alpha}{4} \right] \pi \left( \frac{i}{r} \right)^2}{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \int_0^{\alpha} y_1 \cos x dx - \left( \frac{a \alpha}{2} - \frac{(2-b) \sin 2 \alpha}{4} \right) \int_0^{\alpha} y_1 dx}$$

Die Formel (11) ergab die Form der Durchbiegungslinie, die Formel (12) liefert nun ihren Masstab. Um die Berechnungen zu vereinfachen, wird für  $x = 0$  der Wert  $y_1 = 1$  eingesetzt.

Da die Gleichung (11) nicht mathematisch integriert werden kann, wird  $y_1$  durch sukzessive Approximationen ermittelt. Es wird eine Form der Durchbiegungslinie angenommen, für eine Anzahl Punkte zwischen 0 und  $x$  werden die entsprechenden Ordinaten in das zweite Glied der Gleichung (11) eingesetzt, die neuen Werte von  $y_1$  bestimmt und diese unbekümmert um den konstanten Faktor  $p r^3/EJ$  wiederum als Näherungswert weiter verwendet. Das Verfahren führt wieder Erwarten ziemlich rasch zum Ziel, indem, wie es sich aus den Berechnungsergebnissen zeigte, die Form der relativen Durchbiegung für alle Werte von  $\alpha$  zwischen 0 und  $\pi/2$  sehr wenig ändert, wie aus Tabelle 1 hervorgeht.

Nach Ermittlung der Form der Durchbiegungslinie ergibt sich ohne weiteres für  $p r^3/EJ$  ein bestimmter Wert, der für ein gegebenes  $\alpha$  eine von  $x$  unabhängige Konstante sein muss. Der Ausdruck  $p r^3/EJ = \text{Konstante}$  ist die allgemeine Form der Formel (4b), die für den vollen Kreis gilt. Für  $\alpha = \pi$  muss also die Konstante gleich 3 sein. Bild 13 zeigt den Verlauf der Funktion  $p r^3/EJ = \text{konst.}$

Tabelle 1: Relative Durchbiegungen  $y_1$ 

$x : \alpha$	$\alpha$ (in Bogenmass bzw. ° sex)					
	0,150	0,300	30°	40°	60°	90°
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1/12	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975
2/12	0,904	0,904	0,904	0,903	0,903	0,901
3/12	0,793	0,793	0,793	0,792	0,791	0,788
4/12	0,656	0,656	0,656	0,655	0,654	0,649
5/12	0,508	0,508	0,508	0,506	0,504	0,499
6/12	0,362	0,362	0,361	0,360	0,359	0,353
7/12	0,235	0,235	0,234	0,233	0,231	0,226
8/12	0,131	0,131	0,131	0,130	0,129	0,125
9/12	0,059	0,059	0,059	0,059	0,058	0,056
10/12	0,019	0,019	0,018	0,018	0,018	0,017
11/12	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002

Die Werte der Tabelle 1 beziehen sich auf sehr dünne Bogen, bei welchem  $(i/r)^2$  sehr klein ist. Der Einfluss des Verhältnisses der Bogenstärke zum Rohrradius auf  $y_1$  ist relativ am grössten bei den kleinen Werten von  $\alpha$  und dann für

$x \approx \frac{2}{3}\alpha$ , bleibt aber immer sehr gering. Er beträgt beispielsweise für  $\alpha = 0,300$  und  $(i/r)^2 = 0,00001$ , im maximum 0,002. Solche Unterschiede sind bei der Ermittlung der Knickbelastungen und -beanspruchungen absolut bedeutungslos. Die Werte von  $y_1$  in Funktion von  $x$  sind in Bild 12 graphisch dar-

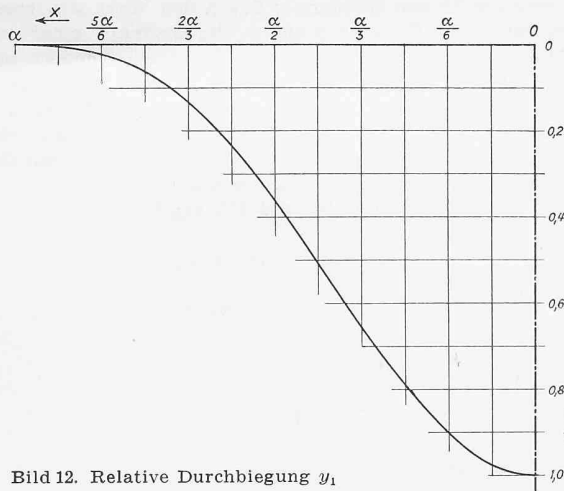


Bild 12. Relative Durchbiegung  $y_1$

gestellt. Die effektiven Durchbiegungen sind  $p\mu$  mal grösser. Da für  $x = 0$   $y_1 = 1$  gesetzt wurde, stellen die  $p\mu$ -Werte direkt die Scheiteldurchbiegungen  $y_0$  in Funktion des Winkels  $\alpha$  dar. Diese Relation geht aus Bild 13 hervor.

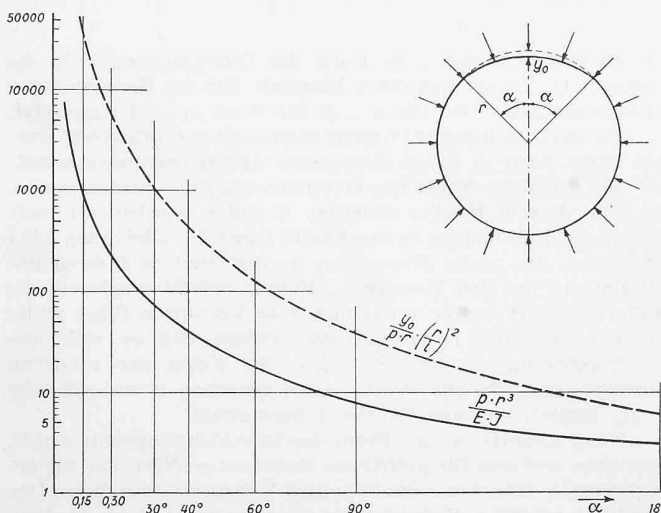


Bild 13

Mit der Kenntnis des Zentriwinkels  $2\alpha$  des Rohrsegmentes, der sich unter einem bestimmten Aussendruck  $p$  von seiner Betonumhüllung löst, ist das Problem der Stabilität von durch Aussendruck beanspruchten Stollenpanzerungen noch nicht ganz gelöst. Man kann lediglich feststellen, dass diese beiden Werte einen bestimmten Gleichgewichtszustand charakterisieren. Ein eigentliches Knicken findet unter dem Einfluss der zunehmenden Belastung  $p$  nur dann statt, wenn die Materialfestigkeit überwunden wird. Bei einem eisernen Rohr ist die Stauchgrenze massgebend.

Bevor wir uns mit der praktischen Anwendung der vorstehenden Untersuchungen näher beschäftigen, ist es angezeigt, noch auf die Gleichung (11) zurückzukommen und den Nachweis zu geben, dass sie wirklich alle Bedingungen der Problemstellung erfüllt.

In erster Linie ist festzustellen, dass die allgemeine Gleichung der Deformation eines Kreissegmentes

$$(13) \quad \frac{d^2 y}{r^2 dx^2} + \frac{y}{r^2} = \frac{M}{EJ} + \frac{N}{rEF} + \frac{dQ}{r dx} \frac{1}{GF}$$

befriedigt ist. Nach den Formeln (8) sind:

$$\frac{M}{EJ} = -\frac{pr^2}{EJ} \left[ \frac{y_x}{r} + \left( \frac{i}{r} \right)^2 + \Theta (\cos \alpha - \cos x) \right]$$

$$\frac{N}{rEF} = \frac{pr^2}{EJ} \left( \frac{i}{r} \right)^2 \left[ 1 - \frac{y_x}{r} - \Theta \cos x \right]$$

$$\frac{dQ}{r dx} \frac{1}{GF} = \frac{pr^2}{GJ} \left( \frac{i}{r} \right)^2 \Theta \cos x$$

und nach den Formeln (11):

$$\frac{y_x}{r^2} = \frac{pr^2}{EJ} \left\{ \Theta \left[ -\frac{a(\alpha-x)\sin x}{2} + \frac{b\sin \alpha \sin(\alpha-x)}{2} - \cos \alpha (1 - \cos(\alpha-x)) \right] - \left[ 1 + \left( \frac{i}{r} \right)^2 \right] \int_x^\alpha \frac{y_\varphi}{r} \sin(\varphi-x) d\varphi \right\}$$

$$\frac{d^2 y_x}{r^2 dx^2} = \frac{pr^2}{EJ} \left\{ \Theta \left[ \frac{a\sin x(\alpha-x)}{2} + a\cos x - \frac{b\sin \alpha \sin(\alpha-x)}{2} - \cos \alpha \cos(\alpha-x) \right] + \left[ 1 + \left( \frac{i}{r} \right)^2 \right] \left[ \int_x^\alpha \frac{y_\varphi}{r} \sin(\varphi-x) d\varphi - \frac{y_x}{r} \right] \right\}$$

Schliesslich ergibt sich durch Addition der zusammengehörenden Beträge die Identität:

$$\frac{d^2 y_x}{r^2 dx^2} + \frac{y_x}{r^2} = -\frac{pr^2}{EJ} \times$$

$$\times \left\{ \Theta (\cos \alpha - a \cos x) + \frac{y_x}{r} \left[ 1 + \left( \frac{i}{r} \right)^2 \right] \right\} =$$

$$= \frac{M}{EJ} + \frac{N}{rEF} + \frac{dQ}{r dx} \frac{1}{GF}$$

Der Wert  $y_x (i/r)^2$  wäre vollständig vernachlässigt gewesen; er wurde hier nur mitgenommen, weil sonst die Gleichung (13) nicht restlos befriedigt werden könnte. Schluss folgt

## Die «Achema X» in Frankfurt a. M.

DK 061.4 : 66.02 (43)

Die zwischen den beiden Weltkriegen ins Leben gerufenen Ausstellungstagungen für chemisches Apparatewesen haben sich rasch entwickelt und wurden aus allen Industrieländern stark besucht. 1950 fand die erste Ausstellung nach dem Kriege statt<sup>1)</sup>. Dank der ausserordentlich regen Beteiligung wurde die organisierende Gesellschaft Dechema<sup>2)</sup> ermutigt, die neue Tagung in den Rahmen eines europäischen Treffens für chemische Technik zu stellen. So hielt denn während der Achema X<sup>3)</sup> die Société de Chimie Industrielle, Paris, ihren XXVe Congrès International de Chimie Industrielle in Frankfurt ab. Neben den beiden genannten Gesellschaften nahmen noch 19 technische und chemische Verbände aus 14 Staaten Westeuropas an dem Treffen offiziell teil, darunter auch der Schweizerische Chemiker-Verband.

An der feierlichen Eröffnungssitzung sprach Jean Gérard, Viceprésident-Délégué de la Société de Chimie Industrielle, Paris, über die «Coopération technique européenne» — ein Thema, das ein weites und reges Echo fand. Im fernern hielt Dr. Eugen Diesel den Festvortrag über «Die Technik als Weltimpuls»: «Der Siegeszug der Technik, von dem niemand sagen kann, ob er im Guten oder im Bösen enden wird, bildet auch den Impuls, der sogar Philosophie und Religion bewegt, sowie politische und psychologische Wandlungen bewirkt, woraus aber auch eine Annäherung der Völker und damit das Reifen der europäischen Idee möglich wird.» Das auf die Achema X geschaffene europäische Ehrenpräsidium, zusammengesetzt aus 29 Persönlichkeiten (darunter zwei Schweizer) aus sechzehn europäischen Staaten, berief einen kleinen Ausschuss, der nun die Möglichkeiten und Wege zu studieren hat, wie das von Ing. Gérard entwickelte wertvolle Gedankengut über die Schaffung einer internationalen Dokumentation, über die Normung von Apparaten, Produkten, Anlagen und Methoden, über die Vereinheitlichung der Patentgesetzgebung in Europa usw. verwirklicht werden kann. Als Folge dieser engen Fühlungnahme über die Gren-

<sup>1)</sup> SBZ 1950, Nr. 19, S. 262 und Nr. 33, S. 452.

<sup>2)</sup> SBZ 1951, Nr. 19, S. 268.

<sup>3)</sup> SBZ 1952, Nr. 15, S. 215.